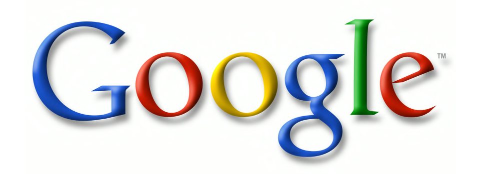
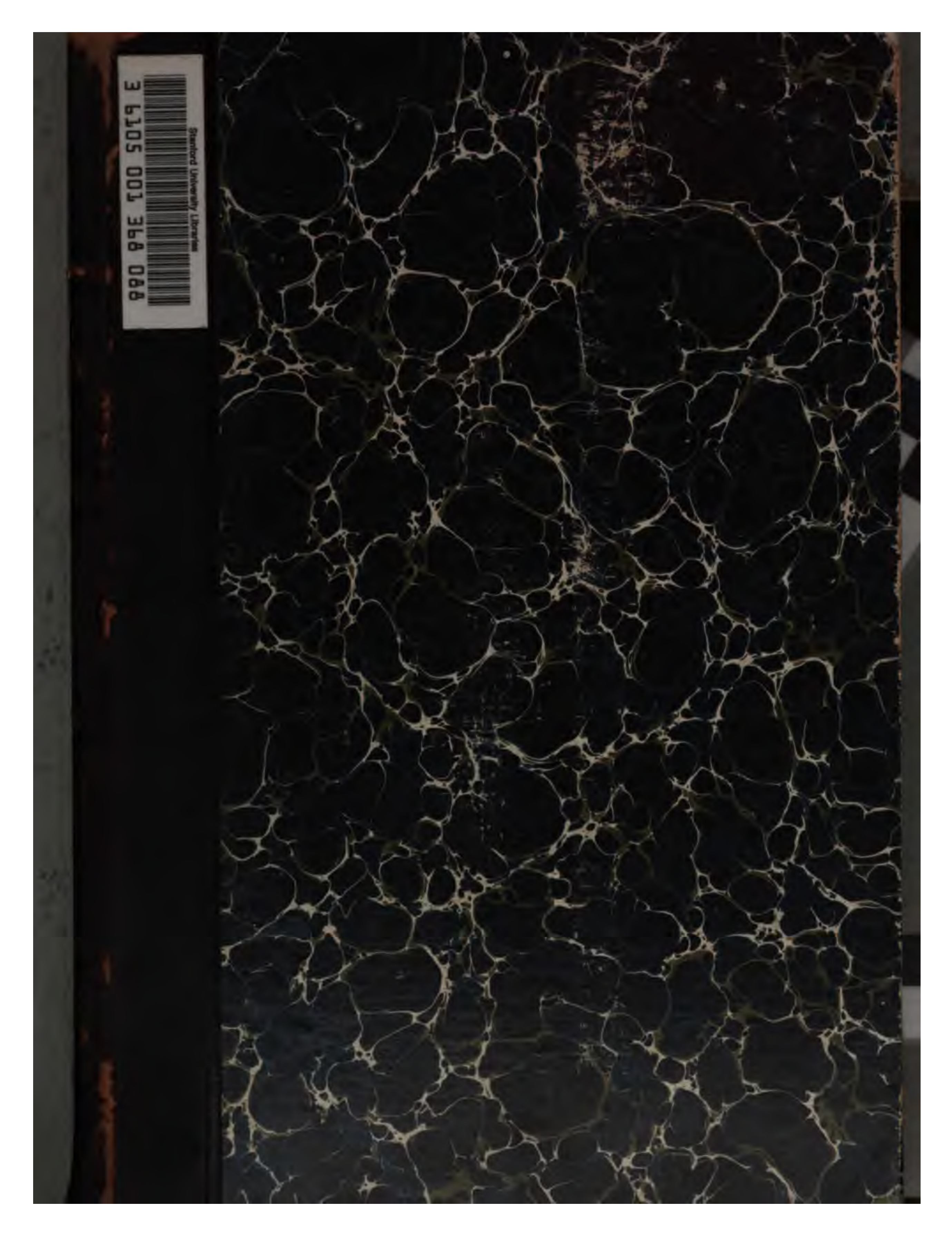



Stanford University Libraries
3 6105 001 368 088



Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXIII. Jahrgang.

Mit 6 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1878.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

I.

Kaustische Linien in kinematischer Behandlung.

Von

Dr. Oscar Kessler,

Lehrer an der königl. Gewerbeschule zu Görlitz.

Hierzu Taf. I, Fig. 1—8.

Die Eigenschaften der kaustischen Linien sind bisher fast ausschliesslich mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie untersucht worden. Die in ziemlich complicirten Formen auftretenden Gleichungen, welche hierbei als Grundlagen für die weiteren Entwickelungen dienen, lassen sich in den meisten Fällen nur sehr umständlich behandeln; eine der einfachsten Linien dieser Art, die Katakaustik des Kreises, ist eine Curve sechsten Grades. Mannichfaltige Rechnungsoperationen sind allein zur Bestimmung der ausgezeichneten Punkte erforderlich; es ist deshalb sehr schwer, auf dem bisher betretenen Wege eine klare Vorstellung über die Gestalten der Brennlinien zu gewinnen.

In den folgenden Mittheilungen sind die Principien der kinematischen Geometrie zur Untersuchung der kaustischen Linien benutzt worden, und zwar sollen hier zunächst nur die durch Reflexion entstandenen behandelt werden. Durch die gewählte Methode gelingt es, die verschiedenen Gestalten dieser Curven, ohne Benutzung der Gleichung derselben, vollkommen übersichtlich darzustellen.

Die Grundzüge der kinematischen Geometrie, d. h. derjenigen Disciplin, welche sich mit der Erzeugung geometrischer Gebilde durch Bewegung starrer Systeme beschäftigt, sind in neuerer Zeit von Aronhold* systematisch zusammengestellt und begründet worden. Die bei den folgenden Untersuchungen benutzten Sätze sind auch, aus verschiedenen Quellen abgeleitet, in vielen anderen Werken enthalten, von welchen Schell, Theorie der Bewegung, und *Résal, Traité de cinématique pure*, genannt werden mögen. Des Zusammenhangs wegen sollen die Haupt-

* Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie. Verhandlungen des Vereins zur *Beförderung des Gewerbfleisses* in Preussen 1872.

sätze der kinematischen Geometrie hier kurz vorangestellt werden; dieselben entsprechen den ausführlichen Sätzen in der erwähnten Abhandlung von Aronhold und enthalten nur das zum Verständniss der folgenden Untersuchungen Nothwendige.

1) In einem starren ebenen System, welches sich in seiner eigenen Ebene beliebig bewegt, giebt es in jedem Augenblicke einen und nur einen, aber beständig wechselnden Punkt 𝔓, um welchen das System ohne Gleitung rotirt; dieser Punkt 𝔓 heisst der momentane Pol der Ebene.

2) Während der Bewegung des ebenen Systems beschreibt jeder Punkt P desselben auf der festen Ebene eine Bahn, welche die Roulette dieses Punktes genannt werden soll. P heisst der beschreibende Punkt. Alle Normalen der in der festen Ebene beschriebenen Curvenelemente schneiden sich in jedem Augenblicke in einem Punkte, nämlich im momentanen Pol des Systems.

Der Pol ändert seine Lage fortwährend, sowohl in der beweglichen, als in der festen Ebene, und beschreibt infolge dessen in beiden Ebenen Curven, welche die Polbahnen genannt werden.

3) Bei der Bewegung des ebenen Systems rollt die Polbahn der beweglichen Ebene auf der Polbahn der festen Ebene, ohne zu gleiten.

Es seien P und Q die augenblicklichen Lagen zweier Punkte des beweglichen Systems, ferner m und n die Krümmungsmittelpunkte der augenblicklich von P und Q beschriebenen Bogenelemente beider Rouletten, so schneiden sich nach 2) Pm und Qn im momentanen Pol 𝔓. Es seien α und β die beiden Winkel, welchen die Linien $\mathfrak{P}P$ und $\mathfrak{P}Q$ mit der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen im Punkte 𝔓 bilden. Bezeichnet man noch die Strecken $\mathfrak{P}P$ und $\mathfrak{P}Q$, also die Entfernungen der beschreibenden Punkte vom Pole, mit r und s, ferner die entsprechenden Entfernungen der Krümmungsmittelpunkte vom Pole, $\mathfrak{P}m$ und $\mathfrak{P}n$, mit r_1 und s_1, so hat man zwischen diesen Grössen folgende fundamentale Relation:

$$4)\qquad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\sin\alpha=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}\right)\sin\beta=const.$$

Hierbei sind r und r_1, ebenso s und s_1 algebraisch zu nehmen, und zwar haben r und r_1 dasselbe Vorzeichen, wenn 𝔓 zwischen P und m liegt, dagegen entgegengesetzte Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt m und P nach derselben Richtung von 𝔓 aus liegen.

Als specieller Fall ergiebt sich der Savary'sche Satz*:

$$5)\qquad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\sin\alpha=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1},$$

* *Man vergl. die Abhandlung* von Hennig, Crelle's Journal Bd. 65.

worin ϱ und ϱ_1 die zum Pole $\mathfrak{P}$ gehörigen Krümmungsradien der beweglichen resp. festen Polbahn bedeuten.

Bezeichnet man irgend einen beschreibenden Punkt P der beweglichen Ebene und den Krümmungsmittelpunkt m des augenblicklich beschriebenen Bogenelements zusammen als Punktepaar, so gilt folgender Satz:

6) Die sämmtlichen zu einander gehörigen Punktepaare auf irgend zwei Geraden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, welche sich im augenblicklichen Pole $\mathfrak{P}$ schneiden, gehören einem collinearen System von Punkten an, dessen Collineationsaxe durch den Punkt $\mathfrak{P}$ geht. Fällt die eine dieser Geraden, $\mathfrak{N}$, mit der gemeinschaftlichen Normale der beiden Polbahnen zusammen, so steht die Collineationsaxe senkrecht auf der andern Geraden $\mathfrak{M}$. Hierauf gründet sich eine einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte von Rouletten.

Sind M und μ die zum Pol gehörigen Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen (und zwar M für die bewegliche Linie), ist also $M\mu$ die gemeinschaftliche Normale dieser Curven, so findet man den Krümmungsmittelpunkt m, welcher zu dem von irgend einem Punkte P der beweglichen Ebene augenblicklich beschriebenen Bogenelement gehört, in folgender Weise:

7) Man verbinde P mit M, verlängere die Verbindungslinie bis zum Durchschnitte T mit einer auf $\mathfrak{P}P$ in $\mathfrak{P}$ errichteten Senkrechten, so schneidet die Linie μT die Gerade $\mathfrak{P}P$ oder deren Verlängerung in dem gesuchten Punkte m.

8) Der geometrische Ort aller der Punkte des beweglichen Systems, für welche die Krümmungsradien ihrer Bahnen zugleich unendlich gross werden, welche also in einem Moment sämmtlich die Wendepunkte ihrer Bahnen passiren, ist ein Kreis, welcher die Polbahnen im momentanen Pol berührt. Dieser Kreis heisst der Wendekreis.

Der Kreis liegt auf derjenigen Seite der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen, zu welcher man gelangt, wenn man die Richtung dieser Tangente, nach welcher sich der Pol fortbewegt, im Sinne der wirklich stattfindenden Drehung des Systems um 270° dreht.

Die Lage irgend eines beschreibenden Punktes in Bezug auf den Kreis giebt in einfacher Weise Auskunft über Concavität und Convexität des beschriebenen Curvenelements.

Der Durchmesser d des Wendekreises ergiebt sich aus der Gleichung

9) $$\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\sin\alpha=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}.$$

Der Endpunkt O des auf der gemeinschaftlichen Normale der Polbahnen liegenden *Durchmessers* $\mathfrak{P}O=d$ heisst der Wendepol. Mit Hilfe

dieses gewöhnlich leicht bestimmbaren Punktes können die Krümmungsmittelpunkte einer Roulette unter Berücksichtigung von 6) durch folgende einfache Construction, bei welcher die Bezeichnung aus 7) benützt ist, gefunden werden:

10) **Man verbinde den beschreibenden Punkt P mit dem Wendepol O und lege durch den Punkt J, in welchem diese Verbindungslinie die im Pole $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}P$ errichtete Senkrechte schneidet, eine Parallele zur gemeinschaftlichen Normale $\mathfrak{P}O$ der Polbahn; diese Parallele schneidet $P\mathfrak{P}$ im Krümmungsmittelpunkte m.**

11) **Wenn ein Punkt des beweglichen Systems eine Gerade beschreibt, so geht diese durch den Wendepol.**

Es sei eine beliebige Curve gegeben, welche von den Strahlen, die von einem festen Punkte P ausgehen, getroffen wird. Irgend ein Strahl treffe einen Punkt $\mathfrak{P}$ dieser Curve; die Länge des Einfallsstrahles $P\mathfrak{P}$ sei gleich r. Zeichnet man eine zweite Curve, welche symmetrisch zur gegebenen in Bezug auf die Tangente im Punkte $\mathfrak{P}$ derselben liegt (also das Spiegelbild der Curve in Bezug auf diese Tangente), und bestimmt man den zu P symmetrisch gelegenen Punkt P_1 in der zweiten Curve, so bilden $P\mathfrak{P}$ und $P_1\mathfrak{P}$ mit der Tangente gleiche Winkel; die Verlängerung von $P_1\mathfrak{P}$ ist demnach der reflectirte Strahl (vergl. Taf. I, Fig. 3). Lässt man die zweite Curve auf der gegebenen abrollen, so durchwandert der Einfallspunkt $\mathfrak{P}$ die letztere und ist stets der momentane Pol für die Bewegung. Der Punkt P_1 bleibt dabei immer in symmetrischer Lage zu P in Bezug auf die augenblickliche Tangente beider Curven; die Linien $P_1\mathfrak{P}$ sind nach 2) stets die Normalen der vom Punkte P_1 beschriebenen Roulette; die Verlängerungen dieser Linien, d. h. die reflectirten Strahlen, umhüllen demnach die Evolute dieser Roulette. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich der folgende Hauptsatz:

12) **Die zu einem gegebenen strahlenden Punkte P gehörige kaustische Linie einer Curve ist die Evolute derjenigen Roulette, welche ein Punkt P_1 beschreibt, der mit einer zweiten, der gegebenen congruenten Curve in symmetrischer Lage zu dem strahlenden Punkte P fest verbunden ist, während diese zweite auf der gegebenen so abrollt, dass sich beide Curven stets in entsprechenden Punkten berühren.***

Mit Hilfe dieses Satzes sind im Folgenden die kaustischen Linien für den Kreis, für die Parabel und die Ellipse behandelt. Damit sind zugleich die wichtigsten Bestimmungen der zugehörigen Rouletten und, infolge des Zusammenhanges zwischen diesen und den Fusspunkt-

---

* *Salmon, Higher plane curves 1852 No. 123.* Grosse, Dissertation 1872.

curven, auch die Untersuchungen der letzteren ausgeführt. Der Vollständigkeit wegen sind einige Sätze über den Kreis, die Parabel und die Ellipse, welche schon bei anderen kinematischen Entwickelungen benutzt wurden, hier auch wieder begründet worden.

Die Eigenschaften der Brennlinien des Kreises sind zum grösseren Theile schon auf anderem Wege gefunden; es soll für dieselben hier hauptsächlich die Anwendung der gewählten Methode der Ableitung ihrer Eigenschaften gezeigt werden. Die Resultate ergeben sich dabei ohne weitläufige Rechnung.

Die Eigenschaften der kaustischen Linien der Parabel und der Ellipse sind dagegen in dem hier gegebenen Umfange meines Wissens noch nicht gefunden worden.

I. Die kaustischen Linien des Kreises.

Die Brennlinie des Kreises ist nach 12) die Evolute der Roulette, welche ein Punkt P_1 erzeugt, der mit einem, dem gegebenen gleichen, auf diesen abrollenden Kreise in symmetrischer Lage zu dem strahlenden Punkte P verbunden ist.

A. Der strahlende Punkt P liegt auf der Peripherie des reflectirenden Kreises.

In diesem Falle liegt der symmetrisch zu P gelegene Punkt P_1 auf dem Umfange des beweglichen Kreises und erzeugt demnach beim Abrollen desselben eine Epicycloide, hier speciell eine Cardioide; die Evolute dieser Curve ist die gesuchte kaustische Linie. Die Evolute jeder Epicycloide ist eine ihr ähnliche Epicycloide in umgekehrter Lage; der Radius des Grundkreises der Evolvente ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius des Grundkreises der Evolute und der Summe aus dem Radius des Grundkreises der Evolvente und dem Durchmesser des zugehörigen Wälzungskreises. Für die Cardioide, bei welcher Grundkreis und Wälzungskreis einander gleich sind, müssen demnach diese Kreise dreimal so gross, wie die entsprechenden Kreise der Evolute sein. Aus dieser Betrachtung folgt der bekannte Satz:

13) Die kaustische Linie eines Kreises für einen strahlenden Punkt in der Peripherie desselben ist eine Cardioide, deren Grundkreis zu dem gegebenen Kreise concentrisch liegt und ein Drittel des Durchmessers des letztern zum Durchmesser hat.

B. Der strahlende Punkt P liegt innerhalb des Kreises; seine Entfernung vom Mittelpunkt sei gleich z.

Der symmetrisch zu P gelegene Punkt P_1 des rollenden Kreises erzeugt in *diesem Falle stets* eine verkürzte Epicycloide (Epi-

trochoide). Die kaustische Linie ist die Evolute dieser Curve, also der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte derselben. Mit Hilfe der allgemeinen Construction 7) der Krümmungsmittelpunkte einer Roulette lassen sich deshalb die einzelnen Punkte der Brennlinien leicht construiren: Man ziehe von dem strahlenden Punkte P aus irgend einen Strahl $P\mathfrak{P}$ und zeichne den reflectirten Strahl; ferner bestimme man den Mittelpunkt M_1 des rollenden Kreises für diejenige Lage, in welcher derselbe den gegebenen Kreis im Punkte $\mathfrak{P}$ berührt, mache also $M\mathfrak{P} = \mathfrak{P}M_1$ und verlängere den reflectirten Strahl rückwärts um das Stück $P\mathfrak{P} = r$, so ist der Endpunkt $\mathfrak{P}_1$ die augenblickliche Lage des zu P symmetrisch gelegenen Punktes, also ein Punkt der Roulette. Errichtet man nun in $\mathfrak{P}$ eine Senkrechte zum reflectirten Strahl und verlängert P_1M_1 bis zum Durchschnitt Q mit dieser Senkrechten, so ist der Durchschnittspunkt der Linie MQ mit dem reflectirten Strahle ein Krümmungsmittelpunkt m_1 der Roulette, also auch ein Punkt der kaustischen Linie. In dieser Weise kann man beliebig viele Punkte derselben bestimmen.

Mit Hilfe des momentanen Wendepols können die einzelnen Punkte der Brennlinie bedeutend einfacher construirt werden. [Siehe unten 27).]

Auf Grund einer Untersuchung der Roulette lassen sich leicht die wichtigsten Eigenschaften der Brennlinie bestimmen. Der beschreibende Punkt P_1 durchläuft bei dem Abrollen des beweglichen Kreises einen Wendepunkt der Roulette, sobald er in den augenblicklichen Wendekreis eintritt; der Krümmungsmittelpunkt, welcher einem Wendepunkte der Curve entspricht, liegt in unendlicher Entfernung, d. h.: Zu einem Wendepunkte der Roulette gehört eine Asymptote der kaustischen Linie; die Bestimmung der Asymptoten fällt zusammen mit der Ermittelung der Wendepunkte der Roulette. Nach Satz 9) ist der Durchmesser des Wendekreises bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}.$$

Da hier die Polbahnen gleiche Kreise vom Radius ϱ sind, so ist der Durchmesser des Wendekreises

14) $$d = \frac{\varrho}{2},$$

d. h. der Durchmesser dieses Kreises ist constant gleich dem halben Radius des gegebenen Kreises. Der Wendekreis muss den gegebenen stets im augenblicklichen Drehpunkt $\mathfrak{P}$ berühren; er ist deshalb leicht zu construiren.

Der beschreibende Punkt P_1 kann nur dann bei seiner Bewegung in den Wendekreis eintreten, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkte M_1 des rollenden Kreises grösser ist als $\varrho - d$, also grösser als $\frac{\varrho}{2}$. Die erwähnte Entfernung ist aber gleich der Entfernung des strahlenden

Punktes P vom Mittelpunkt des reflectirenden Kreises. Das Auftreten von Wendepunkten bei der Roulette, also auch von Asymptoten bei der Evolute, ist demnach abhängig von der Grösse der Entfernung z. Hieraus folgt:

15) Wenn die Entfernung des strahlenden Punktes vom Mittelpunkt des reflectirenden Kreises kleiner als der halbe Radius ist, so ist die kaustische Linie eine geschlossene Curve; wenn dagegen diese Entfernung grösser als der halbe Radius ist, so hat die kaustische Linie zwei Asymptoten.

Bestimmung der Asymptoten. Es sei in Fig. 1 P_0 diejenige Lage des beschreibenden Punktes, in welcher derselbe auf dem Wendekreise liegt. Die Entfernung des Punktes P_0 vom augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}_0$ sei gleich r_0, so muss r_0 auch die Länge desjenigen von P ausgehenden Strahles sein, dessen reflectirter Strahl eine Asymptote der Brennlinie ist. Zur Bestimmung von r_0 dient das Dreieck $\mathfrak{P}_0 P_0 M_0$, in welchem $P_0 O$ die Mittellinie ist. Man findet

$$r_0^2 + z^2 = 2(P_0 O)^2 + \frac{\varrho^2}{2},$$

und da $(P_0 O)^2 = \frac{\varrho^2}{4} - r_0^2$ ist, so folgt

$$r_0 = \sqrt{\frac{\varrho^2 - z^2}{3}}.$$

Hieraus liesse sich r_0 berechnen und damit die Asymptote construiren. Unter Berücksichtigung der symmetrischen Lage von P_1 und P in den beiden Kreisen kann man den Wendekreis in den gegebenen Kreis übertragen (Fig. 1) und man findet leicht folgende, ohne jede Berechnung ausführbare Construction der Asymptoten:

16) Man zeichne einen Kreis, dessen Durchmesser gleich dem halben Radius des gegebenen Kreises ist, so, dass dieser Hilfskreis den gegebenen im Endpunkte desjenigen Radius, auf welchem der strahlende Punkt P liegt, berührt. Ferner lege man durch P einen Kreis, concentrisch mit dem gegebenen; verbindet man den Mittelpunkt des letzteren mit den Schnittpunkten der beiden Hilfskreise, und treffen diese Verbindungslinien den gegebenen Kreis in zwei Punkten $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}'_0$, so sind die von diesen Punkten aus reflectirten Strahlen die Asymptoten der kaustischen Linie.

Aus dieser Construction folgt, dass es auf jedem Radius zwei bestimmte Punkte P und U giebt (Fig. 1), für welche die zu den Asymptoten gehörigen Einfallspunkte dieselben Punkte sind; nämlich solche Punkte P und U, deren entsprechende p und u auf demselben Radius $M\mathfrak{P}_0$ liegen. Da nun

men und die Krümmungsmittelpunkte liegen auf demselben. Durch den Werth $r = \sqrt{\varrho^2 - z^2}$ sind zwei Strahlen zu beiden Seiten dieses Durchmessers bestimmt.

Einem jeden solchen Maximum oder Minimum der Krümmung der Roulette muss ein Rückkehrpunkt der Evolute entsprechen; es folgt hieraus der Satz:

22) Die kaustische Linie des Kreises hat vier Rückkehrpunkte, von denen zwei in dem durch den strahlenden Punkt gehenden Durchmesser oder dessen Verlängerung, die beiden anderen symmetrisch zu beiden Seiten desselben liegen.

α) Rückkehrpunkt für den Einfallsstrahl von der Länge $r = \varrho - z$.

Da dieser Strahl mit der Tangente im Einfallspunkte einen rechten Winkel bildet, so erhält man für die Länge r_1 des reflectirten Strahles bis zum Berührungspunkte mit der kaustischen Linie nach dem Savary-schen Satze 5) die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho - z} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{\varrho},$$

d. h. ϱ ist das harmonische Mittel zwischen $\varrho - z$ und r_1, oder:

23) Der erste Rückkehrpunkt der Brennlinie und der strahlende Punkt P theilen denjenigen Radius, auf welchem P liegt, harmonisch.

Rückt P in die Mitte des Radius, so liegt der Rückkehrpunkt im Unendlichen. Die auf einem Radius gelegenen strahlenden Punkte bilden mit den zugehörigen ersten Rückkehrpunkten eine involutorische Punktreihe.

β) Rückkehrpunkt für den Einfallsstrahl von der Länge $r = \varrho + z$.

Wird die Länge des reflectirten Strahles bis zu diesem Rückkehrpunkte mit r_2 bezeichnet, so ergiebt der Savary'sche Satz

$$\frac{1}{\varrho + z} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\varrho},$$

d. h.:

24) Der zweite Rückkehrpunkt der Brennlinie und der strahlende Punkt P theilen den Radius, dessen Rückverlängerung durch P geht, harmonisch.

γ) Die Rückkehrpunkte für die Einfallsstrahlen von der Länge $r = \sqrt{\varrho^2 - z^2}$.

Aus dem Werthe für r ist ersichtlich, dass derjenige Strahl, dessen reflectirter Strahl durch einen dieser beiden Rückkehrpunkte geht, senkrecht zu dem durch P gehenden Radius stehen muss. Die Länge r_3 des reflectirten Strahles bis zum Rückkehrpunkte ist in diesem Falle nach 20)

25) $$r_3 = \frac{r(\varrho^2 - z^2 + \varrho^2 - z^2)}{3(\varrho^2 - z^2) - \varrho^2 + z^2} = r,$$

also gleich der Länge des Einfallsstrahles.

Hiernach sind die beiden, symmetrisch zum Durchmesser MP gelegenen Rückkehrpunkte und die zugehörigen Rückkehrtangenten der kaustischen Linie sehr leicht zu construiren.

Lässt man den strahlenden Punkt allmälig auf demselben Radius fortrücken, so durchlaufen die beiden erwähnten Rückkehrpunkte eine cardioidenartig gekrümmte Curve, deren Gleichung in Polarcoordinaten $r = \varrho \cos \frac{\varphi}{2}$ ist, wenn man den Kreismittelpunkt zum Pol und den durch P gehenden Durchmesser zur Axe nimmt. In Fig. 2 ist diese Curve punktirt gezeichnet.

Von dem unter β) bestimmten Rückkehrpunkte aus geht die kaustische Linie in zwei symmetrisch liegenden Zweigen bis zu den unter γ) bestimmten Punkten. Diese Zweige sind nach der Seite hin, auf welcher der strahlende Punkt liegt, concav gekrümmt. Die Scheitel dieser Zweige werden durch diejenigen Tangenten berührt, welche auf dem durch P gehenden Durchmesser senkrecht stehen. Wird die Entfernung der senkrecht gegen diesen Durchmesser reflectirten Strahles vom Mittelpunkte des Kreises mit f bezeichnet und ist δ der Winkel dieses Strahles mit dem zugehörigen Einfallsloth, so findet man aus der Betrachtung des von dem erwähnten Strahle und von dem zugehörigen Einfallsstrahle gebildeten rechtwinkligen Dreiecks

$$\sin \delta = \frac{1}{4z}(\sqrt{\varrho^2 + 8z^2} - \varrho)$$

und

26) $$f = \varrho \sin \delta = \frac{\varrho}{4z}(\sqrt{\varrho^2 + 8z^2} - \varrho)$$

als Entfernung der Scheiteltangente vom Mittelpunkte des Kreises.

Mit Hilfe des allgemeinen Satzes 7) können die Scheitelpunkte der Curve construirt werden. Bei der Benutzung des oben [14)] bestimmten Wendepols kann die allgemeine Construction von Punkten der Brennlinie noch bedeutend vereinfacht werden [10)]. Da die beiden Kreise (Polbahnen) stets symmetrisch zur augenblicklichen gemeinschaftlichen Tangente liegen, so lässt sich die nothwendige Zeichnung zum Theil symmetrisch übertragen und ganz ohne Benutzung des rollenden Kreises ausführen. Es ergiebt sich folgende einfache Constructionsregel:

27) Man errichte im Einfallspunkte $\mathfrak{P}$ eine Senkrechte zum Einfallsstrahl $P\mathfrak{P}$ und lege eine Gerade durch den strahlenden Punkt P und durch den Mittelpunkt des zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Radius $M\mathfrak{P}$. *Eine durch* den Schnittpunkt dieser beiden

Geraden parallel zu $M\mathfrak{P}$ gezogene Linie schneidet den von $\mathfrak{P}$ aus reflectirten Strahl im Berührungspunkte mit der kaustischen Linie.

In Fig. 2 sind die kaustischen Linien des Kreises für fünf wesentlich verschiedene Lagen des strahlenden Punktes dargestellt. Zu den strahlenden Punkten I, II bis V gehören die Brennlinien, deren Theile entsprechend mit 1, 2 bis 5 bezeichnet sind. Die Rückkehrpunkte erster Art [23)] sind mit α, die der zweiten Art [24)] mit β und die der dritten Art, welche doppelt vorkommen, mit γ benannt. Die punktirte Curve ist der geometrische Ort der Rückkehrpunkte dritter Art [25)]. T_1, T_2 ... sind die durch 26) bestimmten Scheiteltangenten, L_1, L_2 ... die Rückkehrtangenten in den Punkten γ.

Liegt der strahlende Punkt zwischen A und II, so hat die kaustische Linie zwei Asymptoten; zum Punkte I gehören die beiden mit 1 bezeichneten Asymptoten, welche den Kreis in a und b schneiden. Diejenigen unter den von I ausgehenden Strahlen, welche den kleineren Kreisbogen zwischen a und b treffen, divergiren nach der Reflexion auf der Innenseite des Kreises; die Rückverlängerungen der reflectirten Strahlen umhüllen dagegen den ausserhalb des Kreises liegenden, mit 1^a bezeichneten Theil der Brennlinie, also den subjectiven Theil derselben. Der die auffallenden Strahlen zerstreuende Kreisbogen ab erreicht nach 17) ein Maximum, wenn die Entfernung des strahlenden Punktes vom Kreismittelpunkte $= \frac{\varrho}{2}\sqrt{2}$ wird; es ist dies die in der Figur mit I bezeichnete Lage. Die Rückkehrpunkte γ liegen in diesem Falle auf dem zu MI senkrechten Durchmesser in der Entfernung $\frac{\varrho}{2}\sqrt{2}$ vom Mittelpunkte, nach 25).

Bei der Brennlinie II fallen die beiden Asymptoten mit dem Durchmesser AB zusammen, weil der Punkt II in der Mitte von AM liegt [16)]; der Rückkehrpunkt α liegt im Unendlichen; die drei anderen Rückkehrpunkte liegen, wie leicht ersichtlich, in einer geraden Linie.

Für den strahlenden Punkt III ist die Entfernung MIII gleich $\frac{\varrho}{4}$; die zugehörige kaustische Linie ist die kleine geschlossene Curve 3, welche, wenn der strahlende Punkt weiter gegen M vorrückt, sich schliesslich auf einen mit M zusammenfallenden Punkt reducirt.

Für den strahlenden Punkt IV ist nur die untere Hälfte 4 der Brennlinie gezeichnet; dieselbe ist hier nach 13) eine Cardioide.

Liegt endlich der strahlende Punkt ausserhalb des Kreises, wie der Punkt V in der Figur, so bleiben die entwickelten Formeln sämmtlich giltig. Die Rückkehrpunkte dritter Art werden imaginär; die *kaustische Linie 5 berührt* den Kreis in den Punkten D und E, nämlich

in den Berührungspunkten der von V aus an denselben gelegten Tangenten. Zu dem zwischen D und E liegenden kleinen Bogenstück des reflectirenden Kreises gehört der zunächstliegende, subjective Theil der Curve. Die Brennlinie, von der nur die obere Hälfte gezeichnet ist, hat vier Scheitel und demgemäss zwei Scheiteltangenten T_5, deren Entfernungen f vom Mittelpunkte M bestimmt sind nach 26) durch

$$f=\frac{\varrho}{4z}(\pm\sqrt{\varrho^2+8z^2}-\varrho).$$

Rectification. Die kaustische Linie ist die Evolute einer Roulette, deren Krümmungsradien durch 19) vollkommen bestimmt wurden. Die Länge irgend eines Bogenstückes der Evolute ist gleich der Differenz der zu den Endpunkten gehörigen Krümmungsradien der Evolvente, vorausgesetzt, dass innerhalb des betrachteten Stückes kein Rückkehrpunkt oder unendlich ferner Punkt liegt. Hiernach ist die Länge s des Bogens der Brennlinie, welcher durch den Rückkehrpunkt, der in der Verlängerung des durch den strahlenden Punkt gehenden Radius liegt und durch einen der beiden, symmetrisch zu diesem Radius liegenden Rückkehrpunkte begrenzt wird,

28) $$s=\frac{2(\varrho+z)^2}{\varrho+2z}-2\sqrt{\varrho^2-z^2}.$$

Ist die kaustische Linie eine geschlossene Curve, ist also z kleiner als $\frac{\varrho}{2}$, so erhält man aus den Krümmungsradien, welche zu den Rückkehrpunkten gehören, den Umfang u der ganzen Curve:

$$u=8\left[\varrho\frac{\varrho^2-3z^2}{\varrho^2-4z^2}-\sqrt{\varrho^2-z^2}\right].$$

Der Umfang der oben betrachteten Cardioide ergiebt sich als specieller Fall für $z=\varrho$

$$U=\tfrac{16}{3}\varrho.$$

II. Die kaustischen Linien der Parabel.

Der strahlende Punkt P liege auf der Axe in der Entfernung z vom Scheitel der Parabel.

Nach Satz 12) ist die kaustische Linie die Evolute der Roulette, welche ein Punkt P_1 beschreibt, der mit einer zweiten, der gegebenen congruenten Parabel in symmetrischer Lage zu dem strahlenden Punkte P fest verbunden ist, während diese auf der gegebenen so abrollt, dass sich beide Parabeln stets in entsprechenden Punkten berühren.

In Fig. 3 sei C die gegebene, C_1 die darauf abrollende Parabel, $\mathfrak{P}$ der augenblickliche Berührungspunkt (Pol). Da die beiden Curven stets symmetrisch zur gemeinschaftlichen Tangente liegen, so müssen sich die beiden Axen in *einem Punkte B* dieser Tangente schneiden. Der dem

Brennpunkte F entsprechende Brennpunkt der rollenden Parabel befinde sich augenblicklich in F_1, so folgt aus der symmetrischen Lage, dass $\mathfrak{P}F_1$ gleich $\mathfrak{P}F$ ist, und ferner die Gleichheit der Winkel $B\mathfrak{P}F_1$ und $B\mathfrak{P}F$, d. h.:

29) Der Brennpunkt der beweglichen Parabel beschreibt eine gerade Linie, nämlich die Leitlinie der festen Parabel.

Da F_1 eine Gerade durchläuft, so muss F_1 jedesmal auf dem entsprechenden Wendekreise liegen. Da ferner der Mittelpunkt dieses Kreises stets auf der gemeinschaftlichen Normale der Polbahnen liegt, so muss nach Satz 11) der Durchschnittspunkt dieser Normale und der Leitlinie der festen Parabel der augenblickliche Wendepol O sein; das Stück $\mathfrak{P}O$ der Normale ist demnach der Durchmesser d des momentanen Wendekreises. Aus der allgemeinen Gleichung 9) folgt hier sofort

$$\varrho = 2d.$$

30) Der Durchmesser des Wendekreises ist gleich dem halben Krümmungsradius der Parabel, welcher zu dem gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{P}$ gehört. (Hieraus folgt u. A. die bekannte einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte für die Parabel.)

Zeichnet man in der festen Parabel den zum Wendekreis symmetrisch liegenden Kreis K (den sogenannten Wendekreis der umgekehrten Bewegung), und nimmt man irgend einen Punkt X in der Peripherie dieses Kreises als strahlenden Punkt an, so befindet sich der symmetrisch gelegene Punkt X_1 gerade auf dem Wendekreise und die von X_1 beschriebene Roulette hat demnach an der Stelle, an welcher sich X_1 augenblicklich befindet, einen Wendepunkt; der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, also ein Punkt der zu X gehörigen kaustischen Linie, liegt in unendlicher Entfernung. Hieraus folgt der Satz:

Die reflectirten Strahlen der von den Punkten eines Kreises, welcher die Parabel in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von innen berührt und den halben, zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Krümmungsradius der Parabel zum Durchmesser hat, ausgehenden und den Einfallspunkt $\mathfrak{P}$ treffenden Strahlen sind Asymptoten der zu den entsprechenden strahlenden Punkten gehörigen kaustischen Linien.

Es sei P (Fig. 3) derjenige Punkt der Parabelaxe, in welchem der erwähnte Kreis dieselbe, ausser in F, schneidet, so kann eine Asymptote der zu P gehörigen Brennlinie leicht bestimmt werden. Aus der Betrachtung des Hilfskreises folgt, dass Winkel $\mathfrak{P}PF$ gleich Winkel $B\mathfrak{P}F_1$ also auch gleich Winkel $\mathfrak{P}BF$ ist; demnach ist die Tangente $\mathfrak{P}B$ gleich dem Einfallsloth $P\mathfrak{P}$. Bezeichnet man die Abscisse des Einfallspunktes $\mathfrak{P}$, also die Strecke SE, mit x_0 und die Entfernung des strahlenden Punktes vom Scheitel mit z; berücksichtigt man ferner, dass die Subtangente durch den Scheitel S halbirt wird, so folgt aus der Gleichheit von BE

und PE

$$x_0 = \frac{z}{3}.$$

31) **Die Abscisse des Parabelpunktes, aus welchem der von einem strahlenden Punkte P der Parabelaxe einfallende Strahl als Asymptote der zu P gehörigen kaustischen Linie reflectirt wird, ist gleich einem Drittel des Abstandes des Punktes P vom Scheitel S der Parabel.**

Da der strahlende Punkt in der Axe liegt, so muss die Brennlinie symmetrisch zur Axe liegen; dieselbe hat also auch zwei symmetrisch liegende Asymptoten.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Normale und der Axe mit N (Fig. 3) und den Durchschnittspunkt der Asymptote mit der Axe mit A, so sind P, N, A und B stets vier harmonische Punkte. A kann unter Anwendung des Vorstehenden leicht für jede Lage des strahlenden Punktes construirt werden. Zur Bestimmung des Winkels φ, welchen der zur Asymptote gehörige Einfallsstrahl mit der Axe bildet, hat man aus dem Dreieck $P\mathfrak{P}E$ sofort

$$tg\,\varphi = \frac{y_0}{z - x_0} = \sqrt{\frac{3p}{2z}}.$$

Die Länge des zu einer Asymptote gehörigen Einfallsstrahles ist

$$r_0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{2z(3p + 2z)}$$

und der zugehörige Radius vector

$$v_0 = \frac{3p + 2z}{6}.$$

Der Abstand des Punktes A, in welchem die Asymptoten die Parabelaxe schneiden, vom Scheitel S ergiebt sich aus der Betrachtung der harmonischen Punkte $P\,N\,A\,B$

32) $$SA = \frac{z(15p + 2z)}{9(2z - p)}.$$

$\Big($Für $z = \frac{p}{2}$ ist demnach die Asymptote parallel mit der Axe; in diesem Falle ist F der strahlende Punkt und die reflectirten Strahlen sind sämmtlich parallel.$\Big)$ Wird der Winkel, den eine Asymptote mit der positiven Richtung der Parabelaxe bildet, mit λ bezeichnet, so findet man aus der Figur leicht

33) $$tg\,\lambda = \frac{\sqrt{2p\,x_0}}{x_0 - SA} = \frac{3(2z - p)}{2z(2z - 9p)}\sqrt{6pz}.$$

Die Asymptote steht senkrecht zur Axe, wenn $2z - 9p$ gleich 0, oder wenn z gleich $4{,}5\,p$ ist. Die beiden Asymptoten fallen dann zusammen zu einer Geraden.

Die einzelnen Punkte der kaustischen Linie lassen sich mit Benutzung des momentanen Wendepols, also des Punktes O, in welchem die *gemeinschaftliche Normale* der beiden Parabeln die Leitlinie der

Wie schon oben erwähnt wurde, ist das Vorkommen einzelner Fälle abhängig von der Excentricität der Ellipse. Die Fälle III, IV und V sind immer möglich, selbst wenn $c = 0$, die Ellipse also in einen Kreis übergegangen ist; die Resultate stimmen dann mit den früher für den Kreis direct gefundenen überein. Ist $c > b$, so sind alle fünf Fälle möglich; ist $c = b$, so kann Fall I nicht vorkommen; ist $c < b$, so können die Fälle I und II nicht stattfinden. Es soll mit Rücksicht auf die verschiedenen Formen der Ellipse hier noch besonders folgender Fall erörtert werden:

58) Der strahlende Punkt liegt im Mittelpunkte der Ellipse; es ist also $z = 0$.

A. Es sei $c > b$. Die Brennlinie ist unter dieser Voraussetzung ein specieller Fall der unter Fall I betrachteten Curven. Die zur Bestimmung der Ausgangspunkte der Asymptoten dienende Gleichung 47) geht, wenn $z = 0$ gesetzt wird, über in die einfachere

$$x^2 = \frac{a^2(2c^2 - a^2)}{3c^2}, \text{ also ist } y^2 = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}.$$

Die beiden Werthe von x unterscheiden sich demnach hier nur durch die Vorzeichen, d. h. die vier Asymptoten liegen in diesem Falle auch zu je zweien symmetrisch zur kleinen Axe; ihre Schnittpunkte liegen also einerseits in der grossen und andererseits in der Verlängerung der kleinen Axe. Die Entfernungen der Schnittpunkte der Asymptoten mit der grossen Axe vom Mittelpunkte der Ellipse sind hier nach 56)

$$s_1 = \pm \frac{ac\sqrt{6c^2 - 3a^2}}{a^2 + c^2}$$

und die Entfernungen der Schnittpunkte mit der kleinen Axe vom Mittelpunkte sind

$$s_2 = \pm \frac{c\sqrt{3a^4 - 3c^4}}{2c^2 - a^2}.$$

Die Axen der Ellipse, resp. die Verlängerungen, sind zugleich Tangenten in den Rückkehrpunkten der Brennlinie. Zwei Rückkehrpunkte liegen innerhalb der Ellipse auf der grossen Axe; ihre Entfernungen von den Scheiteln sind nach 54)

$$p = q = \frac{ab^2}{a^2 + c^2} = \frac{ab^2}{2a^2 - b^2}.$$

Die beiden anderen liegen ausserhalb der Ellipse in den Verlängerungen der kleinen Axe; denn ihre Entfernungen von den Endpunkten der letzteren sind nach 53)

$$r_0 = \frac{a^2 b}{a^2 - 2c^2},$$

also hier negativ. Die in den Entfernungen $\pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$ vom Mittelpunkt zur kleinen Axe parallel liegenden Geraden sind die Scheiteltan-

genten der Curve. [Siehe unten 59).] In Fig. 8 ist eine solche Brennlinie dargestellt und mit 1 bezeichnet; die Curve 1^a ist die zugehörige Roulette. Es ist $a = 2b$ angenommen, deshalb ist $r_0 = -a$.

B. Es sei $c = b$. Die Brennlinie ist bei dieser Annahme ein besonderer Fall der unter Fall II betrachteten Curven. Sie hat nur eine Asymptote, welche mit der kleinen Axe zusammenfällt. Die Rückkehrpunkte in der grossen Axe liegen wieder innerhalb der Ellipse und sind wie unter A bestimmbar; die beiden anderen Rückkehrpunkte auf der Verlängerung der kleinen Axe liegen in unendlicher Entfernung.

C. Es sei $c < b$. Unter dieser Voraussetzung tritt Fall III ein. Die Brennlinie, welche durch die vom Mittelpunkte ausgehenden Strahlen nach der Reflexion gebildet wird, hat keine Asymptoten; sie ist eine geschlossene, vollkommen objective Curve. Die vier Rückkehrpunkte sind durch 53) und 54) bestimmt; r_0 wird hier positiv, die entsprechenden Strecken sind also von den Endpunkten der kleinen Axe aus nach den Seiten hin abzutragen, auf welchen der Mittelpunkt der Ellipse liegt. Die kaustische Linie hat einige Aehnlichkeit mit der Evolute einer Ellipse. (Die zugehörige Roulette hat ungefähr die Form einer Ellipse.) Zwei Rückkehrpunkte liegen auch hier stets innerhalb der reflectirenden Curve auf der grossen Axe derselben; die beiden anderen liegen entweder innerhalb, auf oder ausserhalb der Ellipse, je nachdem $b \gtreqless \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist.

59) Die Tangenten in den Scheiteln der kaustischen Linie, d. h. in denjenigen Punkten, in welchen dieselbe, abgesehen von den Rückkehrpunkten, ein Maximum oder Minimum in Richtung der grossen Axe erreicht, müssen senkrecht zu dieser Axe stehen. Mit Berücksichtigung des harmonischen Vierstrahls, welcher durch einen senkrecht zur Axe reflectirten Strahl, durch den Einfallsstrahl und durch die Tangente und Normale im Einfallspunkte gebildet wird, erhält man leicht folgende Gleichung zur Bestimmung der Entfernung ξ einer solchen Scheiteltangente vom Mittelpunkte M:

$$(\xi^2 - a^2)(c^2\xi - a^2 z) + b^2\xi(a^2 - \xi z) = 0.$$

Liegt der strahlende Punkt im Mittelpunkte der Ellipse, ist also $z = 0$, so erhält man hieraus $\xi = \pm\frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$. Liegt der Punkt P im Scheitel der Ellipse, ist also $z = a$, so erhält man zwei brauchbare Werthe, nämlich $\xi_I = a$, d. h. die Brennlinie berührt die Ellipse im Punkte P und $\xi_{II} = \frac{a}{c^2}(b^2 - \sqrt{b^4 + a^2c^2})$.

60) Rectification. Die Länge eines Bogenstückes der kaustischen Linie ist gleich der Differenz aus den beiden, durch Gleichung 49) bestimmten Krümmungsradien der Roulette, welche zu den Endpunkten des zu messenden Bogens gehören; vorausgesetzt, dass innerhalb dieser

Strecke kein Rückkehrpunkt liegt. Setzt man nacheinander die Abscisse des Einfallspunktes gleich a und gleich $-a$, so erhält man die beiden Krümmungsradien R_1 und R_2, welche zu den in der grossen Axe liegenden Rückkehrpunkten der Brennlinie gehören:

$$R_1 = \frac{2a(a-z)^2}{a^2+c^2-2az} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{2a(a+z)^2}{a^2+c^2+2az}.$$

Setzt man andererseits $x = z$, so erhält man den Krümmungsradius R_3, welcher zu einem der beiden anderen Rückkehrpunkte gehört:

$$R_3 = \frac{2ab^3\sqrt{a^2-z^2}}{2a^2b^2-a^4+c^2z^2}.$$

Ist $z > \frac{a}{c}\sqrt{2c^2-a^2}$, so liegt zwischen einem auf der Axe befindlichen Rückkehrpunkte und je einem der beiden anderen Punkte ein endliches Bogenstück, dessen Länge gleich dem absoluten Werthe von $R_2 - R_3$ ist. Ist die kaustische Linie eine geschlossene Curve (Fall III), so ist der Umfang u derselben gleich dem absoluten Werthe von $4R_3 - 2R_1 - 2R_2$, also

$$\pm\frac{u}{8a} = \frac{b^3\sqrt{a^2-z^2}}{a^4-2a^2c^2+c^2z^2} - \frac{(a^2+z^2)(a^2+c^2)-4a^2z^2}{(a^2+c^2)^2-4a^2z^2}.$$

Liegt der strahlende Punkt im Scheitel der reflectirenden Ellipse, ist also $z = a$, so hat die zugehörige kaustische Linie hiernach den Umfang $\frac{16a^3}{3a^2+c^2}$.

II.

Ueber zwei einfache Methoden zur Auflösung numerischer Gleichungen.

Von

Dr. Arnold Giesen.

I. Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in eine unendliche Factorenfolge.

Bei den meisten Auflösungsmethoden algebraischer Gleichungen kommt es zunächst darauf an, durch Versuche die zwei unmittelbar aufeinander folgenden ganzen Zahlen zu finden, zwischen welchen die gesuchte Wurzel liegt. Um sich dann der Wurzel immer mehr zu nähern, bedient man sich der successiven Correctionen, wie bei der Newton-Fourier'schen Methode, oder man entwickelt den der nächstkleinern ganzen Zahl beizufügenden Bruch in Form eines Kettenbruches oder einer Theilbruchreihe u. s. w. Eine in der Analysis vielfach angewandte Form der Entwickelung, nämlich die eines Productes mit unendlich vielen Factoren, die sich der Einheit unbegrenzt nähern, scheint bisher zu diesem Zwecke noch nicht versucht worden zu sein. Wir wollen daher im Folgenden zeigen, wie auch in dieser Weise die Wurzeln einer algebraischen Gleichung sich verhältnissmässig leicht bestimmen lassen.

Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Der bestimmten Vorstellung wegen wollen wir annehmen, die zu bestimmende Wurzel derselben sei positiv und durch Versuche habe man gefunden, dass für eine gewisse Zahl α

$$f(\alpha) = \pm, \quad f(\alpha+1) = \mp,$$

also

$$\alpha < x < \alpha + 1$$

ist. Man setze nun

$$x = \alpha y_1,$$

wo y_1 nothwendig zwischen 1 und 2 liegt. Durch Substitution in die gegebene Gleichung erhält man die erste transformirte Gleichung

$$f_1(y_1) = a_0\alpha^n y_1^n + a_1\alpha^{n-1} y_1^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} y_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha y_1 + a_n = 0.$$

Substituirt man nun in $f_1(y_1)$ für y_1 der Reihe nach die Werthe

$$1,\quad 1{,}1,\quad 1{,}2,\quad 1{,}3,\ \ldots\ 1{,}9,\quad 2,$$

so muss die Function $f_1(y_1)$ in dieser Reihe wenigstens einmal das Zeichen wechseln. Einmal wird dieses der Fall sein, wenn zwischen α und 2α nur eine Wurzel der gegebenen Gleichung liegt; liegen dagegen zwischen diesen Grenzen mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung, so muss $f_1(y_1)$ bei Substitution der genannten Reihe von Werthen für y_1 mehrmals einen Zeichenwechsel aufweisen. Im letztern Falle wollen wir der Bestimmtheit wegen annehmen, man habe die α zunächstliegende Wurzel der gegebenen Gleichung zu finden. Durch die oben angegebenen Substitutionen findet man also immer für y_1 zwei Werthe $1+\frac{\beta}{10}$ und $1+\frac{\beta+1}{10}$ dergestalt, dass

$$f_1\left(1+\frac{\beta}{10}\right) = \pm,\quad f_1\left(1+\frac{\beta+1}{10}\right) = \mp,$$

also

$$1+\frac{\beta}{10} < y_1 < 1+\frac{\beta+1}{10}$$

ist. Im Falle, dass sich mehrere derartige Werthepaare finden, nehmen wir nach den obigen Festsetzungen das kleinste. Wir setzen dann weiter

$$y_1 = \left(1+\frac{\beta}{10}\right) y_2,$$

wo, für $\gamma < 10$, y_2 nothwendig die Form haben muss

$$y_2 = 1 + \frac{\gamma}{100} + \ldots$$

Denn wäre

$$y_2 = 1 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\gamma}{100} + \ldots,$$

so müsste

$$y_1 = 1 + \frac{\beta+\beta_1}{10} + \ldots$$

sein, was aber mit den obigen Annahmen unvereinbar ist. Wenn man nun den für y_1 angenommenen Ausdruck in die obige erste transformirte Gleichung einsetzt, so erhalten wir die zweite transformirte Gleichung

$$f_2(y_2) = a_0\alpha^n\left(1+\frac{\beta}{10}\right)^n y_2^n + a_1\alpha^{n-1}\left(1+\frac{\beta}{10}\right)^{n-1} y_2^{n-1}$$
$$+ a_2\alpha^{n-2}\left(1+\frac{\beta}{10}\right)^{n-2} y_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right) y_2 + a_n = 0.$$

Substituirt man nun für y_2 der Reihe nach die Werthe

$$1,\quad 1{,}01,\quad 1{,}02,\ \ldots\ 1{,}09,\quad 1{,}1,$$

so muss die Function $f_2(y_2)$ irgendwo in derselben einen Zeichenwechsel -rleiden (oder auch, im Falle die gegebene Gleichung nahe beisammen-

liegende Wurzeln hat, mehrere Zeichenwechsel, was wir nach dem Obigen nicht ferner zu berücksichtigen brauchen). Angenommen, man fände

$$f_2\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)=\pm, \quad f_2\left(1+\frac{\gamma+1}{100}\right)=\mp,$$

also

$$1+\frac{\gamma}{100}<y_2<1+\frac{\gamma+1}{100}.$$

Setzen wir dann weiter

$$y_2=\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)y_3,$$

wo y_3 nothwendig von der Form

$$1+\frac{\delta}{1000}+\cdots$$

ist, so erhalten wir durch Substitution in $f_2(y_2)=0$ die dritte transformirte Gleichung

$$f_3(y_3)=a_0\alpha^n\left(1+\frac{\beta}{10}\right)^n\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)^n y_3^n+a_1\alpha^{n-1}\left(1+\frac{\beta}{10}\right)^{n-1}\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)^{n-1}y_3^{n-1}$$
$$+\ldots+a_{n-1}\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right)\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)y_3+a_n=0.$$

Indem man für y_3 nachstehende Werthereihe substituirt:

1, 1,001, 1,002, ... 1,009, 1,01,

finde man etwa

$$f_3\left(1+\frac{\delta}{1000}\right)=\pm, \quad f_3\left(1+\frac{\delta+1}{1000}\right)=\mp,$$

also

$$1+\frac{\delta}{1000}<y_3<1+\frac{\delta+1}{1000}.$$

Man setze dann weiter

$$y_3=\left(1+\frac{\delta}{1000}\right)y_4,$$

wodurch man eine vierte transformirte Gleichung erhält u. s. w. Wie man so fortfahren kann, ist klar. Man erhält also durch successive Substitutionen

$$\begin{aligned}x&=\alpha y_1,\\ &=\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right)y_2\\ &=\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right)\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)y_3\\ &=\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right)\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)\left(1+\frac{\delta}{1000}\right)y_4 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Der letzte Coefficient der aufeinander folgenden transformirten Gleichungen bleibt stets ungeändert; die vorhergehenden nähern sich, wie aus dem Obigen hervorgeht, immer mehr bestimmten Grenzwerthen. Wenn dieselben bei der beabsichtigten Annäherung diese Grenzwerthe erreicht

haben, so muss die algebraische Summe aller Coefficienten der Null gleich sein, indem dann für die erstrebte Genauigkeit die eine Wurzel der letzten transformirten Gleichung sich nicht mehr von Eins unterscheidet. Man braucht aber die Rechnung nicht bis dahin fortzusetzen; wenn man bis zur m^{ten} transformirten Gleichung

$$f_m(y_m) = b_0 y_m^n + b_1 y_m^{n-1} + b_2 y_m^{n-2} + \dots + b_{n-1} y_m + b_n = 0$$

gekommen ist, in welcher y_m schon sehr nahe an 1 liegt, so setze man

$$y_m = 1 + z,$$

wo jetzt z ein sehr kleiner positiver echter Bruch ist. Vernachlässigt man dann alle höheren Potenzen von z, so kommt

$$z = -\frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n}{n b_0 + (n-1) b_1 + \dots + b_{n-1}}.$$

Die Coefficienten der transformirten Gleichungen sind, wie die Ansicht des Obigen lehrt, sämmtlich Producte, und zwar bilden sich die Coefficienten jeder folgenden transformirten Gleichung aus denen der vorhergehenden durch Hinzufügung eines neuen Factors, welcher Umstand, da man sich der logarithmischen Tafeln bedienen kann, die Berechnung sehr erleichtert. Da weiter für die höheren transformirten Gleichungen die hinzukommenden Factoren immer näher an Eins rücken, so wird die Bildung derselben immer leichter, je höher die Ordnungszahl derselben steigt, da man für grosse m einfach setzen kann

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{10^m}\right)^p = 1 + \frac{p\varepsilon}{10^m}.$$

Besonders erleichtert würde die Auflösung der algebraischen Gleichungen nach dieser Methode, wenn man sich ein- für allemal eine Tafel berechnete, welche bis zu einer bestimmten Grenze die Werthe der aufeinander folgenden Potenzen und deren Logarithmen von folgenden Zahlen enthielte:

1,1,	1,2,	1,3,	... 1,9,
1,01,	1,02,	1,03,	... 1,09,
1,001,	1,002,	1,003,	... 1,009,
1,0001,	1,0002,	1,0003,	... 1,0009 u. s. w.

Läge etwa bei der m^{ten} transformirten Gleichung der Werth von y_m zwischen 1 und $1 + \frac{1}{10^m}$, so würde man selbstverständlich sofort zur Substitution der folgenden Werthereihe:

$$1 + \frac{1}{10^{m+1}}, \quad 1 + \frac{2}{10^{m+1}}, \quad \dots \quad 1 + \frac{9}{10^{m+1}}$$

schreiten; der der m^{ten} Gleichung entsprechende Factor in der Entwickelung von x fiele dann aus.

Zahlenbeispiel. Wir wollen nach dem auseinandergesetzten Verfahren die folgende, oft als Beispiel benutzte Gleichung

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

behandeln. Dieselbe besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; erstere ist von Fourier nach seiner Methode bis zur 32. Decimale berechnet worden. Dieselbe liegt zwischen 2 und 3; wir setzen daher

$$x = 2y_1$$

und erhalten die erste transformirte Gleichung

1) $$f_1(y_1) = 8y_1^3 - 4y_1 - 5 = 0.$$

Wir finden nun

$$f_1(1) = -1, \quad f_1(1,1) = +1,248.$$

Hieraus geht hervor, dass y_1 gar keine Zehntel enthalten kann; wir substituiren daher sogleich für y_1 die Werthereihe von 1,01 bis 1,09. Dadurch findet sich

$$f_1(1,04) = -0,161088, \quad f_1(1,05) = +0,0610.$$

Demgemäss setzen wir

$$y_1 = 1,04 y_2$$

und erhalten die zweite transformirte Gleichung

2) $$f_2(y_2) = 8,998912 y_2^3 - 4,16 y_2 - 5 = 0.$$

Wir setzen hier für y_2 die Werthe von 1,001 bis 1,009. Dadurch finden wir

$$f_2(1,006) = -0,02314, \quad f_2(1,007) = +0,00004,$$

weswegen wir zur Bildung der dritten transformirten Gleichung die Substitution machen

$$y_2 = 1,006 y_3.$$

Dadurch nimmt diese folgende Gestalt an:

3) $$f_3(y_3) = 9,161866 y_3^3 - 4,18496 y_3 - 5 = 0.$$

Indem wir für y_3 die Reihe 1,0001 bis 1,0009 (oder 1,001) substituiren, finden wir

$$f_3(1,0009) = -0,002100, \quad f_3(1,001) = +0,000234.$$

Somit ist ferner zu setzen

$$y_3 = 1,0009 y_4$$

und wir gelangen zu der folgenden vierten transformirten Gleichung

4) $$f_4(y_4) = 9,186626 y_4^3 - 4,188726 y_4 - 5 = 0.$$

Da y_4 schon sehr nahe an 1 liegt, so brechen wir hier die Rechnung in der vorigen Weise ab und substituiren für y_4 den Ausdruck $1 + z$; dann kommt näherungsweise

$$z = \frac{0,002100}{23,371152} = 0,00008985.$$

Somit haben wir für die gesuchte reelle Wurzel der gegebenen Gleichung ung die folgende Factorenfolge:

$$x = 2 . 1,04 . 1,006 . 1,0009 . 1,00008985;$$

bei wirklicher Ausrechnung finden wir

$$x = 2{,}094551,$$

was mit dem von Fourier gefundenen Werthe bis zur sechsten Decimale inclusive übereinstimmt.

II. Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen numerischen Gleichung in eine Kettenreihe.

Unter einer Kettenreihe verstehen wir einen Ausdruck von folgender Form:

$$a + \frac{b}{B} + \frac{c}{B^2} + \frac{d}{B^3} + \frac{e}{B^4} + \ldots,$$

wo a, b, c, d, e, ... B beliebige ganze positive Zahlen sind. Setzt man die Zahl B, die wir als die Basis der Kettenreihe bezeichnen wollen, gleich 10, so verwandelt der Ausdruck sich in einen gewöhnlichen Decimalbruch. Wir wollen nun sehen, wie man die reellen Wurzeln einer Gleichung in eine Kettenreihe mit beliebig gewählter Basis entwickeln kann. Die gegebene Gleichung sei wieder

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Die zu suchende Wurzel wollen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, immer als positiv annehmen. Man habe nun wieder durch Versuche gefunden, dass eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen α und $\alpha + 1$ liege; wir setzen dann

$$x = \alpha + \frac{y_1}{B},$$

unter B die beliebig angenommene Basis der zu entwickelnden Kettenreihe verstanden, wo also y_1 nothwendig kleiner als B sein muss. Setzt man diesen Ausdruck in die gegebene Gleichung und entwickelt die Function derselben nach der Taylor'schen Formel, so kommt

$$f(\alpha) + f'(\alpha)\cdot\frac{y_1}{B} + \frac{1}{2!}f''(\alpha)\cdot\frac{y_1^2}{B^2} + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)\cdot\frac{y_1^3}{B^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(\alpha)\cdot\frac{y_1^{n-1}}{B^{n-1}} + \frac{1}{n!}f^n(\alpha)\cdot\frac{y_1^n}{B^n} = 0,$$

wofür wir auch schreiben können

$$f_1(y_1) = \frac{1}{n!}f^n(\alpha)\cdot y_1^n + \frac{B}{(n-1)!}f^{n-1}(\alpha)\cdot y_1^{n-1} + \frac{B^2}{(n-2)!}f^{n-2}(\alpha)\cdot y_1^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + B^{n-1}f'(\alpha)\cdot y_1 + B^n f(\alpha) = 0.$$

Dies ist die erste transformirte Gleichung, welche zur Bestimmung von y_1 dient. Wir substituiren in dieselbe die Werthereihe 1, 2, ... bis B. Die Function $f_1(y_1)$ muss zwischen diesen Grenzen einen Zeichenwechsel erleiden; wenn im Falle nahe beisammenliegender Wurzeln der gegebenen Gleichung in demselben Intervall mehrere Wechsel auftreten sollten, wollen wir der bestimmten Vorstellung wegen die kleinste Wurzel als die gesuchte annehmen. Gesetzt nun, der Zeichenwechsel trete ein zwischen $y_1 = \beta$ und $y_1 = \beta + 1$; wir setzen dann weiter

genten der Curve. [Siehe unten 59).] In Fig. 8 ist eine solche Brennlinie dargestellt und mit 1 bezeichnet; die Curve 1^a ist die zugehörige Roulette. Es ist $a = 2b$ angenommen, deshalb ist $r_0 = -a$.

B. Es sei $c = b$. Die Brennlinie ist bei dieser Annahme ein besonderer Fall der unter Fall II betrachteten Curven. Sie hat nur eine Asymptote, welche mit der kleinen Axe zusammenfällt. Die Rückkehrpunkte in der grossen Axe liegen wieder innerhalb der Ellipse und sind wie unter A bestimmbar; die beiden anderen Rückkehrpunkte auf der Verlängerung der kleinen Axe liegen in unendlicher Entfernung.

C. Es sei $c < b$. Unter dieser Voraussetzung tritt Fall III ein. Die Brennlinie, welche durch die vom Mittelpunkte ausgehenden Strahlen nach der Reflexion gebildet wird, hat keine Asymptoten; sie ist eine geschlossene, vollkommen objective Curve. Die vier Rückkehrpunkte sind durch 53) und 54) bestimmt; r_0 wird hier positiv, die entsprechenden Strecken sind also von den Endpunkten der kleinen Axe aus nach den Seiten hin abzutragen, auf welchen der Mittelpunkt der Ellipse liegt. Die kaustische Linie hat einige Aehnlichkeit mit der Evolute einer Ellipse. (Die zugehörige Roulette hat ungefähr die Form einer Ellipse.) Zwei Rückkehrpunkte liegen auch hier stets innerhalb der reflectirenden Curve auf der grossen Axe derselben; die beiden anderen liegen entweder innerhalb, auf oder ausserhalb der Ellipse, je nachdem $b \gtreqless \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist.

59) Die Tangenten in den Scheiteln der kaustischen Linie, d. h. in denjenigen Punkten, in welchen dieselbe, abgesehen von den Rückkehrpunkten, ein Maximum oder Minimum in Richtung der grossen Axe erreicht, müssen senkrecht zu dieser Axe stehen. Mit Berücksichtigung des harmonischen Vierstrahls, welcher durch einen senkrecht zur Axe reflectirten Strahl, durch den Einfallsstrahl und durch die Tangente und Normale im Einfallspunkte gebildet wird, erhält man leicht folgende Gleichung zur Bestimmung der Entfernung ξ einer solchen Scheiteltangente vom Mittelpunkte M:

$$(\xi^2 - a^2)(c^2\xi - a^2 z) + b^2\xi(a^2 - \xi z) = 0.$$

Liegt der strahlende Punkt im Mittelpunkte der Ellipse, ist also $z = 0$, so erhält man hieraus $\xi = \pm\frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$. Liegt der Punkt P im Scheitel der Ellipse, ist also $z = a$, so erhält man zwei brauchbare Werthe, nämlich $\xi_1 = a$, d. h. die Brennlinie berührt die Ellipse im Punkte P und $\xi_{11} = \frac{a}{c^2}(b^2 - \sqrt{b^4 + a^2c^2})$.

60) Rectification. Die Länge eines Bogenstückes der kaustischen Linie ist gleich der Differenz aus den beiden, durch Gleichung 49) bestimmten Krümmungsradien der Roulette, welche zu den Endpunkten des zu messenden Bogens gehören; vorausgesetzt, dass innerhalb dieser

Wie schon oben erwähnt wurde, ist das Vorkommen einzelner Fälle abhängig von der Excentricität der Ellipse. Die Fälle III, IV und V sind immer möglich, selbst wenn $c = 0$, die Ellipse also in einen Kreis übergegangen ist; die Resultate stimmen dann mit den früher für den Kreis direct gefundenen überein. Ist $c > b$, so sind alle fünf Fälle möglich; ist $c = b$, so kann Fall I nicht vorkommen; ist $c < b$, so können die Fälle I und II nicht stattfinden. Es soll mit Rücksicht auf die verschiedenen Formen der Ellipse hier noch besonders folgender Fall erörtert werden:

58) Der strahlende Punkt liegt im Mittelpunkte der Ellipse; es ist also $z = 0$.

A. Es sei $c > b$. Die Brennlinie ist unter dieser Voraussetzung ein specieller Fall der unter Fall I betrachteten Curven. Die zur Bestimmung der Ausgangspunkte der Asymptoten dienende Gleichung 47) geht, wenn $z = 0$ gesetzt wird, über in die einfachere

$$x^2 = \frac{a^2(2c^2 - a^2)}{3c^2}, \text{ also ist } y^2 = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}.$$

Die beiden Werthe von x unterscheiden sich demnach hier nur durch die Vorzeichen, d. h. die vier Asymptoten liegen in diesem Falle auch zu je zweien symmetrisch zur kleinen Axe; ihre Schnittpunkte liegen also einerseits in der grossen und andererseits in der Verlängerung der kleinen Axe. Die Entfernungen der Schnittpunkte der Asymptoten mit der grossen Axe vom Mittelpunkte der Ellipse sind hier nach 56)

$$s_1 = \pm \frac{ac\sqrt{6c^2 - 3a^2}}{a^2 + c^2}$$

und die Entfernungen der Schnittpunkte mit der kleinen Axe vom Mittelpunkte sind

$$s_2 = \pm \frac{c\sqrt{3a^4 - 3c^4}}{2c^2 - a^2}.$$

Die Axen der Ellipse, resp. die Verlängerungen, sind zugleich Tangenten in den Rückkehrpunkten der Brennlinie. Zwei Rückkehrpunkte liegen innerhalb der Ellipse auf der grossen Axe; ihre Entfernungen von den Scheiteln sind nach 54)

$$p = q = \frac{ab^2}{a^2 + c^2} = \frac{ab^2}{2a^2 - b^2}.$$

Die beiden anderen liegen ausserhalb der Ellipse in den Verlängerungen der kleinen Axe; denn ihre Entfernungen von den Endpunkten der letzteren sind nach 53)

$$r_0 = \frac{a^2 b}{a^2 - 2c^2},$$

also hier negativ. Die in den Entfernungen $\pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$ vom Mittelpunkt zur kleinen Axe parallel liegenden Geraden sind die Scheiteltan-

genten der Curve. [Siehe unten 59).] In Fig. 8 ist eine solche Brennlinie dargestellt und mit 1 bezeichnet; die Curve 1^a ist die zugehörige Roulette. Es ist $a = 2b$ angenommen, deshalb ist $r_0 = -a$.

B. Es sei $c = b$. Die Brennlinie ist bei dieser Annahme ein besonderer Fall der unter Fall II betrachteten Curven. Sie hat nur eine Asymptote, welche mit der kleinen Axe zusammenfällt. Die Rückkehrpunkte in der grossen Axe liegen wieder innerhalb der Ellipse und sind wie unter A bestimmbar; die beiden anderen Rückkehrpunkte auf der Verlängerung der kleinen Axe liegen in unendlicher Entfernung.

C. Es sei $c < b$. Unter dieser Voraussetzung tritt Fall III ein. Die Brennlinie, welche durch die vom Mittelpunkte ausgehenden Strahlen nach der Reflexion gebildet wird, hat keine Asymptoten; sie ist eine geschlossene, vollkommen objective Curve. Die vier Rückkehrpunkte sind durch 53) und 54) bestimmt; r_0 wird hier positiv, die entsprechenden Strecken sind also von den Endpunkten der kleinen Axe aus nach den Seiten hin abzutragen, auf welchen der Mittelpunkt der Ellipse liegt. Die kaustische Linie hat einige Aehnlichkeit mit der Evolute einer Ellipse. (Die zugehörige Roulette hat ungefähr die Form einer Ellipse.) Zwei Rückkehrpunkte liegen auch hier stets innerhalb der reflectirenden Curve auf der grossen Axe derselben; die beiden anderen liegen entweder innerhalb, auf oder ausserhalb der Ellipse, je nachdem $b \gtreqless \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist.

59) Die Tangenten in den Scheiteln der kaustischen Linie, d. h. in denjenigen Punkten, in welchen dieselbe, abgesehen von den Rückkehrpunkten, ein Maximum oder Minimum in Richtung der grossen Axe erreicht, müssen senkrecht zu dieser Axe stehen. Mit Berücksichtigung des harmonischen Vierstrahls, welcher durch einen senkrecht zur Axe reflectirten Strahl, durch den Einfallsstrahl und durch die Tangente und Normale im Einfallspunkte gebildet wird, erhält man leicht folgende Gleichung zur Bestimmung der Entfernung ξ einer solchen Scheiteltangente vom Mittelpunkte M:

$$(\xi^2 - a^2)(c^2\xi - a^2 z) + b^2\xi(a^2 - \xi z) = 0.$$

Liegt der strahlende Punkt im Mittelpunkte der Ellipse, ist also $z = 0$, so erhält man hieraus $\xi = \pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$. Liegt der Punkt P im Scheitel der Ellipse, ist also $z = a$, so erhält man zwei brauchbare Werthe, nämlich $\xi_1 = a$, d. h. die Brennlinie berührt die Ellipse im Punkte P und $\xi_{II} = \frac{a}{c^2}(b^2 - \sqrt{b^4 + a^2 c^2})$.

60) Rectification. Die Länge eines Bogenstückes der kaustischen Linie ist gleich der Differenz aus den beiden, durch Gleichung 49) bestimmten Krümmungsradien der Roulette, welche zu den Endpunkten des zu messenden Bogens gehören; vorausgesetzt, dass innerhalb dieser

Dies ist ein genauerer Werth für die Wurzel der fünften transformirten Gleichung. Einen noch weit mehr angenäherten aber kann man jetzt finden, wenn man in die zwei ersten Glieder jener Gleichung für y_5 den vorigen Werth 5,1483 einsetzt; man erhält so

$$y_5^3 + 628350 y_5^2 = 16654546, \ldots$$

und dadurch

$$111607907500 y_5 = 574591375000 - 16654546$$

oder

$$y_5 = \tfrac{574574720454}{111607907500} = 5{,}14815422.$$

Somit können wir endlich mit grosser Annäherung die gesuchte Wurzel der gegebenen Gleichung angeben:

$$x = 2 + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{5{,}14815422}{10^5} = 2{,}0945514815422;$$

es stimmt dieser Werth mit dem von Fourier gefundenen bis auf die zwölfte Decimale überein.

Zweites Zahlenbeispiel. Wir wollen wieder dieselbe Gleichung wie vorhin, als Basis der zu entwickelnden Kettenreihe dagegen jetzt eine grössere Zahl, etwa 40, nehmen. Wir setzen also

$$x = 2 + \frac{y_1}{40}$$

und erhalten die erste transformirte Gleichung

$$y_1^3 + 6.40.y_1^2 + 10.40^2.y_1 - 1.40^3 = 0$$

oder

1) $$f_1(y_1) = y_1^3 + 240 y_1^2 + 16000 y_1 - 64000 = 0.$$

Man findet aus derselben

$$3 < y_1 < 4,$$

so dass wir die Subsitution zu machen haben

$$y_1 = 3 + \frac{y_2}{40}.$$

Zur Bildung der zweiten transformirten Gleichung berechnen wir nachstehende Zahlwerthe:

$$f_1\ (3) = -13813,$$
$$f'_1\ (3) = [3y_1^2 + 480 y_1 + 16000]_3 = 17467,$$
$$f''_1\ (3) = [6y_1 + 480]_3 = 498,$$
$$f'''_1(3) = 6.$$

Hiernach wird die zweite transformirte Gleichung

$$f_2(y_2) = y_2^3 + 249.40 y_2^2 + 17467.40^2.y^2 - 13813.40^3 = 0$$

oder

2) $$f_2(y_2) = y_2^3 + 9960 y_2^2 + 27947200 y_2 - 884032000 = 0.$$

Diese Gleichung liefert

$$31 < y_2 < 32,$$

so dass zu nehmen ist

$$y_2 = 31 + \frac{y_3}{40}.$$

Wir finden nun

$$f_2\ (31) = -8067449,$$
$$f'_2\ (31) = [3y_2^2 + 19920y_2 + 27947200]_{31} = 28567603,$$
$$f''_2\ (31) = [6y_2 + 19920]_{31} = 20106,$$
$$f'''_2(31) = 6.$$

Hieraus findet man folgende dritte transformirte Gleichung:

$$f_3(y_3) = y_3^3 + 10053 \, . \, 40 y_3^2 + 28567603 \, . \, 40^2 y_3 - 8067449 \, . \, 40^3 = 0$$

oder

$$3)\quad f_3(y_3) = y_3^3 + 402120 y_3^2 + 45708164800 y_3 - 516316736000 = 0.$$

Hieraus folgt als erster Näherungswerth für y_3

$$y_3 = \tfrac{516316736000}{45708164800} = 11{,}296 \ldots.$$

Berechnet man mit diesem Werthe für y_3 die zwei ersten Glieder der Gleichung 3), so kommt

$$y_3^3 + 402120 y_3^2 = 51311800, \ldots,$$

und man erhält genauer für y_3

$$y_3 = \tfrac{516265424200}{45708164800} = 11{,}294819.$$

Hiernach ergiebt sich folgende Entwickelung für x:

$$x + 2 + \frac{3}{40} + \frac{31}{40^2} + \frac{11{,}294819}{40^3} = 2 + 0{,}075 + 0{,}019375 + 0{,}0001764815$$
$$= 2{,}0945514815 \ldots,$$

welcher Werth bis auf die zehnte Decimale inclusive genau ist.

Drittes Zahlenbeispiel. Wir wollen endlich noch für die Gleichung

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5 = 0$$

die zwischen 1 und 2 liegende reelle Wurzel derselben bestimmen. Wir setzen zuerst

$$x = 1 + \frac{y_1}{10}$$

und erhalten die erste transformirte Gleichung

$$1)\quad f_1(y_1) = y_1^5 + 50y_1^4 + 800y_1^3 + 7000y_1^2 + 50000y_1 - 300000 = 0.$$

Hier ist

$$3 < y_1 < 4,$$

also

$$y_1 = 3 + \frac{y_2}{10}.$$

Die zweite transformirte Gleichung wird

$$2)\quad f_2(y_2) = y_2^5 + 650y_2^4 + 149000y_2^3 + 17170000y_2^2 + 1194050000y_2 - 6110700000 = 0.$$

Man findet

$$4 < y_2 < 5,$$

also

$$y_2 = 4 + \frac{y_3}{10}.$$

Dann kommt

II. Das Potential V und seine ersten Differentialquotienten nach beliebiger Richtung müssen endlich und stetig sein auf allen Punkten der Platte, ausser in den Polen, wo V unendlich wird, wie $\pm lgr$ bei $r=0$.

III. Am Rande muss $\frac{\partial V}{\partial n}=0$ sein, wo n eine zur Randcurve der Platte normale Linie darstellt.

Durch diese drei Bedingungen ist die Function V bekanntlich eindeutig bestimmt.

Diese Function kann nun betrachtet werden als das logarithmische Potential einer gewissen Massenvertheilung in der Ebene der Platte, welche aus den folgenden drei Theilen zu bestehen hat: 1. eine Masse $+m$ in dem einen und 2. eine Masse $-m$ im andern Pol, wo auch m der Stromstärke proportional ist; endlich 3. eine gewisse Massenvertheilung μ ausserhalb der Platte, aber in der Ebene derselben, welche nach dem Princip der äquivalenten Massentransposition auf den Rand der Platte übergeführt gedacht werden kann. Die Lösung des Problems kann auf die Auffindung einer solchen äusseren Massenvertheilung μ reducirt werden, welche zusammen mit den Massen $\pm m$ in den Polen am ganzen Rande der Bedingung III genügt; die ersten beiden Bedingungen sind nämlich für jedes beliebige μ *eo ipso* erfüllt. Ist μ gefunden, so ist auch V bekannt, also sind auch die Strömungscurven quasi gefunden. Es ist nun schwierig, zu sagen, ob das Problem als gelöst betrachtet werden kann, wenn μ gefunden ist, oder ob dazu die Function V als analytisch niedergeschriebener Ausdruck ausgerechnet sein muss. Wie gross der Unterschied, zeigt der Fall einer rechteckigen Platte: hier lässt sich μ auf ein System von Massenpunkten reduciren, die in den unendlich vielen Bildpunkten der beiden Pole concentrirt sind, die vier geradlinigen Ränder der Platte als spiegelnd betrachtet. So einfach dies ist, so schwierig ist es, für V einen eleganten analytischen Ausdruck aufzustellen, und ich brauche in dieser Beziehung wohl nur an die Arbeiten von Jochmann und von Heine zu erinnern. Es sei dem, wie ihm wolle — jedenfalls wird man die Bestimmung von μ als einen wichtigen Schritt zur Lösung des Problems betrachten müssen. Zweck dieser Abhandlung ist es nun, für eine Reihe von verschieden geformten Platten jene äussere Massenvertheilung μ anzugeben, — es ist dem Ermessen des Lesers überlassen, dies als Lösungen der betreffenden speciellen Probleme oder nur als Anleitung, als wichtiger erster Schritt zur Erreichung dieser Lösungen zu betrachten.

Es sei s der von einem beliebigen Anfangspunkte gerechnete Bogen der die Platte begrenzenden Randcurve. Die Massenvertheilung μ soll, wie erwähnt, zusammen mit den Massen $\pm m$ in den beiden Polpunkten *am ganzen* Rande $\frac{\partial V}{\partial n}=0$ geben. Wir können das Problem noch weiter

III.

Ueber das Problem der Stromverzweigung in einer ebenen Platte.

Von

O. Chwolson,

Privat-Docent an der Universität St. Petersburg.

Hierzu Taf. II, Fig. 1—22.

§ 1.

Bei der mathematischen Behandlung physikalischer Probleme gelangt man nicht selten zu solchen Aufgaben, bei welchen es schwierig ist, den Begriff der „Lösung" genau festzustellen und präcise die Grenze zu ziehen zwischen einer wirklich fertigen Lösung und nur vorbereitenden Betrachtungen, welche nach gewissen Manipulationen zu einer abgeschlossenen Lösung führen sollen. Zu derartigen Problemen gehört nun vor Allem das Stromverzweigungsproblem, welches bekanntlich in Folgendem besteht: Es ist gegeben eine Platte von gewisser geometrischer Form und innerhalb derselben zwei bestimmte Punkte p_1 und p_2, welche wir Polpunkte nennen werden. Durch den einen dieser Punkte, welche genauer als kleine Flächenstücke zu betrachten sind, tritt die Elektricität in die Platte ein, durch den andern fliesst sie wieder ab; es soll nun das Curvensystem gefunden werden, welches die beiden Polpunkte verbindet und die Gesammtheit aller möglichen Wege darstellt, welche die elektrischen Theilchen beim Durchströmen der Platte einschlagen können. Es sei nun V das Potential der an den verschiedenen Punkten der Platte wirkenden treibenden Kraft; dann sind die gesuchten Strömungscurven die orthogonalen Trajectorien des Curvensystems $V = const.$ und man kann das Problem als „gelöst" betrachten, wenn nur die Function V gegeben, d. h. also das Potential als Function des Ortes bekannt ist. Dieses Potential V hat folgenden Bedingungen zu genügen:

I. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = D^2 V$ muss gleich Null sein auf allen Punkten der Platte ausser in den beiden Polen, wo $D^2 V = \pm f$ sein muss, wo f wiederum der Stromstärke *proportional* ist.

Stromverzweigungsproblem für eine Reihe von verschiedenartig geformten Platten gelöst. Dabei wurde für μ eine unbestimmte Randbelegung der Platte angenommen, so dass die Dichtigkeit als Function von s in einer Reihe mit unbestimmten Coefficienten entwickelt gedacht wurde. Dann wurden diese Coefficienten bestimmt durch die Bedingung, dass das Gesammtpotential V am ganzen Rande $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ ergeben muss. Es stellte sich nun in allen durchgeführten Fällen heraus, dass die so gefundene Randbelegung ersetzt werden kann durch zwei gleiche Punktsysteme, deren jedes einem der Pole coordinirt ist; in jedem Punkte des einen Systems war die Masse $+m$, des andern $-m$ concentrirt; das Potential V blieb bei dem Ersatz der Randbelegung durch jene beiden äusseren Punktsysteme in allen Punkten der Platte unverändert, so dass jene beiden Punktsysteme ebenfalls als das gesuchte μ angesehen werden konnten: das eine von ihnen als μ_1, das andere als μ_2. Dies führte mich auf den Gedanken, die Lösung direct so zu versuchen, dass ich ein Punktsystem μ_1 bestimmte, welches mit $+m$ in dem einen Polpunkte am ganzen Rande $\frac{\partial V}{\partial n} = f(s)$ ergab, wo, wie oben, $f(s)$ von der speciellen Lage des Poles und des äusseren, ihm coordinirten Punktsystems unabhängig sei.

Auf solche Weise gelang es mir, die Massenvertheilungen μ_1 und μ_2 für eine ganze Reihe von Platten zu bestimmen, für welche eine Lösung auf dem gewöhnlichen Wege schon deswegen undenkbar war, weil die Randcurve nicht durch eine bestimmte Gleichung dargestellt werden konnte, wie z. B. für eine Platte, welche die Form eines Viertelkreises hat.

Es sei nun x ein beliebiger Punkt auf der Platte, $s, s_1, s_2, s_3 \ldots$ seine Entfernungen von dem Pole P_1 und den verschiedenen Punkten des Systems μ_1, ferner $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ seine Entfernungen von dem Pole P_2 und den Punkten des Systems μ_2. Dann ist das Potential V im Punkte x gleich

$$V = +m\,lg\,s + m\,lg\,s_1 + m\,lg\,s_2 - m\,lg\,\sigma - m\,lg\,\sigma_1 - m\,lg\,\sigma_2 - \ldots$$
$$= m\,lg\,\frac{s\,s_1\,s_2\ldots}{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2\ldots}.$$

Die Gleichung der Curven constanten Potentials war daher

$$\frac{s\,s_1\,s_2\,s_3\ldots}{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\ldots} = C,$$

wo C eine beliebige Constante. Die orthogonalen Trajectorien dieses Curvensystems waren dann die gesuchten Strömungscurven. Man sieht also, dass durch Aufsuchung der erwähnten äusseren Punktsysteme das Problem in gewissem Sinne als gelöst betrachtet werden konnte. Ich gehe nun über zur successiven Darlegung der von mir behandelten Fälle.

1. Die Platte hat die Form eines **Halbkreises**. Es sei P_1 (Fig. 2) der eine Pol; wäre der Kreis vollständig, so würde das äussere System μ_1, welches diesem Pol coordinirt ist, aus dem einen Punkte P'_1 bestehen, wo P und P'_1 in Bezug auf den Kreisbogen conjugirt sind. Ich füge nun die beiden Punkte Q_1 und Q'_1 hinzu, welches die Spiegelpunkte von P_1 und P'_1 in Bezug auf den Rand AB sind. Dann sind P'_1, Q_1 und Q'_1 das gesuchte äussere System μ_1. In der That; die vier Punkte P, P'_1, Q_1, Q'_1 geben für den Rand AB überall $\frac{\partial V_1}{\partial n}=0$ und für den Rand ACB überall $\frac{\partial V_1}{\partial n}=2\frac{m}{a}$, weil Q_1 und Q'_1 ebenfalls ein Paar in Bezug auf den Kreisbogen conjugirter Punkte darstellen (siehe Sätze A und B). — Das Problem ist somit gelöst. Das andere System μ_2 besteht aus den Punkten P'_2, Q_2 und Q'_2, welche mit Q_2 zusammen am Rande AB überall $\frac{\partial V_2}{\partial n}=0$ und am Rande ACB überall $\frac{\partial V_2}{\partial n}=-\frac{2m}{a}$ ergeben. Das gesammte aus acht Punkten bestehende System μ ergiebt also am ganzen Rande $\frac{\partial V}{\partial n}=0$. — Sei x ein beliebiger Punkt der Platte, so ist die Gleichung der Curven constanten Potentials (s. Fig. 2)

$$1)\qquad \frac{s\,s_1\,s_2\,s_3}{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3}=Const.$$

Führt man dipolare Coordinaten ein mit den Grenzpunkten A und B und sind Ω und λ die Coordinaten des variabeln Punktes x, wo $\Omega=\sphericalangle AxB$ und $\lambda=\frac{xB}{xA}$; sind ferner $\lambda_1\omega_1$ und $\lambda_2\omega_2$ die Coordinaten der Polpunkte, so sind die Coordinaten von P'_1 gleich λ_1 und $\pi-\omega_1$, die von Q_1 gleich λ_1 und $2\pi-\omega_1$, die von Q'_1 gleich λ_1 und $\pi+\omega_1$. Die Coordinate λ_1 ist also jenen vier Punkten gemein; Aehnliches erhält man für die vier anderen Punkte. Berechnet man nun die s_i und die σ_i, so erhält man

$$\frac{\{\lambda^4-2\lambda^2\lambda_2^2\cos(\Omega-\omega_2)+\lambda_2^4\}\{\lambda^4-2\lambda^2\lambda_2^2\cos(\Omega+\omega_2)+\lambda_2^4\}}{\{\lambda^4-2\lambda^2\lambda_1^2\cos(\Omega-\omega_1)+\lambda_1^4\}\{\lambda^4-2\lambda^2\lambda_1^2\cos(\Omega+\omega_1)+\lambda_1^4\}}=Const.$$

als Gleichung der Curven constanten Potentials, wo Ω und λ die Variabelen sind. Der obige Ausdruck lässt sich leicht in Reihen zerlegen; doch wird sich nicht eine für alle λ giltige Entwickelung angeben lassen. Nimmt man an, dass $\lambda>\lambda_1>\lambda_2$ sei, so erhält man für obigen Ausdruck die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\Omega}{n\lambda^{2n}}(\lambda_1^{2n}\cos 2n\omega_1+\lambda_2^{2n}\cos 2n\omega_2)=Const.,$$

welche für $\lambda<\lambda_1$ oder für $\lambda<\lambda_2$ divergirt.

Ich begnüge mich, für diesen einen Fall die Rechnung so weit zu führen. In den übrigen Fällen werde ich nur die Lage des Punktsystems

μ_1 angeben, welches dem Pole P_1 coordinirt ist. Man hat sich dann jedesmal das entsprechende, dem andern Pole coordinirte System μ_2 dazu zu denken.

2. Ein Viertelkreis. Es sei P'_1 (Fig. 3) dem Polpunkte P_1 conjugirt, Q_1 und Q'_1 die Spiegelpunkte von P_1 und P'_1 in Bezug auf den Rand AB und endlich R_1, R'_1, S_1, S'_1 die Spiegelpunkte von P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 in Bezug auf den Rand AC. Dann besteht das gesuchte äussere System μ_1 aus den sieben Punkten P'_1, Q_1, Q'_1, R_1, R'_1, S_1, S'_1. Ein Blick auf Fig. 3 genügt, um einzusehen, dass diese Punkte zusammen mit dem Pole P_1 an den Rändern AB und AC überall $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$ (Satz A) und am Rande BC überall $\frac{\partial V_1}{\partial n} = Const.$ ergeben (Satz B), da nämlich jedes der Punktepaare (P_1, P'_1), (Q_1, Q'_1), (R_1, R'_1) und (S_1, S'_1) in Bezug auf den Kreisbogen conjugirt ist. Das dem andern Pol P_2 entsprechende Punktsystem μ_2 ist auf der Zeichnung nicht angegeben. Das endgiltig zu findende V ist also das Potential von im Ganzen 16 Punkten.

3. Ein Achtelkreis. ABC (Fig. 4) ist die gegebene Platte. Das äussere System besteht aus 15 Punkten P'_1, a, b ... o. Hier ist P'_1 conjugirt dem Polpunkte P_1, ferner $AP_1 = Aa = Ac = Ae = Ag = Ak = Am = Ao$ und $\sphericalangle AP'_1 = Ad = Af = Ah = Ai = Al = an$ und $\sphericalangle P'_1AC = \sphericalangle cAb = \sphericalangle dAE = \sphericalangle fAE = \sphericalangle hAD = \sphericalangle iAD = \sphericalangle lAF = \sphericalangle nAF$, wo $EF \perp DC$ steht. Man sieht leicht ein, dass die Punkte symmetrisch sind in Bezug auf die Ränder AB und AC und paarweise conjugirt in Bezug auf den Rand BC.

4. Ein Kreissector, dessen Winkel an der Spitze $\frac{\pi}{n}$ ist, wo n eine ganze Zahl. Das System μ_1 besteht aus $4n-1$ leicht zu construirenden Punkten. Das gesuchte V ist somit Potential von $2(4n-1) + 2 = 8n$ Punkten und hat die Form

$$V = \frac{s_1 s_2 s_3 \ldots s_{4n}}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{4n}} = Const.$$

Auf Fig. 5 sind beispielsweise die Punkte des Systems μ_1 für den Fall $n = 3$ gezeichnet; sie sind symmetrisch in Bezug auf die Ränder BA und CA und paarweise conjugirt in Bezug auf den Rand CB.

Für den Fall, dass der Winkel an der Spitze gleich $\frac{2\pi}{2n+1}$ ist, lässt sich das Punktsystem μ_1 nur dann construiren, wenn die beiden Polpunkte auf der den Winkel halbirenden Geraden liegen.

5. Eine unendlich grosse Platte, welche die Form eines rechten oder spitzen Winkels α hat, wo $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Das System μ_1 besteht aus den $2n-1$ optischen Spiegelpunkten des Poles P_1 in Bezug

auf die beiden Ränder der Platte. Dieselben Punkte bildeten im vorigen Falle die Hälfte des Systems μ_1; die andere Hälfte der Punkte war diesen $2n-1$ Punkten und dem Polpunkte P_1 in Bezug auf den Kreisbogen conjugirt. Mit dem abgrenzenden Bogen fallen auch diese $2n$ Punkte weg. Das gesuchte V wird also in diesem Falle das Potential von nur $4n$ Punkten sein.

In dem Seminar bei Herrn Professor C. Neumann wurde für eine Platte, welche die Form eines concentrischen Ringes hat, auf die oben erwähnte Weise für μ_1 das Punktsystem 1, 2, 3 ... I, II, III ... (Fig. 6) gefunden, welches leicht construirt werden konnte, wenn man von dem Pole P_1 ausgehend, in Bezug auf die beiden Kreise successive die conjugirten Punkte aufsucht, ebenso wie man etwa die Bildpunkte für den Fall zweier paralleler Spiegel aufsuchen würde. Ein solches Punktsystem werde ich ein „geradliniges" nennen; es giebt an beiden Rändern offenbar $\frac{\partial V_1}{\partial n} = const.$ Diese Lösung führte mich sofort zur Lösung folgender weiterer Fälle:

6. Ein halber concentrischer Ring. μ_1 besteht aus zwei, zu den Rändern AB und CD symmetrischen Punktsystemen (Fig. 7). Führt man Polarcoordinaten ein, so kann man die Gleichung der Curven constanten Potentials direct aufstellen. Die Rechnung führt anfangs zu Doppelsummen; doch kann man die eine Summation ausführen und es verbleiben für V vier unendliche Reihen.

7. Ein viertel concentrischer Ring. μ_1 besteht aus vier geradlinigen Punktsystemen (Fig. 8), welche sowohl gegen AB, als auch gegen CD symmetrisch liegen. Auch für diesen Fall lässt sich die Gleichung der Curven constanten Potentials in Polarcoordinaten als Summe von vier unendlichen Reihen darstellen.

8. Der $2n^{\text{te}}$ Theil eines concentrischen Ringes. μ_1 besteht (Fig. 9) aus $2n$ geradlinigen Punktsystemen, deren jedes ein Punktepaar des Falles 4 (Fig. 4 und 5) ersetzt. Selbst für diesen Fall kann man V in Reihen entwickeln und so die Curven constanten Potentials aufsuchen, ohne dass man dabei auf übermässig verwickelte Ausdrücke stösst. Für den Fall eines excentrischen Ringes wurde in dem Seminar gefunden, dass μ_1 aus Punkten besteht, welche sämmtlich auf dem durch den Pol P_1 und die Grenzpunkte a und b definirten Kreise theils innerhalb, theils ausserhalb des Ringes sämmtlich zu einer Seite der Centralen ABb liegen. Sie werden gefunden, indem man, von P_1 ausgehend, successive in Bezug auf die beiden Randkreise einander conjugirte Punkte construirt, wie aus Fig. 10 leicht zu ersehen ist. Ich nenne μ_1 ein kreisförmiges Punktsystem. Dies führte mich zur Lösung des folgenden Falles:

9. Ein halber excentrischer Ring, der durch die Centrale begrenzt wird. μ_1 besteht aus zwei in Bezug auf die Ränder AB und

CD symmetrischen kreisförmigen Punktsystemen (Fig. 11). Führt man dipolare Coordinaten ein, so kann man V in eine Reihe entwickeln.

10. Eine unendliche, von zwei parallelen Geraden begrenzte Platte. μ_1 besteht aus dem System der optischen Bilder des Poles P_1 in Bezug auf die beiden begrenzenden Geraden. Es ist nämlich in diesem Falle an beiden Rändern $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$.

11. Eine unendliche Platte, in welcher ein Kreis ausgeschnitten ist. μ_1 besteht aus dem einen Punkte P'_1 (Fig. 12) innerhalb des Kreises, welcher dem Polpunkte P_1 conjugirt ist. Das gesuchte V ist also das Potential der vier Punkte P_1, P'_1, P_2, P'_2, so dass die allgemeine Gleichung der Curven constanten Potentials ohne Weiteres in Polarcoordinaten niedergeschrieben werden kann.

12. Eine unendliche Platte, aus welcher zwei beliebige Kreise ausgeschnitten sind. μ_1 besteht aus einem kreisförmigen Punktsystem, welches man erhält, wenn man, vom Pole P_1 ausgehend, successive in Bezug auf beide Kreise conjugirte Punkte construirt; diese liegen auf dem durch P_1 und die beiden Grenzpunkte A und B bestimmten Kreise. Durch Einführung von dipolaren Coordinaten kann man die allgemeine Gleichung der Curven constanten Potentials unschwer aufstellen.

13. Eine unendliche Platte, die von einer Geraden begrenzt wird, mit halbkreisförmigem Ausschnitt. μ_1 besteht aus den drei Punkten Q_1, Q'_1 und P'_1, wo Q_1 dem Polpunkte P_1 conjugirt, Q'_1 und P'_1 dagegen die Spiegelpunkte jener in Bezug auf den Rand $ABCD$ sind. Ebenso besteht μ_2 aus den Punkten P'_2, Q_2 und Q'_2. Das gesuchte V im Punkte x ist also das Potential von im Ganzen acht Punkten.

Es ist interessant, bei diesem Falle die Wirkung des Randes näher zu betrachten. Wäre die Platte nach allen Seiten hin unbegrenzt, so würde die in einem Punkte x der Platte wirkende Kraft einfach die Resultante zweier von P_1 und P_2 ausgehenden Kräfte $+\frac{m}{P_1 x}$ und $-\frac{m}{P_2 x}$ sein. Ist die Platte von einer ununterbrochenen Geraden AD begrenzt, so muss man noch die Wirkung der zwei Spiegelpunkte P'_1 und P'_2 hinzufügen, wodurch gleichsam die durch den Rand in den Strömungscurven hervorgerufenen Veränderungen repräsentirt werden. Hat die Platte überdies den Ausschnitt BC, so kommt noch die Wirkung von vier Punkten Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2 hinzu, von denen zwei positive und zwei negative Massen enthalten. Diese Wirkung ist nur in der Nähe des Randes BC von merklicher Grösse und giebt uns ein Bild von den durch den Ausschnitt in nächster Nähe derselben hervorgerufenen Perturbationen in dem Verlaufe der Strömungscurven.

14. Linsenförmige Platte, deren Winkel an der Spitze $\frac{\pi}{n}$ ist. μ_1 ist wieder ein kreisförmiges Punktsystem, welches man erhält, wenn man, vom Pol P_1 ausgehend, successive die in Bezug auf die beiden Kreise conjugirten Punkte construirt (s. Fig. 15a, wo $n=2$). Die Zahl dieser Punkte ist $2n-1$; setzt man die Construction weiter fort, so erhält man wieder den Polpunkt P_1, von dem man ausgegangen war. Führt man nämlich dipolare Coordinaten ein, sind $\omega=\omega_1$ und $\omega=\omega_2$ die Gleichungen der beiden Randkreise und (λ, Ω) die Coordinaten des Poles P_1, so sind λ und $\Omega \pm 2\varkappa(\omega_1-\omega_2)$ die Coordinaten des $2\varkappa^{\text{ten}}$ Punktes. Ist $\omega_1-\omega_2=\frac{\pi}{n}$, so wird der $2n^{\text{te}}$ Punkt wieder der erste sein. Die gegenseitige Lage der Randkreise kann dabei ganz beliebig sein (s. Fig. 15a, b, c).

15. Eine halbe linsenförmige Platte, deren Winkel an der Spitze $\frac{\pi}{n}$ ist. μ_1 besteht (Fig. 16a) aus zwei kreisförmigen Punktsystemen, von denen das eine identisch ist mit dem des vorigen Falles, das andere das Spiegelbild des ersten in Bezug auf den Rand AB ist. Das gesuchte V ist daher das Potential von $8n$ Punkten und kann leicht in eine Reihe entwickelt werden. Die Form der Platte kann wiederum eine sehr verschiedene sein (Fig. 16a, b, c), wenn nur der Winkel an der Spitze $\frac{\pi}{n}$ ist, wo n eine ganze Zahl.

Ausser den betrachteten lässt sich noch eine grosse Anzahl anderer Fälle lösen, aber nur bei speciellen Lagen der Polpunkte.

§ 2.

Wir haben uns bisher ausschliesslich mit solchen Fällen beschäftigt, in denen die äussere Massenvertheilung μ, welche zusammen mit den beiden Polpunkten das gesuchte Potential V ergiebt, sich auf ein System von Massenpunkten reduciren lässt. Ich will nun einen Fall besprechen, in welchem eine derartige Reduction nicht möglich ist, für welchen die äusseren Massen nicht aus Punkten bestehen. Soviel ich weiss, ist ein derartiger Fall bisher noch nie gelöst worden.

Die zu betrachtende Platte soll unendlich gross sein und die Form eines stumpfen Winkels haben.

Ehe an die Betrachtung dieses Falles geschritten werden kann, muss die Theorie der Stromverzweigung auf unendlich grossen Platten näher studirt werden. Es sind vor Allem zwei Fragen zu beantworten: 1. Genügen die im vorigen Paragraphen aufgestellten, auf den Fall einer endlichen Platte bezüglichen Bedingungsgleichungen I—III auch für den Fall einer unendlich grossen Platte? und 2. Wird durch jene Gleichungen das Potential V *eindeutig* definirt?

Was die erste Frage betrifft, so sei AOB (Fig. 17) die gegebene Platte, P_1 und P_2 die Polpunkte und MN eine ganz beliebige Curve S, welche aber so verläuft, dass die beiden Pole zwischen ihr und der Spitze O liegen. Da kein Verlust von Elektricität stattfindet, so muss die gesammte über S hinüberfliessende Elektricitätsmenge Null sein. Dies führt uns zu der Bedingung:

IV. Es muss für jede beliebige, zwei Randpunkte M und N verbindende und nicht zwischen den Polen hindurchgehende Curve S

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$$

sein.

Ich will nun beweisen den

Satz 1. *Genügt V den Bedingungen I—III, so ist die Bedingung IV eo ipso erfüllt.*

Beweis. Wir umgeben die Pole mit kleinen Kreisen σ_1 und σ_2, deren Radius r sei, und wenden auf das von den Curven S, σ_1, σ_2 und den Geraden MO und ON begrenzte Flächenstück die Formel

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int\int D^2 V \, dx \, dy$$

an. Da $D^2 V = 0$ ist (Bed. I), so verbleibt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_1 + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_2 + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0,$$

wo $d\sigma$ ein Element des geradlinigen Randes sei. An diesem Rande ist aber $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ (Bed. III), also ist $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0$; ferner ist $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_1 = +f$ und $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_2 = -f$, wo f der Stromstärke proportional ist. Es verbleibt also

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0,$$

q. d. e.

Ich gehe über zu der zweiten Frage und werde nachweisen, dass das Potential V durch die Bedingungen I—III eindeutig bestimmt wird. Für eine endliche Platte ist der Beweis bekanntlich sehr einfach; viel schwieriger ist er für eine unendlich grosse Platte.

Denken wir uns das Problem gelöst. Dann ist V das Potential von $+m$ im Pole P_1, $-m$ im Pole P_2 und einer gewissen Randbelegung μ. Ueber diese Belegung μ wollen wir vorerst zwei Sätze beweisen.

Erster Satz. *Die lineare Dichtigkeit ϱ der Massen μ strebt für unendlich entfernte Randpunkte der Null zu.*

Beweis. Es seien u, v, w die Potentiale der Massen $+m$, $-m$, μ, dann giebt die Bedingung III

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial n}=0.$$

Für unendlich entfernte Punkte ist aber offenbar

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial n}=0.$$

Es bleibt also $\frac{\partial w}{\partial n}=0$. Man sieht aber ohne Weiteres ein, dass $\frac{\partial w}{\partial n}$ der Dichtigkeit ϱ proportional ist, so dass $\varrho=0$ verbleibt, q. d. e.

Zweiter Satz. Die algebraische Summe M der Massen μ ist gleich Null.

Beweis. Wir wollen das Integral

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, dS$$

betrachten, ausgedehnt über einen Bogen von unendlich grossem Radius, dessen Mittelpunkt in O sei. Wir wissen, dass für unendlich entfernte Punkte $\frac{\partial V}{\partial n}$ sich dem Grenzwerthe $\frac{M}{R}$ nähert, wo R die Entfernung jener Punkte von einem andern, im Endlichen liegenden Punkte bedeutet, als welchen man die Spitze O nehmen kann. Es ist also

$$\lim \int \frac{\partial V}{\partial n}\, dS=\int \frac{M}{R} R\, d\varepsilon = M\beta,$$

wo β der Winkel AOB ist. Nun haben wir aber (Bed. IV) $\int \frac{\partial V}{\partial n} dS=0$, folglich ist $M=0$, q. d. e. Daraus folgt ein

Dritter Satz. Die Function V, welche den Bedingungen I—III genügt, strebt für unendlich entfernte Punkte der Null zu.

Das ist klar, wenn man bedenkt, dass V das logarithmische Potential der Massen $+m$, $-m$ und μ ist, die sämmtlich im Endlichen liegen (erster Satz) und deren algebraische Summe Null ist (zweiter Satz). Nun erst können wir an unsere Aufgabe gehen und den

Satz 2 beweisen. Auch für eine unendlich grosse Platte wird V durch die Bedingungen I—III eindeutig bestimmt.

Beweis. Es seien zwei Lösungen V_1 und V_2 möglich und es sei

$$V_2 - V_1 = U.$$

Dann hat U folgenden vier Bedingungen zu genügen:

1. U und seine ersten Differentialquotienten müssen auf der ganzen Platte endlich und stetig sein;
2. $D^2 U=0$ **auf allen Punkten der Platte**;
3. $\frac{\partial U}{\partial n}=0$ am Rande;
4. $U=0$ für unendlich entfernte Punkte — folgt aus dem dritten Satze

Rand OB. Wir fügen $+s$ und $-s$ auf OF, $+s$ und $-s$ auf OG, $+r$ und $-r$ auf OD hinzu (Fig. 22). Dann heben sich auf:

1. $+s$ auf OF und $+s$ auf OH (Satz C);
2. $+m$ in P_1, $+m$ in P'_1, $-s$ auf OF und $-s$ auf OG (nach der Definition von s);
3. $+s$ auf OG, $+s$ auf OE, $-r$ auf OD und $-\mu$ auf OC (nach der Definition von r und μ);
4. $+r$ auf OD (Satz C).

Hiermit sind alle Massen erschöpft und bewiesen, dass am ganzen Rande $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$ ist.

Nachschrift. Zu den in § 1 behandelten Fällen lässt sich noch hinzufügen:

16. Eine unendliche Platte von der Form eines rechten Winkels, an dessen Scheitel ein Stück in Form eines Viertelkreises ausgeschnitten ist, dessen Centrum mit dem Scheitel des rechten Winkels zusammenfällt. — μ_1 besteht aus sieben Punkten: den drei Spiegelpunkten des Poles P_1 in Bezug auf die beiden geradlinigen Ränder der Platte und den vier Spiegelpunkten jener drei und des Poles P_1 in Bezug auf den zum vollen Kreise ergänzt gedachten viertelkreisförmigen Rand. V ist also das Potential von 16 Punkten.

St. Petersburg, den $\frac{\text{28. Nov.}}{\text{10. Dec.}}$ 1875.

Kleinere Mittheilungen.

I. Zur Theorie der Elimination.

Das Problem, aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die Werthepaare, welche beiden Gleichungen genügen, herzuleiten, ist längst vollständig gelöst. Es ist leicht, die Endgleichung für eine der Unbekannten aufzustellen, und zwar nach Bézout, Sylvester und Cayley in Determinantenform, sowie für jeden Werth dieser Unbekannten den zugehörigen Werth der andern zu bestimmen.

Anders stellt sich das Verhältniss bei drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die Methoden, die Endgleichung in einer der Unbekannten aufzustellen, weichen wesentlich von der bei zwei Gleichungen angewendeten ab, sind wenig übersichtlich und kaum ausführbar. Ich verweise hierbei auf die neueste Auflage von „Salmon's Vorlesungen", übersetzt von Fiedler. Auch Hesse (Geometrie des Raumes, 2. Aufl.) muss bei drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten Eigenschaften der Functionaldeterminante zu Hilfe nehmen, um zu beweisen, dass die Endgleichung vom achten Grade sei.

In dem Folgenden wird der Versuch gemacht, die Theorie de Elimination für drei Gleichungen mit drei Unbekannten auf elementare Weise zu entwickeln, indem blos die Bekanntschaft mit dem Fundamentalsatze vorausgesetzt wird, dass jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten als eine rationale Function der Coefficienten dieser Gleichung dargestellt werden kann.

I. Zwei Gleichungen mit einer Unbekannten.

Es seien zwei Gleichungen mit einer Unbekannten resp. vom m^{ten} und n^{ten} Grade gegeben:

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$
$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

Welche Bedingungen zwischen den Coefficienten a und b müssen erfüllt sein, wenn $1, 2, 3, \ldots, j$ Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ auch die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigen sollen?

Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Wir bilden uns die Gleichung

$$\psi(z)=\{z-f(\alpha_1)\}\{z-f(\alpha_2)\}\ldots\{z-f(\alpha_m)\}=0=z^m+R_1z^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+R_{m-1}z+R_m$$

oder, wenn wir statt $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ..., $f(\alpha_m)$ resp. f_1, f_2, ..., f_m setzen, die Gleichung

$$\psi(z)=(z-f_1)(z-f_2)\ldots(z-f_m)=0=z^m+R_1z^{m-1}+\ldots+R_{m-1}z+R_m.$$

Diese Gleichung hat die m Wurzeln f_1, f_2, ..., f_m. Soll nun eine der Wurzeln α die Gleichung $f(x)=0$ befriedigen, so hat die Gleichung $\psi(z)=0$ eine Wurzel $=0$, d. h. es muss $R_m=0$ sein. Ist umgekehrt $R_m=0$, so hat die Gleichung $\psi(z)=0$ eine Wurzel $=0$, und es befriedigt eine der Wurzeln α auch die Gleichung $f(x)=0$.

Sollen zwei Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$ genügen, so muss die Gleichung $\psi(z)=0$ zwei Wurzeln $=0$ haben, d. h. es muss $R_m=0$ und $R_{m-1}=0$ sein. Und ist umgekehrt $R_m=0$ und $R_{m-1}=0$, so hat die Gleichung $\psi(z)=0$ zwei Wurzeln $=0$, und es genügen zwei Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$.

Allgemein findet man folgenden Satz:

> Sollen j Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$ genügen, so müssen die Gleichungen $R_m=0$, $R_{m-1}=0$, ..., $R_{m-j+1}=0$ stattfinden; und finden umgekehrt diese Gleichungen statt, so genügen j Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$.

Nach den Elementen der Theorie der Gleichungen ist

$$R_m\ =f_1.f_2\ldots f_m,$$
$$R_{m-1}=f_2.f_3\ldots f_m+f_1.f_3\ldots f_m+\ldots+f_1.f_2\ldots f_{m-1}=\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-1},$$
$$R_{m-2}=f_3.f_4\ldots f_m+\ldots+f_1.f_2\ldots f_{m-2}=\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

allgemein

$$R_{m-p}=\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-p}.$$

Alle diese Ausdrücke sind in den Coefficienten b rational und in den Wurzeln α symmetrisch, folglich auch rational in den Coefficienten a.

Bei ihrer Bildung ist es wichtig, auf ihr Gewicht zu sehen. **Gewicht** eines Terms nennen wir die Summe der Indices desselben. So ist das Gewicht des Terms $ka_1^2a_2^3b_3=11$. Nach der elementaren Theorie der symmetrischen Functionen zeigt man leicht, dass in den einzelnen Ausdrücken R alle Terme gleiches Gewicht haben. Aus einem einzigen Term können wir also das Gewicht aller Terme bestimmen. Wir wählen dazu den letzten, von α freien Term, und finden, dass R_m vom Gewichte mn, R_{m-1} vom Gewichte $(m-1)n$, und so fort, allgemein R_p vom Gewichte $(m-p)n$ ist.

In Bezug auf die wirkliche Darstellung der Ausdrücke R als rationale Functionen der Coefficienten a und b ist noch Folgendes zu bemerken. Ist R_m (die sogenannte **Resultante**) wirklich als rationale Function der Coefficienten a und b dargestellt, so ersieht man aus der Bildungsweise der Functionen R sofort, dass

$$R_{m-1}=\frac{\partial R_m}{\partial b_n},\quad R_{m-2}=\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 R_m}{\partial b^2_n},\quad \ldots,\quad R_{m-p}=\frac{1}{1.2\ldots p}\cdot\frac{\partial^p R_m}{\partial b^p_n}.$$

II. Darstellung der gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen als rationale Functionen der Coefficienten derselben.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen $F(x)=0$ und $f(x)=0$ rational durch die Coefficienten a und b auszudrücken.*

Ist α_j eine gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen, so reducirt sich die Aufgabe darauf, eine symmetrische Function der α zu bilden, welche, wenn $f(\alpha_j)=0$ ist, den Werth α_j annimmt. Eine solche Function ist offenbar folgende:

$$u=\frac{\alpha_1.f_2.f_3\ldots f_m+\alpha_2.f_1.f_3\ldots f_m+\ldots+\alpha_m.f_1.f_2\ldots f_{m-1}}{f_2.f_3\ldots f_m+f_1.f_3\ldots f_m+\ldots+f_1.f_2\ldots f_{m-1}}=\frac{\Sigma\alpha_1.f_2.f_3\ldots f_m}{\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-1}}.$$

Denn diese Function ist offenbar eine rationale Function der b und eine symmetrische Function der α, also auch eine rationale Function der a. Ausserdem wird $u=\alpha_j$, wenn $f(\alpha_j)=0$ ist. Haben also die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel α_j, so wird diese durch die lineare Gleichung $u_0 u-u_1=0$ dargestellt, wo

$$u_0=\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-1}\text{ und } u_1=\Sigma\alpha_1.f_2.f_3\ldots f_m$$

ist. Ist aber ausser $f(\alpha_j)=0$ noch $f(\alpha_k)=0$, d. h. genügen zwei Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$, so wird $u=\frac{0}{0}$. In diesem Falle lassen sich aber die beiden Wurzeln α_j und α_k als die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung $u_0u^2-u_1u+u_2=0$ darstellen, in welcher u_0, u_1 und u_2 rationale Functionen der a und b sind.

Setzen wir nämlich $u_0=\Sigma f_1.f_2\ldots f_{m-2}$, $u_1=\Sigma(\alpha_1+\alpha_2)f_3.f_4\ldots f_m$, $u_2=\Sigma\alpha_1\alpha_2.f_3.f_4\ldots f_m$, so sieht man, wie oben, sofort, dass $\frac{u_1}{u_0}$ und $\frac{u_2}{u_0}$ rationale Functionen der a und b sind, und dass, wenn zu gleicher Zeit $f(\alpha_j)=0$ und $f(\alpha_k)=0$ ist, $\frac{u_1}{u_0}=\alpha_j+\alpha_k$ und $\frac{u_2}{u_0}=\alpha_j.\alpha_k$ wird; dass also α_j und α_k die beiden Wurzeln der Gleichung $u_0u^2-u_1u+u_2=0$ sind.

Genügen allgemein p Wurzeln α der Gleichung $f(x)=0$, so kann man dieselben als die Wurzeln einer Gleichung p^{ten} Grades $u_0u^p-u_1u^{p-1}+u_2u^{p-2}\ldots+(-1)^p u_p=0$ darstellen, deren Coefficienten $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$ ganze rationale Functionen der a und b sind.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$u_0=\Sigma f_{p+1}.f_{p+2}\ldots f_m,\quad u_1=\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p).f_{p+1}.f_{p+2}\ldots f_m,$$
$$u_2=\Sigma(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{p-1}\alpha_p).f_{p+1}.f_{p+2}\ldots f_m,\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_p=\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p.f_{p+1}.f_{p+2}\ldots f_m.$$

Alsdann sind offenbar die Functionen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$ ganze rationale Functionen der a und b. Wenn ferner zu gleicher Zeit $f(\alpha_1)=0$, $f(\alpha_2)$

$= 0, \ldots, f(\alpha_p) = 0$ ist, so werden $\frac{u_1}{u_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$, $\frac{u_2}{u_0} =$

$\alpha_1 \alpha_3 + \ldots + \alpha_{p-1} \alpha_p, \ldots, \frac{u_p}{u_0} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, und folglich sind α_1, α

die Wurzeln der Gleichung $u_0 u^p - u_1 u^{p-1} + u_2 u^{p-2} + \ldots + (-1)$

Ist die Resultante R_m durch die Coefficienten a und b ratio gestellt, so ist es auch hier leicht, die Functionen $u_0, u_1, \ldots,$ blosse Differentiationen von R_m zu finden.

Denn es ist

$$u_0 = \Sigma f_{p+1} \cdot f_{p+2} \ldots f_m = R_{m-p} = \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p}.$$

Ferner findet man

$$u_1 = \frac{1}{1.2\ldots(p-1)} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-1} . \partial b_{n-1}},$$

$$u_2 = \frac{1}{1.2\ldots(p-2).1.2} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-2} . \partial b^2_{n-1}}, \ldots,$$

$$u_q = \frac{1}{1.2\ldots(p-q).1.2\ldots q} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-q} . \partial b^q_{n-1}}, \ldots,$$

$$u_p = \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b^p_{n-1}}.$$

Genügen also die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$ der Gleichung $f(x)$ sind diese die Wurzeln folgender Gleichung n^{ten} Grades:

$$\frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p} u^p - \frac{p}{1} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-1} . \partial b_{n-1}} u^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-2} . \partial b^2_{n-1}} u^{p-}$$

$$\ldots + (-1)^p \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b^p_{n-1}} = 0.$$

III. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Es mögen nun in den Gleichungen $F(x) = 0$ und $f(x) = 0$ efficienten a und b Functionen einer zweiten Variabeln y sein Grad durch den Index angegeben ist, so stellen $F(x, y) = 0$ un $= 0$ zwei allgemeine Gleichungen mit zwei Unbekannten resp. und n^{ten} Grade dar. Die Gleichung $R_m = 0$ enthält dann blos bekannte y, und zwar ist sie für diese vom Grade mn, da offenbar durch das oben angegebene Gewicht bestimmt wird. also mn Werthe von y, für welche die Gleichung $R_m = 0$ erfü Setzt man also diese mn Werthe von y in die Gleichungen $F($ und $f(x, y) = 0$ ein, so werden beide Gleichungen von demselben von x befriedigt. Der zu jedem Werthe von y gehörige Wer lässt sich nach § II rational durch y ausdrücken. Wir den Satz:

Zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten resp. vom m^{ten} und vom n^{ten} Grade werden durch mn Werthepaare von x und y befriedigt.

Bemerkung. Es giebt verschiedene andere Methoden, die Resultante $R_m=0$ darzustellen. Am leichtesten wird sie nach Sylvester's Methode als eine Determinante dargestellt.

IV. Drei Gleichungen mit einer Unbekannten.

Es seien drei Gleichungen $F(x)=0$, $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ resp. vom m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Grade gegeben mit den Coefficienten a, b, c. Wir suchen die Bedingungen, welche stattfinden müssen, wenn eine der Wurzeln α der Gleichung $F(x)=0$ auch den anderen beiden Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ genügen soll.

Wir bedienen uns wieder der Abkürzungen f_j statt $f(\alpha_j)$ und φ_j statt $\varphi(\alpha_j)$. Damit nun die beiden ersten Gleichungen $F(x)=0$ und $f(x)=0$ durch denselben Wurzelwerth α_j befriedigt werden, muss nach dem Vorangehenden die Bedingungsgleichung $R_m=f_1 \cdot f_2 \cdots f_m=0$ stattfinden. Damit ferner die erste und die dritte Gleichung $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ durch ebendenselben Wurzelwerth α_j befriedigt werden, ist es nicht ausreichend, die neue Bedingungsgleichung $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots \varphi_m=0$ aufzustellen. Denn diese besagt blos, dass irgend eine der Wurzeln α auch der Gleichung $\varphi(x)=0$ genügt, nicht aber, dass dies gerade diejenige Wurzel α_j ist, welche auch die zweite Gleichung $f(x)=0$ befriedigt.

Um also eine passende zweite Bedingungsgleichung zu finden, müssen wir eine Function S suchen, welche in Bezug auf die b und c rational und in Bezug auf die α symmetrisch ist, die ferner von der Art ist, dass, wenn $f(\alpha_j)=0$ ist, aus $S=0$ folgen muss, dass auch $\varphi(\alpha_j)=0$ ist.

Als einfachste Function dieser Art ergiebt sich folgende:

$$S=\varphi_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_m + \varphi_2 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdots f_m + \ldots + \varphi_m \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_{m-1} = \Sigma\, \varphi_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_m.$$

Wir wollen nun die beiden Gleichungen $R_m=0$ und $S=0$ genauer untersuchen.

Erstens sehen wir, dass, wenn zu gleicher Zeit $f_j=0$ und $\varphi_j=0$ ist, d. h. wenn die gegebenen drei Gleichungen eine gemeinsame Wurzel α_j haben, die beiden Bedingungsgleichungen $R_m=0$ und $S=0$ befriedigt werden müssen. Anders stellt sich aber das Verhältniss, wenn wir die Umkehrung dieses Satzes betrachten. Ist nämlich $R_m=0$ und zugleich $S=0$, so besagt die Bedingungsgleichung $R_m=0$, dass eine der Wurzeln α auch die Gleichung $f(x)=0$ befriedigt. Ist α_j diese Wurzel, so geht die Gleichung $S=0$ in folgende: $\varphi_j \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_{j-1} \cdot f_{j+1} \cdot f_{j+2} \cdots f_m=0$ über, d. h. wenn $f_j=0$, so ist entweder $\varphi_j=0$, oder eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_m$ verschwindet. Wir haben daher folgendes Resultat:

hammer gelungen ist, und da die dabei auftretenden Verhältnisse ganz anderer Natur als bei der conformen Abbildung sind, so kann wohl eine kurze Mittheilung dieser Untersuchungen manchen Leser dieser Zeitschrift interessiren und kann zu weiterer Untersuchung dieses Beziehungsprincips Veranlassung geben, weshalb seine Resultate hier folgen mögen.

THOMAE.

---

§ 1. Sind xy rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene und $\xi\eta$ die entsprechenden in einer andern, wobei $\xi\eta$ Functionen von x und y bedeuten, so ist der Flächeninhalt des dem Elemente $dx\,dy$ in der $\xi\eta$-Ebene entsprechenden Elementes, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

und daher ist die Bedingung der Flächengleichheit der beiden Elemente*

$$\text{A)}\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}=1.$$

Um alle möglichen Lösungen dieser Differentialgleichung zu erhalten, können wir für eine der unbekannten Veränderlichen $(\xi\eta)$ eine beliebige Function von x und y setzen. Substituiren wir $\xi=f(x,y)$, so erhalten wir leicht die Integralgleichungen

$$\eta=\int\frac{dy}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}+F(\xi)=-\int\frac{dx}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}+\Phi(\xi),$$

wobei $F(\xi)$ und $\Phi(\xi)$ willkürliche Functionen von ξ und φ sind, so dass also die allgemeinste Lösung obiger Differentialgleichung ist

$$\text{B)}\qquad \begin{cases}\xi=f(x,y),\\ \eta=\int\frac{dy}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}+F(\xi)=-\int\frac{dx}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}+\Phi(\xi).\end{cases}$$

In den Ausdrücken $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, die unter dem Integralzeichen stehen, muss nach der Differentiation x, bezw. y in Function von ξ und y, resp. von ξ und x ausgedrückt werden. (Dies ist in dem Lehrbuch der Kartenprojection von Dr. H. Gretschel [Weimar 1872, S. 175] nicht bemerkt; in den dort angeführten Beispielen freilich tritt dieser

---

* Die rechte Seite dieser Gleichung ist eigentlich $=\pm 1$. Wir können uns aber auf das positive Vorzeichen beschränken, da im Falle des negativen durch eine Vertauschung der Coordinaten ξ und η die rechte Seite stets positiv gemacht *werden kann.*

Ueber äquivalente Abbildung.

Von

Stud. Frz. Schellhammer.

(Mitgetheilt von Prof. J. Thomae.)

Hierzu Taf. III, Fig. 1—3.

Die conforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Ebenstückes auf ein anderes mit gegebener Contour führt auf interessante P bleme, welche in den letzten Jahrzehnten vielfache Bearbeitung gefun haben. Die Kartographie kennt noch eine andere brauchbare und in essante Abbildungsart, die äquivalente, welche die Flächengleichheit (o Proportionalität) des abgebildeten Stückes mit dem Bilde in allen The zum Princip macht. Diese scheint weit weniger Beachtung gefunden haben. Ich beauftragte deshalb ein Mitglied meines Seminars, He Frz. Schellhammer aus Mühlhausen i. B., sich mit der Aufgabe beschäftigen, ein gegebenes Ebenenstück auf ein anderes mit vorgegebe Contour äquivalent abzubilden, und zwar sollten vornehmlich geradl begrenzte Figuren auf den Kreis bezogen werden. Dabei zeigte sich freilich sogleich, dass die Aufgabe nicht dadurch zu einer bestimm gemacht werden könne, dass man bestimmte einzelne Linien und C touren auf gegebene andere abbildet, und dass die Auffindung von sungen, welche solche Forderungen erfüllen, bei Weitem leichter sei, bei den entsprechenden Problemen der conformen Abbildung. Nament gelingt es ausserordentlich leicht, ein beliebiges Polygon auf den K abzubilden, wenn man für die gegenseitige Beziehung Functionen zulä die nicht durch einen analytischen Ausdruck, sondern durch mehr etwa durch die Fourier'sche Reihe oder das Fourier'sche Inte erst zu einer Form zusammenzufassende Ausdrücke dargestellt werd Will man aber durch einen analytischen Ausdruck dargestellte Func nen finden, welche die Abbildung leisten, so wird die Abbildung in et erschwert. Da dies in *einer grösseren* Reihe von Fällen Herrn Sch

und es bedeute n eine positive Zahl, die grösser als die x-Coordinate des Punktes B ist. Dann bildet die Substitution

$$\xi = x,$$

$$\eta = y + \frac{m_1 - m_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^n \lambda \cos \alpha (\lambda - x)\, d\lambda$$

$$= y + \frac{m_1 - m_2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha (n - x) + \sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$$

das Viereck $ABCD$ auf das Dreieck $AB'D$ äquivalent ab; denn das Dreieck ABC wird durch dieselbe auf das Dreieck $AB'C$ verschoben, während das Dreieck ACD ungeändert bleibt. (Fig. 1.)

§ 4. Bei dieser Abbildung wurde eine einen discontinuirlichen Factor enthaltende Function angewendet, zu deren Bildung ein Fourier'sches Integral benutzt werden musste, da sich dieselbe nicht durch einen analytischen Ausdruck darstellen lässt.

Dagegen gelingt es, auf die besprochene Weise durch eine analytische Function einen Halbkreis auf eine Ellipse äquivalent abzubilden.

Setzen wir nämlich unter Annahme rechtwinkliger durch das Centrum eines Kreises gehender Axen

$$F(\xi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$\xi = x, \quad \eta = y - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2},$$

wobei a der Radius des Kreises ist, so bildet sich dadurch der über der x-Axe liegende Halbkreis äquivalent auf eine Ellipse ab, deren Halbaxen a und $\frac{1}{2}a$ sind.

In einem späteren Paragraphen werden wir die Ellipse auf einen Kreis abbilden, womit also gleichzeitig die Aufgabe gelöst wird, einen Halbkreis auf den ganzen Kreis äquivalent abzubilden. Denn wenn eine von zwei äquivalenten Abbildungen einer dritten äquivalent ist, so sind sie unter sich äquivalent.

§ 5. Das unter § 4 angeführte Beispiel kann als specieller Fall einer allgemeineren Abbildungsweise betrachtet werden.

Es lässt sich nämlich vermittelst der Abbildung durch Verschiebung paralleler Streifen jede Figur mit beliebiger Begrenzung auf eine symmetrisch zu einer Geraden liegende abbilden, wenn eine Richtung existirt, so dass alle zu derselben gezogenen Parallelen die Contour nur in zwei Punkten schneiden.

Um dies zu zeigen, wählen wir die y-Axe parallel zu dieser Richtung und bezeichnen die zur Abscisse x gehörigen Ordinaten der Be-

grenzungscurve durch $y_1 = f_1(x)$, bez. $y_2 = f_2(x)$. Nun setzen wir $F(\xi) = -\frac{1}{2}[f_1(\xi) + f_2(\xi)]$. Dann ist also

$$\xi = x, \quad \eta = y - \tfrac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)],$$

woraus hervorgeht, dass das entsprechende Bild eine symmetrisch zur x-Axe liegende Figur ist, deren Begrenzungscurve die Gleichung hat

$$4\eta^2 = [f_1(\xi) - f_2(\xi)]^2.$$

In dem obigen Beispiel ist $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, die Begrenzungslinie der Bildfigur hat daher die Gleichung $\xi^2 + 4\eta^2 = a^2$, ist also eine Ellipse.

§ 6. Es ist nützlich, einige Fälle äquivalenter Abbildung, bei der möglichst einfache Functionen in Anwendung kommen, näher zu betrachten.

Es sei

$$\xi = px, \quad \eta = \frac{y}{p}.$$

Diese den Bedingungen der Aequivalenz genügenden Gleichungen sagen aus, dass eine Figur in der Richtung der x-Axe in demselben Verhältnisse sich ausdehnt oder zusammenzieht, in welchem sie sich in der Richtung der y-Axe zusammenzieht oder ausdehnt. Diese Abbildungsweise soll daher eine durch gleichen Zug und darauf senkrechten Druck bewirkte Abbildung genannt werden.

Es entspricht hier jeder Geraden wieder eine Gerade, einem Kegelschnitte wieder ein gleichartiger Kegelschnitt, einem Kreise also eine Ellipse.

Um eine Ellipse, deren grosse und kleine Axe in dem Verhältnisse $m:n$ stehen, auf einen Kreis abzubilden, müssen wir $p = \sqrt{n:m}$ setzen, so dass wir also für diesen Fall die Relationen haben

$$\xi = x\sqrt{\frac{n}{m}}, \quad \eta = y\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Hieraus und aus § 4 ergeben sich die Gleichungen der Aequivalenz zwischen einem Halbkreis mit dem Radius a und einem ganzen Kreise:

$$\xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,x, \quad \eta = y\sqrt{2} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)},$$

wobei xy die laufenden Coordinaten der Halbkreisfläche, $\xi\eta$ die entsprechenden der Kreisfläche bedeuten.

§ 7. Setzen wir weiter

$$\xi = \xi_0 + ax + by, \quad \eta = \eta_0 + a_1 x + b_1 y,$$

so finden wir durch Substitution dieser Ausdrücke in die Differentialgleichung leicht, dass diese Gleichungen eine äquivalente Abbildung bedeuten, wenn die Coefficienten a, b, a_1, b_1 der Bedingung genügen $ab_1 - ba_1 = 1$.

Da die Abbildung $\xi - \xi_0 = \xi'$, $\eta - \eta^0 = \eta'$ offenbar nur eine Verschiebung des Bildes ohne innere Veränderung bewirkt, so kann man die Gleichungen

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a_1 x + b_1 y$$

als die allgemeinste, eine äquivalente Abbildung vermittelnde lineare Substitution betrachten, vorausgesetzt, dass $ab_1 - ba_1 = 1$ ist.

Die Bedeutung dieser Abbildung lässt sich in folgender Weise erkennen.

Wir beziehen die Punkte der xy-Ebene auf andere Axen, die zu den ursprünglichen unter einem Winkel α geneigt sind, durch die Relationen

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Es ist dann

$$\xi = x' \, (a \cos\alpha + b \sin\alpha) \, + y' \, (b \cos\alpha - a \sin\alpha),$$
$$\eta = x' \, (a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha) + y' \, (b_1 \cos\alpha - a_1 \sin\alpha).$$

Den Winkel α bestimmen wir durch die Gleichung $b \cos\alpha - a \sin\alpha = 0$, woraus sich ergiebt $tg\,\alpha = b : a$. Mit Berücksichtigung der Beziehung $ab_1 - ba_1 = 1$ ist also

$$\xi = x' \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \eta = x' \frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y'}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nun bilden wir die Figur in der $x'y'$-Ebene durch gleichen Zug und Druck auf eine andere ab, indem wir setzen

$$x' = \frac{x''}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y' = y'' \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dadurch nehmen die Ausdrücke für ξ und η die Form an

$$\xi = x'', \quad \eta = x'' \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} + y'' = y'' + \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} \xi.$$

Daraus ersehen wir, dass die durch die lineare Substitution

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a_1 x + b_1 y$$

bewirkte äquivalente Abbildung sich aus zwei bereits erwähnten Abbildungsarten zusammensetzt, nämlich aus einer durch gleichen Zug und darauf senkrechten Druck hervorgebrachten, in den durch die Gleichungen $tg\,\alpha = + b : a$ bestimmten Richtungen und aus einer Abbildung durch Verschiebung paralleler Streifen in der durch die Gleichung $tg\,\alpha = - b : a$ bestimmten Richtung.

§ 8. Als Beispiel hierzu wollen wir die Aufgabe behandeln, ein Dreieck auf ein anderes äquivalent abzubilden, dessen Winkel gegeben sind. (Fig. 2.)

Es sei ABC das gegebene Dreieck, A der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Axe auf BC senkrecht stehe; AB bilde mit der positiven Richtung der x-Axe den Winkel u und AC den Winkel v. Die vorgegebenen Winkel des Bilddreiecks seien α, β, γ.

Wir bilden zuerst das gegebene Dreieck ABC auf ein anderes $AB'C'$ ab, und zwar so, dass BC und $B'C'$ der Richtung nach zusammenfallen und das Bild von AB, nämlich AB', mit der positiven Richtung von BC den Winkel β einschliesst. Dies erreichen wir vermittelst einer Abbildung durch Verschiebung paralleler Streifen durch die Substitution

$$x' = x, \quad y' = y - (tg\, u + cotg\, \beta)\, x.$$

Nun bilden wir das so erhaltene Dreieck $AB'C'$ in der Weise auf ein drittes ab, dass der Winkel β ungeändert bleibt, während die Bilder von AB' und AC' einen vorgegebenen Winkel α einschliessen. Eine solche Abbildung wird vermittelt durch die Relationen

$$\xi = a x', \quad \eta = a_1 x' + \frac{1}{a} y',$$

wenn die Grössen a und a_1 den Bedingungen unterworfen werden

$$\frac{a_1}{a} - \frac{cotg\, \beta}{a^2} = -cotg\, \beta, \quad \frac{a_1}{a} + \frac{tg\, v - tg\, u - cotg\, \beta}{a^2} = -cotg(\alpha + \beta).$$

Daraus ergeben sich für a und a_1 die Werthe

$$a = \sqrt{\frac{tg\, v - tg\, u}{cotg\, \beta + cotg\, \gamma}}, \quad a_1 = cotg\, \beta \, \frac{cotg\, \beta + cotg\, \gamma + tg\, u - tg\, v}{\sqrt{(tg\, v - tg\, u)(cotg\, \beta + cotg\, \gamma)}}.$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$\xi = a x, \quad \eta = \left(a_1 - \frac{tg\, u + cotg\, \beta}{a}\right) x + \frac{1}{a} y,$$

so erhalten wir die Relationen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

§ 9. Es sei jetzt

$$\xi = \frac{Const.}{ax + by + c}.$$

Dieser Ausdruck nimmt eine einfachere Form an, wenn wir in der xy-Ebene die Gerade $ax + by + c = 0$ zur x-Axe machen, also eine Drehung um den Winkel $arctang \frac{b}{a}$ vornehmen und dann die neue y-Axe um die Strecke $c : \sqrt{a^2 + b^2}$ verschieben. Da durch diese Drehung und Verschiebung in der Bildebene keine innere Veränderung bewirkt wird, so bedeutet die obige Substitution ihrem Wesen nach dasselbe, was die folgende bedeutet:

$$\xi = \frac{p}{x}.$$

Beschränken wir uns also auf diese letztere Form, so erhalten wir für η, von der willkürlichen Verschiebungsfunction abgesehen,

$$\eta = -\frac{x^2 y}{p}.$$

Bei dieser Substitution bildet sich die x-Axe auf die ξ-Axe ab, während der y-Axe der unendlich ferne Punkt der ξ-Axe entspricht; eine in dem

Abstande c zur y-Axe gezogene Parallele bildet sich wieder auf eine zur η-Axe parallele Gerade $\xi = p:c$ ab, eine Parallele zur x-Axe $y = b$ dagegen auf die Curve $\eta \xi^2 = -pb$. Dem von den Axen und den Geraden $x = a_1$, $y = b_1$ gebildeten Rechteck entspricht also in der Bildebene ein ins Unendliche sich erstreckendes Flächenstück, das begrenzt ist von der ξ-Axe, der Geraden $\xi = p:a_1$ und der der ξ-Axe asymptotisch sich nähernden Curve $\eta \xi^2 = -pb_1$. Der Inhalt dieses Flächenstückes ist also $= -\int\limits_{\infty}^{p:a_1} (pb_1 : \xi^2)\, d\xi = a_1 b_1$, also in der That gleich dem Inhalt des Rechtecks.

§ 10. Wir wählen nun für ξ die Substitution

$$\xi = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y}{b_0 + b_1 x + b_2 y}.$$

Auch dieser Ausdruck lässt sich durch passende Drehung und Verschiebung der Coordinatenaxen auf einen einfacheren, dem Wesen nach mit ihm gleichbedeutenden reduciren.

Machen wir zunächst die Gerade $b_0 + b_1 x + b_2 y = 0$ zur y-Axe, so nimmt ξ die Form an

$$\xi = \frac{a'_0 + a'_1 x' + a'_2 y'}{y'} = \frac{a'_0 + a'_1 x'}{y'} + a'_2,$$

daher

$$\xi - a'_2 = \xi' = \frac{a'_0 + a'_1 x'}{y'}.$$

Verschieben wir nun noch die y'-Axe um die Strecke $a'_0 : a'_1$, indem wir setzen

$$x'' = x' + \frac{a'_0}{a'_1}, \quad y'' = y',$$

so erhalten wir

$$\xi' = \frac{a'_1 x''}{y''}.$$

Die Substitution

$$\xi = q\,\frac{x}{y}$$

kann also als die allgemeinste derartige Substitution betrachtet werden. Die Integralgleichung ergiebt dann für η den Werth

$$\eta = \frac{y^2}{2q},$$

wenn wir die willkürliche Verschiebungsfunction ausser Acht lassen.

Da hier jeder zur x-Axe parallelen Geraden wieder eine zur ξ-Axe parallele Gerade entspricht, jeder durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie aber eine Parallele zur η-Axe, so können wir vermittelst dieser Substitution ein Dreieck auf ein Parallelogramm abbilden. Dabei entspricht aber ein Eckpunkt des Dreiecks, nämlich der Coordinaten-

anfangspunkt, einer Seite des Rechtecks, wodurch die Bildfigur sehr verzerrt wird.

§ 11. Um nun die principielle Frage zu erledigen, inwieweit die äquivalente Abbildung dadurch bestimmt werden könne, dass wir gegebene Contouren einander entsprechen lassen, untersuchen wir zuerst, in welcher Weise ein Kreis auf sich selbst äquivalent abgebildet werden kann, ohne dass der Rand verschoben wird.

Zu diesem Zwecke führen wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten ein. Bezeichnen wir mit $\varrho\varphi$ die Polarcoordinaten in der einen Ebene, mit $r\vartheta$ die entsprechenden in der andern, so lautet die Differentialgleichung der Aequivalenz:

C) $$r\frac{\partial r}{\partial \varrho}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - r\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \varrho,$$

woraus sich die Integralgleichungen ergeben:

D) $$r = \psi(\varrho, \varphi), \quad \vartheta = \int \frac{\varrho\, d\varphi}{r\dfrac{\partial r}{\partial \varrho}} + \Psi(r).$$

Dabei müssen die Grössen ϱ und $\dfrac{\partial r}{\partial \varrho}$, die unter dem Integralzeichen stehen, in Function von r und φ ausgedrückt werden.

§ 12. Die Function $\Psi(r)$ ist wieder eine ganz willkürliche Function von r. Ihre geometrische Bedeutung ist der der Function $F(\xi)$ in den Gleichungen B) analog. Denn setzen wir

$$r = \varrho, \text{ also } \vartheta = \int d\varphi + \Psi(r) = \varphi + \Psi(r),$$

so sehen wir, dass jeder Punkt, der auf einem bestimmten, im Anfangspunkte centrischen Kreise liegt, auf diesem Kreise um eine Strecke verschoben wird, die eine Function des Radius dieses Kreises ist. Ein unendlich schmaler Kreisring, dessen Centrum der Anfangspunkt ist, erscheint also in dem Bilde in Bezug auf die relative Lage seiner inneren Punkte völlig unverändert, aber um einen bestimmten Winkel gedreht. Die Function $\Psi(r)$ bedeutet also hier eine Drehung concentrischer Kreisringe. Deshalb kann diese Beziehung eine Abbildung durch Drehung concentrischer Streifen genannt werden.

Da es nun unendlich viele Functionen $\Psi(r)$ giebt, die für einen bestimmten Werth von r einander gleich, z. B. $=0$ sind, so leuchtet unmittelbar ein, dass sich ein Kreis auf unendlich viele Arten auf sich selbst äquivalent abbilden lässt, ohne dass der Rand seine Lage ändert. Selbst wenn wir festsetzen, es sollen mehrere Radien sich selbst entsprechen, ist die Aufgabe noch unendlich vieldeutig, da jeder beliebige Kreis innerhalb der gegebenen Kreisfläche, der keinen jener Radien schneidet, wieder

auf unendlich viele Arten auf sich selbst abgebildet werden kann, ohne dass sich die übrigen Theile und der Rand verschieben.

Daraus folgt, dass die Aufgabe, eine Figur auf eine andere in der Weise äquivalent abzubilden, dass die Begrenzungscurven einander entsprechen, eine unendliche Anzahl von Lösungen zulässt.

§ 13. Eine der einfachsten Substitutionen für Polarcoordinaten ist

$$r = \varrho \cos\varphi, \quad \vartheta = tg\,\varphi.$$

Gehen wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurück, so haben wir an die Stelle dieser Gleichungen zu setzen

$$\xi = x \cos\frac{y}{x}, \quad \eta = x \sin\frac{y}{x}.$$

Hierbei bildet sich jede zur y-Axe parallele Gerade auf einen Kreis ab, dessen Radius gleich dem Abstande der Geraden von der y-Axe ist, während jeder durch den Anfangspunkt gehenden Geraden wieder eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade entspricht; der x-Axe entspricht die ξ-Axe, der y-Axe der Nullpunkt. Ferner sehen wir, dass jede Gerade, welche mit der positiven Richtung der x-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente ein Multiplum von 2π ist, sich auf die positive Richtung der x-Axe abbildet. Der ganze Flächenraum zwischen der y-Axe und der in dem Abstande a zu derselben gezogenen Parallelen bildet sich also unendlich oft auf den Kreis mit dem Radius a ab.

Einem Paralleltrapez, das von den Geraden $x = a_1$, $x = a_2$, $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ gebildet wird, entspricht das von den Kreisen $r = a_1$, $r = a_2$ und den Geraden $\eta = \xi\, tg\, m_1$, $\eta = \xi\, tg\, m_2$ begrenzte Flächenstück. Ist $a_2 = 0$, so geht das Paralleltrapez in ein Dreieck über und das entsprechende Bild ist ein Kreissector. Damit sind wir also in den Stand gesetzt, ein Dreieck auf einen Kreissector äquivalent abzubilden.

§ 14. Es ist nun leicht, die Aufgabe dahin zu erweitern, ein Dreieck auf einen Kreissector abzubilden, der zu einem gegebenen Centriwinkel $2\pi : n$ gehört.

Wir setzen das gegebene Dreieck als ein rechtwinkliges voraus, was wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, thun dürfen, da sich nach § 8 jedes Dreieck leicht auf ein rechtwinkliges äquivalent abbilden lässt.

Es sei der der Kathete a gegenüberliegende Eckpunkt der Anfangspunkt des Coordinatensystems, dessen x-Axe mit der Kathete b der Richtung nach zusammenfalle.

Wir bilden nun das gegebene Dreieck zuerst auf ein anderes rechtwinkliges ab, in welchem die a und b entsprechende Katheten $\sqrt{2ab\pi : n}$ bez. $\sqrt{abn : 2\pi}$ sind, vermittelst der Relationen

$$x = x' \sqrt{\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{b}{a}}, \quad y = y' \sqrt{\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{a}{b}}.$$

Dieses zweite Dreieck bildet sich auf einen Kreissector ab mit dem vorgeschriebenen Centriwinkel und dem Radius $\sqrt{abn:2\pi}$ durch die Substitution

$$\xi = x' \cos\frac{y'}{x'}, \quad \eta = x' \sin\frac{y'}{x'}.$$

Die Gleichungen der Aequivalenz zwischen dem ursprünglichen Dreieck und dem Kreissector, dessen Centriwinkel $= 2\pi:n$ ist, sind also

$$\xi = x\sqrt{\frac{n}{2\pi}\cdot\frac{a}{b}} \cos\frac{y}{x}\frac{2\pi}{n}\frac{b}{a}, \quad \eta = x\sqrt{\frac{n}{2\pi}\cdot\frac{a}{b}} \sin\frac{y}{x}\frac{2\pi}{n}\frac{b}{a}.$$

§ 15. Setzen wir in diesen Gleichungen $n = 2$, so sind damit Beziehungen gefunden, welche das gegebene Dreieck auf einen Halbkreis mit dem Radius $\sqrt{ab:\pi}$ äquivalent abbilden. Diese sind also

$$\xi = x\sqrt{\frac{a}{b\pi}} \cos\frac{y}{x}\frac{b\pi}{a}, \quad \eta = x\sqrt{\frac{a}{b\pi}} \sin\frac{y}{x}\frac{b\pi}{a}.$$

Da wir nun diesen Halbkreis nach § 6 auf einen ganzen Kreis abbilden können, so sind wir nun auch im Stande, das Dreieck auf den ganzen Kreis äquivalent abzubilden, und zwar durch die Relationen

$$\xi = x\sqrt{\frac{a}{2\pi b}} \cos\frac{y}{x}\frac{b\pi}{a},$$

$$\eta = x\sqrt{\frac{2a}{\pi b}} \sin\frac{y}{x}\frac{b\pi}{a} - \sqrt{\frac{ab}{2\pi} - x^2\frac{a}{2\pi b}\cos^2\frac{y}{x}\frac{b\pi}{a}}.$$

Bei dieser Substitution entspricht den vom Anfangspunkte nach der gegenüberliegenden Seite a gezogenen Geraden $y = mx$ eine Schaar von symmetrisch zu der ξ-Axe liegenden Ellipsenbogen

$$\eta = 2\xi\, tg\, m\frac{b\pi}{a} - \sqrt{\frac{ab}{2\pi} - \xi^2},$$

die Ellipsen angehören, welche alle ihr Centrum im Mittelpunkte des Kreises haben, durch die Endpunkte des Durchmessers $\xi = 0$ hindurchgehen und die beiden zu diesem Durchmesser parallelen Tangenten berühren.

Unter diesen Ellipsenbogen sind als specielle Fälle enthalten: die beiden unter der ξ-Axe liegenden Kreisbogenquadranten als Bilder der Kathete b und der Hypotenuse c und der Durchmesser $\xi = 0$ als Bild der Halbirungstransversalen der Kathete a. Diese Kathete bildet sich auf den über der ξ-Axe liegenden Halbkreis ab.

(In Fig. 3 sind zwei solche Ellipsenbogen in die Kreisfläche eingezeichnet, $A'D'$ und $A'E'$, welche den Geraden AD und AE in dem Dreieck entsprechen.)

Einem Kreise $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$ innerhalb der Kreisfläche entspricht in dem Dreieck die transcendente Curve

sprechen im Allgemeinen, wenn nämlich das abzubildende Ebenenstück nach der einen Richtung hin nicht von zwei zur y-Axe parallelen Linien begrenzt ist, zwei Punkte, und zwar diejenigen, in welchen die Contour von der x-Axe getroffen wird je einer Seite des Rechtecks.

Eine Figur von der genannten Eigenschaft bildet sich also auf ein Rechteck ab durch die Substitution

$$\xi = \frac{a}{2}\int_0^x [f_1(x) - f_2(x)]\,dx, \qquad \eta = \frac{1}{a}\,\frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)},$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die gleiche Bedeutung haben wie in § 5.

§ 19. Die Aufgabe, eine solche Figur auf den Kreis äquivalent abzubilden, ist also darauf zurückgeführt, ein Rechteck in der Weise auf einen Kreis abzubilden, dass zwei gegenüberliegende Seiten zwei diametral gegenüberliegenden Punkten der Kreisperipherie entsprechen. Letztere Aufgabe haben wir in § 16 bereits gelöst. Ist F der Flächeninhalt des abzubildenden Ebenenstückes, so gelangen wir durch Verbindung der dort entwickelten Formeln mit denen des § 18 zu den Relationen

$$\xi = 2\sqrt{\frac{1}{\pi N}}\int_0^x [f_1(x) - f_2(x)]\,dx,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{\pi N}\left\{F^2 - 4\left[\int_0^x (f_1(x) - f_2(x))\,dx\right]^2\right\}} \cdot \sin\frac{\pi}{2}\,\frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)},$$

wobei

$$N = F + \cos\frac{\pi}{2}\,\frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)}\sqrt{F^2 - 4\left[\int_0^x (f_1(x) - f_2(x))\,dx\right]^2}$$

und die y-Axe so gewählt ist, dass dieselbe das Ebenenstück in zwei gleiche Theile theilt.

§ 20. Wir können indess auch noch andere Beziehungen aufstellen, welche den Bedingungen dieser Aufgabe entsprechen. Wir bilden nämlich den Kreis nach der in § 18 angegebenen Methode auf ein Rechteck ab durch die Substitutionen

$$x = a\int_0^\xi \sqrt{\frac{F}{\pi} - \xi^2}\,d\xi = \frac{a}{2}\left(\frac{F}{\pi}\arcsin\xi\sqrt{\frac{\pi}{F}} + \xi\sqrt{\frac{F}{\pi} - \xi^2}\right),$$

$$y = \frac{1}{a}\,\frac{\eta}{\sqrt{\frac{F}{\pi} - \xi^2}},$$

wobei wir jetzt mit $x\,y$ die Coordinaten des Rechtecks, mit $\xi\,\eta$ die entsprechenden der Kreisfläche bezeichnen.

Wählen wir die Seiten g und h des Rechtecks zu den Axen, so bildet sich dasselbe nach § 10 durch die Substitutionen $x' = \sqrt{x}$, $y' = 2y\sqrt{x}$ so auf ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\sqrt{g}$ und $2h\sqrt{g}$ ab, dass die y-Axe dem Nullpunkte entspricht, also nach § 15 auf einen Kreis durch die Relationen

$$\xi = \sqrt{\frac{xh}{\pi}} \cdot \cos\frac{y\pi}{h}, \quad \eta = 2\sqrt{\frac{xh}{\pi}}\sin\frac{y\pi}{h} - \sqrt{\frac{gh}{\pi} - \frac{xh}{\pi}\cos^2\frac{y\pi}{h}}.$$

Dabei bildet sich der Kreis $\xi^2 + \eta^2 = p^2$ ab auf die transcendente Curve

$$\left(p^2 - \frac{4xh}{\pi}\sin^2\frac{y\pi}{h} - \frac{gh}{\pi}\right)^2 = \frac{16xh}{\pi}\sin^2\frac{y\pi}{h}\left(\frac{gh}{\pi} - \frac{xh}{\pi}\cos^2\frac{y\pi}{h}\right),$$

welche für $r^2 = \frac{gh}{\pi}$ die Seiten des Rechtecks darstellt. Der Geraden $y = b$ entspricht, so lange $x \leqq g\, sec^2(b\pi : h)$, ein Ellipsenbogen

$$\eta = 2\xi\, tg\frac{b\pi}{h} - \sqrt{\frac{gh}{\pi} - \xi^2},$$

während der Geraden $x = a$ die Curve vierten Grades entspricht

$$\left(\eta + \sqrt{\frac{gh}{\pi} - \xi^2}\right)^2 = \frac{4}{\pi}(ah - \pi\xi^2).$$

Weiter unten werden wir noch ein Verfahren angeben, um ein Rechteck durch eine analytische Function auf einen Kreis äquivalent abzubilden, ohne dass dabei eine Seite des Rechtecks einem Punkte auf der Peripherie des Kreises entspricht.

§ 18. Wir gehen nun zu einer allgemeineren Abbildungsmethode über, nach welcher beliebige Figuren, die bezüglich ihrer Begrenzung gewisse Bedingungen erfüllen, auf den Kreis äquivalent abgebildet werden können.

Jede Figur, deren Begrenzungscurve von einem beliebigen Strahle irgend eines Parallelstrahlenbüschels nur in zwei Punkten getroffen wird, lässt sich auf ein Rechteck äquivalent abbilden.

Denn bilden wir diese Figur nach § 5 zunächst auf eine zur x-Axe symmetrisch liegende ab, deren Begrenzungscurve die Gleichung habe $y = \pm f(x)$, und setzen nun

$$\xi = a\int_0^x f(x)\,dx, \quad \eta = \frac{1}{a}\,\frac{y}{f(x)},$$

wobei a eine beliebige Constante bedeutet, so entspricht dem über der x-Axe liegenden Theile der Begrenzungslinie die Gerade $\eta = 1 : a$, dem unteren Theile die Gerade $\eta = -1 : a$, während das Bild einer zur y-Axe parallelen Geraden eine zur η-Axe parallele Gerade ist. Auf diese Weise bildet sich die ganze Figur auf ein Rechteck ab; dabei ent-

Wählen wir die Seiten g und h des Rechtecks wieder zu den Axen, so liefert uns die angegebene Methode die Beziehungen

$$\eta = -\tfrac{1}{4}\, tg\frac{\pi}{2}(K+1) + \tfrac{1}{4}\sqrt{tg^2\frac{\pi}{2}(K+1) + \frac{8F}{\pi} + \frac{16M}{\pi}},$$

$$\xi = \sqrt{\frac{F}{\pi} - \eta^2} - \sqrt{\frac{2F + 4M - 4\eta^2\pi}{\pi}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$K = \frac{\sqrt{\frac{xh}{\pi}}\cos\frac{y\pi}{h}}{\sqrt{\frac{F}{\pi} - P^2}},$$

$$M = \frac{F}{\pi}\arcsin P\sqrt{\frac{\pi}{F}} + P\sqrt{\frac{F}{\pi} - P^2},$$

$$P = -2\sqrt{\frac{xh}{\pi}}\sin\frac{y\pi}{h} + \sqrt{\frac{gh}{\pi} - \frac{xh}{\pi}\cos^2\frac{y\pi}{h}}.$$

Hierbei entspricht der Geraden $y = \frac{h}{2}$ die ξ-Axe, der Geraden $x = \frac{g}{2}$ dagegen eine transcendente Curve.

Freiburg i. B., im Juli 1877. Frz. Schellhammer.

V.

Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung.

Von

MILINOWSKI,

Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass.

I. Artikel.

Nachdem ich einige Haupteigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetischem Wege abgeleitet habe (vergl. diese Zeitschr. Jahrg. 1876), versuche ich im Folgenden, dasselbe für die Curven vierter Ordnung zu thun. Es kam mir darauf an, mit alleiniger Hilfe der Steiner'schen Principien und ohne Benutzung des Gleichheitszeichens folgende Sätze abzuleiten:

1. Ist eine Curve vierter Ordnung durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden. Die sämmtlichen Grundpunkte des einen Büschels und einer des andern können beliebig auf der Curve angenommen werden.

2. Ist eine Curve vierter Ordnung durch zwei projectivische Büschel erster und dritter Ordnung erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden. Der Grundpunkt des Büschels erster Ordnung und sechs Grundpunkte des Büschels dritter Ordnung sind beliebig auf der Curve zu wählen.

3. Eine Curve vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel zweiter Ordnung erzeugt ist, kann auch durch zwei projectivische Büschel erster und dritter Ordnung erzeugt werden.

4. Alle (auf eine der genannten Arten) erzeugten Curven vierter Ordnung, welche 13 Punkte gemeinschaftlich haben, gehen ausserdem *noch durch* dieselben drei Punkte.

5. Eine Curve vierter Ordnung ist durch 14 Punkte bestimmt.

In einer im Jahre 1868 mit dem Steiner'schen Preise gekrönten Abhandlung „Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades" von Kortum sagt der Verfasser, dass ihm von diesen Sätzen keine stichhaltigen geometrischen Beweise bekannt wären und dass der strenge Beweis derselben eine vollständige geometrische Theorie der Curven vierter Ordnung involvirt.

Wie ich hoffe, ist es mir gelungen, nicht nur diese Sätze, sondern auch die Hauptpolareigenschaften der Curven vierter Ordnung auf geometrischem Wege abzuleiten. Hauptsächlich stütze ich mich dabei auf die Eigenschaften des Curvennetzes dritter Ordnung. Die benutzten Methoden lassen sich übrigens verallgemeinern, so dass die Eigenschaften der Curven fünfter Ordnung aus denen der Curven vierter Ordnung, die der Curven sechster Ordnung aus denen der Curven fünfter Ordnung u. s. f. sich herleiten liessen. Dadurch gelang es, von einer Curve n^{ter} Ordnung folgende Sätze zu beweisen:

6. Ist eine Curve n^{ter} Ordnung durch zwei projectivische Büschel erster und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel oder auch durch zwei Büschel zweiter und $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden. Jede so erzeugte Curve n^{ter} Ordnung wird von einer Curve dritter Ordnung in $3n$ Punkten geschnitten.

Jede auf eine der genannten Arten erzeugte Curve n^{ter} Ordnung kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel dritter und $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden.

Die so erzeugten Curven n^{ter} Ordnung sind durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ ihrer Punkte bestimmt.

Wenn man die Zahl der Punkte bestimmen könnte, in denen sich zwei Curven n^{ter} und m^{ter} Ordnung, $m > 4$, schneiden, so würde sich der letzte Satz dahin verallgemeinern lassen, dass eine Curve n^{ter} Ordnung, die durch zwei projectivische Büschel erster und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt ist, auch durch zwei projectivische Büschel m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann.

Nach der in 44 angegebenen Methode, welche die Verallgemeinerung der von Kortum a. a. O. angewendeten ist, lässt sich durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebene Punkte vermittelst projectivischer Büschel erster und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder zweiter und $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung eine Curve n^{ter} Ordnung legen. Könnte man dasselbe vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung thun, so würde sich, wie in 35a, die Umkehrung des ersten Theiles des in 6 angegebenen Satzes ableiten lassen.

I.

Allgemeine Eigenschaften.

1. Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente zweier projectivischen Kegelschnittbüschel ist eine Curve vierter Ordnung.

Durch irgend einen Schnittpunkt M zweier homologen Kegelschnitte lege man eine beliebige Gerade l und verbinde die Punktpaare der beiden Involutionen, in denen l von den beiden Büscheln geschnitten wird, mit zwei Punkten S und $\mathfrak{S}$, die mit M in einer Geraden liegen, so erhält man in diesen Punkten zwei projectivische Strahleninvolutionen, in denen der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht. Wir bezeichnen sie mit $S(aa_1 bb_1 cc_1 \ldots)$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \ldots)$, so dass aa_1 und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, bb_1 und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, cc_1 und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, ... entsprechende Strahlenpaare sind. Je zwei beliebige Strahlenpaare bestimmen ein Vierseit. Ist g eine beliebige Gerade und sind $\mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{B}_1^2 \mathfrak{C}_1^2 \ldots$ die Kegelschnitte, welche die Seiten je eines von entsprechenden Strahlenpaaren gebildeten Vierseits und g berühren, so lässt sich zeigen, dass alle diese Kegelschnitte eine Schaar von vier festen Tangenten bilden. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2$, welche den Vierseiten $aa_1 \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $bb_1 \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ eingeschrieben sind, haben noch drei gemeinschaftliche Tangenten hik und bestimmen eine Kegelschnittschaar $(\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2)$ von vier gemeinschaftlichen Tangenten $g\,h\,i\,k$. Den Kegelschnitt dieser Schaar, welcher c berührt, nennen wir C^2 und die zweite Tangente, die sich ausser c von S an C^2 ziehen lässt, c', dann sind die drei Strahlenpaare $aa_1 bb_1 cc'$ in Involution und es muss c' mit c_1 zusammenfallen. Hieraus lässt sich schliessen, dass die Kegelschnitte der Schaar $(\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2)$ die Strahlenpaare der Involution (S) berühren, und ebenso folgt, dass sie auch die Strahlenpaare von $(\mathfrak{S})$ berühren müssen. Zu den Kegelschnitten der Schaar gehört auch derjenige $\mathfrak{S}^2$, welcher die Gerade $S\mathfrak{S}$ berührt. Lassen wir jedem Kegelschnitte der Schaar dasjenige Strahlenpaar entsprechen, welches er berührt, so sind die Kegelschnitte projectivisch auf die Strahlenpaare bezogen, so dass also

$$S(aa_1, bb_1, cc_1, \ldots, ss_1) \barwedge (\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2, C^2, \ldots, \mathfrak{S}^2)$$

und

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{s}\mathfrak{s}_1) \barwedge (\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2, C_1^2, \ldots, \mathfrak{S}^2)$$

ist, wenn $C^2 \ldots$ und $C_1^2 \ldots$ diejenigen Kegelschnitte der Schaar $(ghik)$ sind, welche $cc_1, \ldots$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \ldots$ berühren. Da aber $(S) \barwedge (\mathfrak{S})$ ist, so muss auch

$$(\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 C^2 \ldots \mathfrak{S}^2) \barwedge (\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 C_1^2 \ldots \mathfrak{S}^2)$$

sein und daher müssen $C^2 \ldots$ und $C_1^2 \ldots$ zusammenfallen.

Die sechs Schnittpunkte (gh), (ik), (gk), (ih), (gi), (kh) sind die Ecken eines vollständigen Vierseits und die drei Geradenpaare, welche von S und $\mathfrak{S}$ nach den drei Gegeneckenpaaren (gh) und (ik), (gi) und

(hk), (hi) und (gk) gezogen werden können, sind drei Strahlenpaare der Involutionen $S(aa_1\ldots)$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\ldots)$; daher liegen diese Ecken auf der Ortscurve der Schnittpunkte der homologen Strahlenpaare der projectivischen Involutionen (S) und $(\mathfrak{S})$. Wir lassen die beliebige Gerade g um den Punkt (gh) sich drehen, so muss auch der Punkt (ik) fest bleiben, weil in diesen beiden Punkten sich entsprechende Strahlen der Involutionen treffen. Die übrigen vier Ecken durchlaufen die ganze Ortscurve, so dass die variablen Strahlen g, h und i, k entsprechende Strahlenpaare zweier projectivischen Involutionen mit den Scheiteln (gh) und (ik) bilden; denn es sind Tangenten an die Kegelschnitte einer Schaar mit vier festen Tangenten $aa_1\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ oder $bb_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \ldots$ und wir können je zwei Paare, die denselben Kegelschnitt berühren, einander zuweisen, wodurch eine projectivische Beziehung hergestellt ist. Es wird also die Ortscurve aus irgend zwei Gegenecken eines der erhaltenen eingeschriebenen vollständigen Vierseite durch zwei projectivische Involutionen projicirt, und wenn man irgend einen Punkt mit den Gegeneckenpaaren dieser unendlich vielen eingeschriebenen vollständigen Vierseite verbindet, so bilden die Strahlen eine quadratische Involution, denn man kann jeden Punkt der Curve als eine Ecke eines vollständigen ihr eingeschriebenen Vierseits ansehen. Sind nun $M_0 M_1 M_2$ irgend drei Punkte der Ortscurve, so werden von ihnen alle Punkte derselben durch quadratische Involutionen projicirt, deren Doppelstrahlen $\mu_0\mu'_0$, $\mu_1\mu'_1$, $\mu_2\mu'_2$ sein mögen. Wir betrachten sie als Kegelschnitte, so bestimmen sie ein Netz, dessen Tripelcurve (vergl. Schroeter, Steiner's Vorlesungen) mit unserer Ortscurve zusammenfällt. Dann sind (gh) und (ik) irgend zwei Gegenecken eines eingeschriebenen vollständigen Vierseits, so bilden $M_0(gh)$ und $M_0(ik)$, $M_1(gh)$ und $M_1(ik)$, $M_2(gh)$ und $M_2(ik)$ Strahlenpaare der Involutionen in M_0, M_1, M_2. Jedes von ihnen wird durch die Doppelstrahlen $\mu_0\mu'_0$, $\mu_1\mu'_1$, $\mu_2\mu'_2$ harmonisch getrennt, so dass also (gh) und (ik) conjugirte Punkte in Bezug auf die drei Kegelschnitte $(\mu_0\mu'_0)$, $(\mu_1\mu'_1)$, $(\mu_2\mu'_2)$ sind. Dasselbe gilt von je zwei Gegenecken eines der unendlich vielen eingeschriebenen Vierseite, woraus folgt, dass die Schnittpunkte homologer Strahlenpaare der projectivischen Involutionen (S) und $(\mathfrak{S})$ auf einer Curve dritter Ordnung, der Tripelcurve des durch $(\mu_0\mu'_0)$, $(\mu_1\mu'_1)$, $(\mu_2\mu'_2)$ constituirten Kegelschnittnetzes liegen.

Diese Curve trifft die Gerade l in drei Punkten, so dass also auf l vier Schnittpunkte homologer Kegelschnitte der im Satze genannten projectivischen Kegelschnittbüschel liegen. Daraus folgt aber, dass der Ort aller Schnittpunkte solcher Kegelschnitte eine Curve vierter Ordnung ist. Sie geht durch die acht Grundpunkte der Büschel und hat soviel Doppelpunkte, als diese Büschel gemeinschaftlic[h]e Grundpunkte haben.

Das erhaltene Resultat giebt folgenden Satz:

2. **Der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare zweier projectivischen Involutionen ist eine Curve dritter Ordnung, wenn der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, sonst eine Curve vierter Ordnung, welche die beiden Scheitel zu Doppelpunkten hat.**

Wir nennen diese Scheitel S und $\mathfrak{S}$ und legen durch den Schnittpunkt A zweier homologen Strahlen zwei Gerade g und $\mathfrak{g}$, so werden diese von den beiden Strahleninvolutionen in zwei projectiv*is*chen Punktinvolutionen geschnitten, in welchen A sich selbst entspricht. Daher werden die Geraden, welche homologe Punkte verbinden, von einer Curve dritter Classe eingehüllt, die auch g und $\mathfrak{g}$ zu Tangenten hat. Da diese durch sieben Tangenten ausser g und $\mathfrak{g}$ bestimmt ist, so muss für den Fall, dass der gemeinsame Strahl der Involutionen (S) und ($\mathfrak{S}$) sich nicht selbst entspricht, die von diesen erzeugte Curve K^4 vierter Ordnung ausser durch die Doppelpunkte S und $\mathfrak{S}$ durch acht andere Punkte vollständig und eindeutig bestimmt sein.

Aus dem Gesagten ergiebt sich leicht die Construction einer Curve vierter Ordnung, wenn von derselben die beiden Doppelpunkte und acht andere Punkte gegeben sind. Wenn aber ausser den beiden Doppelpunkten S und $\mathfrak{S}$ nur noch sieben andere Punkte $A A_1 \dots A_6$ gegeben sind, so werden sich durch dieselben unendlich viele Curven vierter Ordnung legen lassen. Man ziehe zu dem Zwecke durch A zwei beliebige Gerade g und $\mathfrak{g}$, schneide sie durch die Strahlen $S(A_1 \dots A_6)$ und $\mathfrak{S}(A_1 \dots A_6)$ in $B_1 \dots B_6$ und $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_6$, ziehe die Geraden $B_1\mathfrak{B}_1, \dots, B_6\mathfrak{B}_6$, so bestimmen diese mit g und $\mathfrak{g}$ eine Schaar von Curven dritter Classe, die noch eine neunte gemeinschaftliche Tangente haben, welche g und $\mathfrak{g}$ in B_7 und $\mathfrak{B}_7$ schneidet. Der Schnittpunkt der Geraden SB_7 und $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_7$ ist ein allen Curven gemeinsamer Punkt. Hieraus folgt für Curven, welche durch projectivische Involutionen erzeugt sind:

3. **Durch acht Punkte lässt sich nur eine Curve vierter Ordnung legen, welche zwei gegebene Punkte zu Doppelpunkten hat.**

   Alle Curven vierter Ordnung, welche zwei gegebene Punkte zu Doppelpunkten und sieben gemeinschaftliche Punkte haben, schneiden sich noch in einem achten Punkte.

Ist A irgend ein Punkt von K^4 und man dreht die erzeugenden involutorischen Strahlenbüschel um S und $\mathfrak{S}$ so weit, dass SA und $\mathfrak{S}A$ in eine Gerade zusammenfallen, so ist der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare eine Curve $\mathfrak{K}^3$ dritter Ordnung. Jedem Punkte der einen Curve entspricht ein bestimmter der andern und umgekehrt. Auf K^4 [illegible] *zwei beliebige* Punkte $M N$, deren entsprechende

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sein mögen; ist dann $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{K}^3$ der gegenüberliegende Punkt der Punkte $S\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, so kann man sich $\mathfrak{K}^3$ erzeugt denken durch die projectivischen Büschel $(S\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{P})$. Alle Elemente der beiden Büschel werden von S und $\mathfrak{S}$ durch projectivische Strahlenbüschel projicirt; dreht man nun wieder die Involutionen in S und $\mathfrak{S}$ und sämmtliche ebengenannten Strahlenbüschel um S und $\mathfrak{S}$ so, dass die in $S\mathfrak{S}$ vereinigten Strahlen sich in A schneiden, so werden die Kegelschnitte des Büschels $(S\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ in die Kegelschnitte des Büschels $(S\mathfrak{S}MN)$ und die Strahlen des Büschels $(\mathfrak{P})$ in die Kegelschnitte des Büschels $(S\mathfrak{S}AP)$ sich verwandeln und die projectivischen Büschel $(S\mathfrak{S}MN)$ und $(S\mathfrak{S}AP)$ müssen die Curve K^4 erzeugen. Da AMN beliebige Punkte derselben sind, so folgt der Satz:

4. Die Curve K^4, der geometrische Ort der homologen Strahlenpaare projectivischer Involutionen, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, welche die Scheitel der Involutionen zu gemeinschaftlichen Grundpunkten haben. Von den anderen vier Grundpunkten können drei auf K^4 beliebig gewählt werden.

Die Strahlen a und a_1 eines Strahlenpaares von (S) werden von den Strahlenpaaren von $(\mathfrak{S})$ in den Punktpaaren zweier projectivischen Involutionen geschnitten, in denen S ein sich selbst entsprechender Punkt ist. Daher werden die Verbindungslinien homologer Punktpaare von einer Curve dritter Classe eingehüllt, die aber in den Punkt $\mathfrak{S}$ und einen Kegelschnitt $[aa_1]$ zerfällt, welcher die Geraden a und a_1 und die beiden Doppelstrahlen $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ des Büschels $(\mathfrak{S})$ berührt. Wählen wir bb_1, cc_1, ..., so erhalten wir andere Kegelschnitte $[bb_1]$, $[cc_1]$, ..., welche sämmtlich $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ zu Tangenten haben. Wenn wir aber die Strahlenpaare von $(\mathfrak{S})$ durch die von (S) schneiden, so entstehen auf dieselbe Art Kegelschnitte $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$, $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1]$, $[\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1]$, ..., welche die Doppelstrahlen $d'd''$ von (S) berühren. Die Kegelschnitte $[aa_1]$ und $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$ haben die Geraden, welche die Punkte $(a\mathfrak{a})$ und $(a_1\mathfrak{a})$, $(a\mathfrak{a}_1)$ und $(a_1\mathfrak{a})$ verbinden, zu gemeinschaftlichen Tangenten; die beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten sind die Verbindungslinien $\delta'\delta''$ der Punktpaare $(\mathfrak{d}'d'')$, $(\mathfrak{d}''d')$ und $(\mathfrak{d}'d')$, $(\mathfrak{d}''d'')$. Also bilden alle Kegelschnitte $[aa_1]$, $[bb_1]$, ... eine Schaar von vier festen Tangenten $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''\delta'\delta''$ und alle Kegelschnitte $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$, $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1]$, . . eine Schaar von vier festen Tangenten $d'd''\delta'\delta''$. Diese beiden Kegelschnittschaaren stehen aber in projectivischer Beziehung, wenn wir je zwei Kegelschnitte, wie $[aa_1]$ und $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$, $[bb_1]$ und $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1]$, ... einander zuordnen, und ihre gemeinschaftlichen Tangenten werden daher von einer Curve K_4 vierter Classe eingehüllt, welche $\delta'\delta''$ zu Doppeltangenten hat. Dabei schneiden sich die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier homologen Kegelschnite auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$. Es bilden die

Polaren von S bezüglich der Strahlenpaare von ($\mathfrak{S}$) und die Polaren von $\mathfrak{S}$ bezüglich der Strahlenpaare von (S) zwei projectivische Strahlenbüschel und diese erzeugen einen Kegelschnitt, auf dem sich die gemeinschaftlichen Tangenten schneiden müssen. Denn nennt man a' und $\mathfrak{a}'$ die Polaren von $\mathfrak{S}$ nach (aa_1) und von S nach $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$, so müssen a' und $\mathfrak{a}'$ sich in dem Schnittpunkte der Diagonalen des Vierseits $aa_1\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ treffen und diese Diagonalen sind die gemeinschaftlichen Tangenten von $[aa_1]$ und $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$.

Wir gehen noch auf den Fall ein, dass der gemeinschaftliche Strahl s der beiden Involutionen sich selbst entspricht. In diesem Falle sind die Punktpaare S und $(\delta'\delta'')$, sowie $\mathfrak{S}$ und $(\delta'\delta'')$ homologe Kegelschnitte der beiden Schaaren $(d'd''\delta'\delta'')$ und $(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''\delta'\delta'')$, denn die Kegelschnitte $[ss_1]$ und $[s\mathfrak{s}_1]$ degeneriren in jene Punktpaare. Daher werden die gemeinschaftlichen Tangenten homologer Kegelschnitte von einer Curve K_3 dritter Classe eingehüllt. Sie schneiden sich auf einer Geraden k, in welche der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ degeneriren muss, weil der gemeinsame Strahl s gleichzeitig Polare von S in Bezug auf das Strahlenpaar $(s\mathfrak{s}_1)$, als auch von $\mathfrak{S}$ in Bezug auf (ss_1) ist und die Strahlenbüschel, welche $\mathfrak{K}^2$ erzeugten, in perspectivischer Lage sich befinden. Die Gegenecken der durch die Schnittpunkte homologer Strahlenpaare entstandenen Vierecke heissen in unserem speciellen Falle conjugirte Punkte. Wir haben jetzt folgendes Resultat erhalten:

5. Die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Strahlenpaare zweier projectivischen Involutionen verbinden, haben als Enveloppe eine Curve vierter Classe K_4 mit zwei Doppeltangenten und schneiden sich in den Punkten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}^2$, welcher K_4 in vier Punkten berührt. Die Doppeltangenten sind die Diagonalen $\delta'\delta''$ des von den beiden Doppelstrahlenpaaren gebildeten Vierecks.

Entspricht in den projectivischen Involutionen der gemeinschaftliche Strahl sich selbst, so ist die Enveloppe der Diagonalen der von entsprechenden Strahlenpaaren gebildeten Vierecke eine Curve K_3 dritter Classe, welche δ' und δ'' zu Tangenten hat, und der Ort der Schnittpunkte dieser Diagonalen eine Gerade k, welche K_3 berührt. Oder:

Die Geraden, welche die conjugirten Punkte der durch die Büschel (S) und ($\mathfrak{S}$) erzeugten Curve verbinden, werden von einer Curve K_3 dritter Classe eingehüllt.

Wenn man zwei involutorische Strahlenbüschel (S) und ($\mathfrak{S}$) auf alle möglichen Arten projectivisch aufeinander bezieht, so wird der geometrische Ort der Schnittpunkte homologer Elemente im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung sein; in dem Falle aber, dass der gemeinschaftliche Strahl sich selbst entspricht, reducirt sich die Curve vierter Ordnung

auf eine Curve dritter Ordnung und die Gerade $S\mathfrak{S}$. Es entsteht die Frage, ob man noch auf andere Arten projectivische Beziehungen zwischen den Involutionen herstellen kann, derart, dass der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare eine Curve dritter Ordnung wird. Und in der That kann man noch auf zwei verschiedene Arten die Strahlenpaare projectivisch einander so zuordnen, dass sich die homologen Elemente auf einer Curve dritter Ordnung schneiden, die jedoch in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Die Doppelstrahlenpaare $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ bilden ein Viereck, dessen Diagonalen $\delta'\delta''$ sind. Auf jeder derselben schneiden sich die Strahlenpaare beider Involutionen. Denn nennen wir D' und D'' die Schnittpunkte $(\mathfrak{d}'\mathfrak{b}')$ und $(\mathfrak{d}''\mathfrak{b}'')$, so ist $D'D''$ die Diagonale δ' und es trennen diese Punkte die Schnittpunkte von δ' mit je zwei Strahlen irgend eines Paares harmonisch, und in jedem solchen Punktpaare müssen sich deshalb die Strahlen von zwei Paaren der Büschel (S) und $(\mathfrak{S})$ treffen. Dasselbe gilt von δ''. Ordnet man je zwei Strahlenpaare einander zu, die sich auf δ' schneiden, so hat man zwischen den Involutionen eine projectivische Beziehung hergestellt, in welcher der gemeinschaftliche Strahl $S\mathfrak{S}$ sich selbst entspricht. Es ist daher die Ortscurve von der dritten Ordnung und da die Gerade δ' ein Theil derselben ist, so muss der andere Theil ein Kegelschnitt sein, welcher durch S und $\mathfrak{S}$ geht; da also die Schnittpunkte homologer Strahlen auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen die Verbindungslinien derselben sich in einem Punkte schneiden. Es folgt:

6. Wenn man die Strahlenpaare zweier Involutionen auf alle möglichen Arten einander projectivisch zuordnet, so giebt es drei Arten der Zuordnung, bei welchen der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente in die Verbindungslinie der Scheitel und in eine Curve dritter Ordnung zerfällt, welche letztere in zwei Fällen wieder in eine Gerade und einen Kegelschnitt degenerirt. In den letzten Fällen zerfällt die Curve K_3 dritter Classe, die Enveloppe der Verbindungslinien der Schnittpunkte homologer Elemente, in einen Kegelschnitt und einen Punkt.

   Es giebt drei Punktpaare, welche in Bezug auf alle Strahlenpaare beider Büschel zugleich conjugirte Pole sind, nämlich die Scheitel $S\mathfrak{S}$ und die Endpunkte $D'D''$ und $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ der beiden Diagonalen δ' und δ'' desjenigen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte der beiden Doppelstrahlenpaare der Involutionen sind.

Hier sei es mir erlaubt, auf einen Irrthum aufmerksam zu machen, der von Herrn Durège auf S. 84 des 5. Bandes der mathematischen Annalen in der Abhandlung „Ueber die Curve dritter Ordnung, welc

den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet", begangen zu sein scheint, indem er behauptet, dass das Punktpaar $S\mathfrak{S}$ das einzige wäre, welches in Bezug auf alle Strahlenpaare beider Büschel ein Paar von conjugirten Polen bildet.

Die Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1, ... der Involution (S) sind in projectivischer Beziehung mit den Diagonalenpaaren $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, ... der von entsprechenden Strahlenpaaren, wie aa_1 und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, bb_1 und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, cc_1 und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, ... gebildeten Vierseite und daher auch mit den Schnittpunkten A, B, Γ, ... der einzelnen Diagonalenpaare. Wir schneiden eine Gerade l durch aa_1, bb_1, cc_1, ... in AA_1, BB_1, CC_1, ..., so ist, für den Fall, dass $S\mathfrak{S}$ sich selbst entspricht,

$$k(A, B, \Gamma, \ldots) \overline{\wedge}\, l(AA_1, BB_1, CC_1, \ldots).$$

Die Enveloppe der Geraden, welche homologe Elemente verbinden, ist eine Curve dritter Classe $\mathfrak{C}_3$, welche k berührt und l zur Doppeltangente hat. Sie hat mit K_3 ausser k noch acht gemeinschaftliche Tangenten, so dass der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1, ... und $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, ... eine Curve achter Ordnung ist. In unserem Falle zerfällt dieselbe aber in die Curve K^3, die durch die Involutionen (S) und $(\mathfrak{S})$ erzeugt ist, den gemeinsamen Strahl $S\mathfrak{S}$ und die Doppelstrahlen dd', von denen jeder doppelt zu zählen ist.

Es lässt sich nun erkennen, dass die Curven K^3 und K_3 sich in neun Punkten berühren. Irgend ein Strahl durch S schneide K_3 in sechs Punkten; die Tangenten in diesen werden von einem Kegelschnitt K_2 berührt. Jedem Strahl durch S ordnen wir auf diese Art einen Kegelschnitt zu und alle diese Kegelschnitte, welche eine Schaar von vier festen Tangenten bilden, sind involutorisch geordnet, da sie eindeutig den Strahlen von (S) entsprechen. Deshalb ist auch diese involutorische Kegelschnittschaar projectivisch auf die Punktreihe $AB\Gamma$... bezogen. Die Enveloppe der von $AB\Gamma$... an die homologen Kegelschnitte gezogenen Tangenten ist eine Curve C_5 fünfter Classe, welche mit K_3 15 gemeinschaftliche Tangenten hat. Von diesen scheide man die Geraden k und $S\mathfrak{S}$ und die doppelt zu zählenden Geraden d und d' aus, so bleiben noch neun übrig. Eine von ihnen sei τ, der sie berührende Kegelschnitt K_τ der Schaar entspreche dem Strahl t von (S) und deshalb muss der Pol von τ in Bezug auf diesen Kegelschnitt auf t liegen. Er liegt aber auch auf K_3 und auf K_τ; daher berühren sich in ihm K_3 und K_τ. Weil sich in ihm aber auch t und τ schneiden, so geht K^3 durch ihn hindurch. Dass K^3 in diesem Punkte auch von τ berührt wird, ergiebt sich aus folgender Ueberlegung. Es sei $\mathfrak{A}$ der Schnittpunkt zweier homologen Strahlen a und α; es seien ferner a' und α' die den obigen Strahlen unendlich benachbarten, die einander auch entsprechen müssen, und $\mathfrak{A}'$ sei ihr Schnittpunkt, so ist die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ die Tangente in $\mathfrak{A}$ an K^3. Wi[illegible] Γ..., so ist

$$l(AB\Gamma\ldots) \overline{\wedge}\, \mathfrak{A}(AB\Gamma\ldots) \overline{\wedge}\, S(aa_1, bb_1, cc_1, \ldots).$$

Der Strahl, welcher in ($\mathfrak{A}$) der Tangente α unendlich benachbart ist, hat einen ihm projectivisch entsprechenden Strahl in (S), welcher dem Strahl a unendlich nahe liegt. Diese beiden Strahlen sind α' und a'; sie schneiden sich in $\mathfrak{A}'$ auf der Curve dritter Ordnung $\mathfrak{A}^3$ mit dem Doppelpunkte S, welche von den Büscheln ($\mathfrak{A}$) und (S) erzeugt wird. Auf dieser liegt auch der Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ von a und α, so dass also die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ oder α gleichzeitig Tangente an $\mathfrak{A}^3$ und K^3 ist.

Wenn der Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ von α und a der Berührungspunkt von α mit K_3 ist, so müssen sich in diesem Punkte die drei Curven $K_3 K^3 \mathfrak{A}^3$ berühren, weil jede in ihm die Gerade α berührt. Dies ist aber der Fall mit den gemeinschaftlichen Tangenten von C_6 und K_3.

Die Curve K_3 heisst die Cayley'sche Curve von K^3, so dass wir auch auf diesem Wege zu dem bekannten Satze gekommen sind, dass die Cayley'sche Curve einer Curve dritter Ordnung dieselbe in allen Punkten berührt, welche sie mit ihr gemeinsam hat.

7. Legt man durch die Schnittpunkte der homologen Kegelschnitte projectivischer Büschel andere Kegelschnittbüschel, so lassen sich die Kegelschnitte derselben unendlich oft so zu neuen Büscheln gruppiren, dass zu jedem solchen aus jedem der vorigen Büschel ein Kegelschnitt gehört.

Die projectivischen Kegelschnittbüschel $(ABCD)\{\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots\}$ und $(A'B'C'D')\{\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots\}$ erzeugen eine Curve K^4 vierter Ordnung, welche durch die acht Grundpunkte $ABCDA'B'C'D'$ geht. Alle Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots$ schneiden λ^2 in solchen Punktgruppen von je vier Punkten, dass deren sechs Verbindungslinien eine Curve L_3 dritter Classe einhüllen, die auch die sechs Geraden, welche die vier Punkte $ABCD$ verbinden, zu Tangenten hat. Denn der Kegelschnitt λ^2 constituirt mit dem Büschel $(\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots)$ ein Kegelschnittnetz und die Geradenpaare, welche zu den Kegelschnitten desselben gehören, haben als Enveloppe eine Curve dritter Classe, die Cayley'sche Curve des Netzes. Lassen wir $\varkappa^2$ von den Kegelschnitten $\lambda^2\lambda_1^2\ldots$ geschnitten werden, so erhalten wir auf dieselbe Art eine Curve K_3 dritter Classe, welche die sechs Verbindungslinien der Punkte $A'B'C'D'$ berührt. Beide Curven haben neun gemeinschaftliche Tangenten; sechs von ihnen sind die Geraden, welche die vier Schnittpunkte von $\varkappa^2$ und λ^2 verbinden. Sind $t_1 t_2 t_3$ die drei anderen, so schneiden sich auf jeder von ihnen zweimal zwei Kegelschnitte in je zwei Punkten. Da nämlich t_1 eine Tangente von L_3 ist, so liegen auf ihr zwei Schnittpunkte MN von λ^2 und einem Kegelschnitt des Büschels $(ABCD)$, z. B. $\varkappa^2_m$; da aber t_1 auch Tangente von K_3 ist, so muss in zweien ihrer Punkte $M'_1 N'_1$ auch $\varkappa^2$ von einem Kegelschnitte λ^2_n des andern Büschels geschnitten werden. Es wird t_1 von den Kegelschnitten

beiden Büschel in zwei Involutionen geschnitten, die entweder nur ein gemeinschaftliches Punktpaar haben oder vollständig zusammenfallen. In unserem Falle muss das Letztere geschehen, weil beide Involutionen die Punktpaare $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ gemein haben. Daher wird t_1 von beiden Büscheln in den Punktpaaren $M_1 N_1$, $M'_1 N'_1$, $M''_1 N''_1$, ... derselben Involution geschnitten. Dasselbe gilt von t_2 und t_3 und es seien $M_2 N_2$, $M'_2 N'_2$, $M''_2 N''_2$, ... und $M_3 N_3$, $M'_3 N'_3$, $M''_3 N''_3$, ... die Punktpaare der Involutionen auf ihnen, in denen sie von den beiden Büscheln getroffen werden. Sind $EFGH$ die Schnittpunkte von $\varkappa^2$ und λ^2, so ist durch die acht gemeinschaftlichen Tangenten EF, EG, EH, FG, FH, GH, t_1, t_2 die neunte t_3 bestimmt. In gleicher Weise bestimmen die Kegelschnitte $\varkappa_1^2$ und λ_1^2 zwei Curven dritter Classe, die auch $t_1 t_2 t_3$ zu gemeinsamen Tangenten haben müssen, da es keine anderen Geraden geben kann, die von beiden Kegelschnittbüscheln in derselben Involution geschnitten werden. — Wir nennen nun $EFGH$, $E_1 F_1 G_1 H_1$, $E_2 F_2 G_2 H_2$, ... die Schnittpunkte von $\varkappa^2 \lambda^2$, $\varkappa_1^2 \lambda_1^2$, $\varkappa_2^2 \lambda_2^2$, ..., so müssen die Kegelschnitte der Büschel $(EFGH)$, $(E_1 F_1 G_1 H_1)$, $(E_2 F_2 G_2 H_1)$, ... die drei Geraden $t_1 t_2 t_3$ in den Punktpaaren derselben Involutionen schneiden, da zwei Kegelschnitte dieser Büschel $\varkappa^2 \lambda^2$, $\varkappa_1^2 \lambda_1^2$, $\varkappa_2^2 \lambda_2^2$, ... durch zwei Punktpaare dieser Involutionen gehen. Nun sei μ^2 irgend ein Kegelschnitt des Büschels $(EFGH)$; er wird von allen Kegelschnitten der Büschel $(E_1 F_1 G_1 H_1)$ und $(E_2 F_2 G_2 H_2)$ in solchen Punktgruppen von je vier Punkten geschnitten, dass deren Verbindungslinien zwei Curven L'_3 und K'_3 dritter Classe einhüllen. Eine gemeinschaftliche Tangente derselben sei m, so müssen sich in zweien ihrer Punkte A'' und B'' drei Kegelschnitte, aus jedem der drei Büschel einer, schneiden. Diese müssen daher, weil sie ausserdem die drei Geraden $t_1 t_2 t_3$ in Punktpaaren derselben Involutionen schneiden, sich noch in denselben zwei Punkten $C'' D''$ treffen, und alle Kegelschnitte des Büschels $(A'' B'' C'' D'')$ treffen auch $t_1 t_2 t_3$ in den Punktpaaren derselben Involutionen. Die drei sich in $A'' B'' C'' D''$ schneidenden Kegelschnitte der drei Büschel $(EFGH)$, $(E_1 F_1 G_1 H_1)$, $(E_2 F_2 G_2 H_2)$ seien $\mu^2 \nu^2 o^2$. Gleicherweise giebt es in den beiden letzten Büscheln Kegelschnittspaare $\nu_1^2 o_1^2$, $\nu_2^2 o_2^2$, ..., die sich in vier Punkten der Kegelschnitte μ_1^2, μ_2^2, ... des ersten Büschels schneiden. Wir nennen die Schnittpunkte $A''_1 B''_1 C''_1 D''_1$, $A''_2 B''_2 C''_2 D''_2$, ... Wenn wir je drei Kegelschnitte der Büschel $(EFGH)$, $(E_1 F_1 G_1 H_1)$, $(E_2 F_2 G_2 H_2)$, die sich in denselben vier Punkten schneiden, einander zuordnen, so erhalten wir drei projectivische Kegelschnittbüschel, nämlich

$$(EFGH)\{\varkappa^2 \lambda^2 \mu^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \dots\} \overline{\wedge} (E_1 F_1 G_1 H_1)\{\varkappa_1^2 \lambda_1^2 \nu^2 \nu_1^2 \nu_2^2 \dots\}$$
$$\overline{\wedge} (E_1 F_2 G_2 H_2)\{\varkappa_2^2 \lambda_2^2 o^2 o_1^2 o_2^2 \dots\}.$$

Nun sei P ein ganz beliebiger Punkt; es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}''_1$, $\mathfrak{A}''_2$, ..., $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, ... die conjugirten Punkte von P bezüglich der Büschel $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A''_1 B''_1 C''_1 D''_1)$, ..., $(EFGH)$,

$(E_1 F_1 G_1 H_1)$, $(E_2 F_2 G_2 H_2)$, $(E_3 F_3 G_3 H_3)$, ..., so liegen sie sämmtlich a einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$. Denn die Strahlenbüschel der Polaren von bezüglich $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ sind die Geraden $\mathfrak{A}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\ldots)$ u $\mathfrak{A}'(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\ldots)$ und erzeugen, da sie projectivisch sind, einen Keg schnitt $\mathfrak{K}^2$. Es bilden aber auch die Polaren von P bezüglich der Keg schnitte der Büschel $(EFGH)$, $(E_1 F_1 G_1 H_1)$, $(E_2 F_2 G_2 H_2)$ drei projectivisc Strahlenbüschel $\mathfrak{E}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\ldots)$, $\mathfrak{E}_1(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\ldots)$, $\mathfrak{E}_2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\ldots$ und erzeugen also denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$. Wenn wir die Keg schnitte des Büschels $(A''B''C''D'')$ mit $\pi^2\pi_1^2\pi_2^2\ldots$ bezeichnen, so i

$$(\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2)\ \overline{\wedge}\ (\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2)\ \overline{\wedge}\ (\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3)\ \overline{\wedge}\ (\pi^2\pi_1^2\pi_2^2\pi_3^2).$$

Lassen wir P in $P'P''\ldots$ sich ändern, so ändern sich $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3$ $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'_1\mathfrak{E}'_2\mathfrak{E}'_3$, $\mathfrak{E}''\mathfrak{E}''_1\mathfrak{E}''_2\mathfrak{E}''_3$, ... und es sind P und $\mathfrak{E}_3$, P' und $\mathfrak{E}'_3$, l und $\mathfrak{E}''_3$, ... conjugirte Punkte in Bezug auf die drei Kegelschnitte $\varkappa_3^2\lambda_3^2\pi$ und deshalb müssen diese drei Kegelschnitte sich in denselben vier Pun ten, also in $E_3 F_3 G_3 H_3$ schneiden. In gleicher Weise zeigt man, da die Kegelschnitte der Büschel $(A''B''C''D'')$, $(A''_1 B''_1 C''_1 D''_1)$, ... dur die Schnittpunkte $(E_3 F_3 G_3 H_3)$, $(E_4 F_4 G_4 H_4)$, ... je zweier homolog Kegelschnitte der Büschel $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ hindurchgehen.

Anderer Beweis. Eine beliebige Gerade g werde durch ein Schnittpunkt Q zweier homologen Kegelschnitte $\varkappa^2_q$ und λ^2_q gezogen u von $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$, ..., $\varkappa^2_q$ und λ^2, λ_1^2, λ_2^2, ..., λ^2_q in den Involutionen KK' $K_1K'_1$, $K_2K'_2$, ..., QK'_q und LL', $L_1L'_1$, $L_2L'_2$, ..., QL'_q geschnitten. D gemeinschaftliche Punktpaar beider Involutionen sei MM' und durch d selbe M^2 ein beliebiger Kegelschnitt, welcher $\varkappa^2$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und λ^2 $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ schneidet. Diese Punktgruppen sehen wir als Grundpun zweier Kegelschnittbüschel $(\varkappa^2 K_1^2 K_2^2\ldots M^2)$ und $(\lambda^2 L_1^2 L_2^2\ldots M^2)$ an, welc g in denselben Involutionen schneiden müssen. Wenn wir den Pun paaren dieser Involutionen die durch sie gehenden Kegelschnitte zuo nen, so muss, da

$$(KK',\ K_1K'_1,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ (LL',\ L_1L'_1,\ \ldots)$$

ist, auch

$$(\varkappa^2,\ K_1^2,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ (\lambda^2,\ L_1^2,\ \ldots)$$

sein. Diese Büschel erzeugen also eine Curve $\mathfrak{K}^4$ vierter Ordnung, die g denselben vier Punkten wie K^4 trifft; da die Grundpunkte der Büsch welche $\mathfrak{K}^4$ erzeugen, auf einem Kegelschnitt M^2 liegen, so kann die Curve auch durch zwei Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grun punkte die Schnittpunkte $EFGH$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}$ von $\varkappa^2\lambda^2$ und $K_1^2L_1^2$ sin Dies ergiebt sich daraus, dass man die Büschel $(\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots)$ und $(\lambda^2\lambda_1^2\ldots$ und die von ihnen erzeugte Curve projectivisch auf zwei Strahlenbüsch und den von ihnen erzeugten Kegelschnitt bezieht. Wenn QQ' und $Q\mathfrak{Q}$ die Schnittpunkte von g mit den durch $EFGHQ$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}Q$ bestimmt Kegelschnitten sind, so sind die Involutionen KK', LL', QQ', ... u $K_1K'_1$, $L_1L'_1$, $Q_1\mathfrak{Q}'_1$, ... in projectivischer Beziehung und haben di

selben gemeinschaftlich entsprechenden Punkte, wie die Involutionen KK', $K_1K'_1$, $K_2K'_2$, ... und LL', $L_1L'_1$, $L_2L'_2$, ...

Wir bezeichnen noch die Schnittpunkte von $\varkappa_1^2\lambda_1^2$ mit $E'F'G'H'$, so schneiden die Kegelschnitte dieses Büschels g in derselben Involution, wie diejenigen des Büschels ($\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}$) und sind dadurch projectivisch auf diese, wie auf diejenigen des Büschels ($EFGH$) bezogen. Daher erzeugen die Büschel ($EFGH$) und ($E'F'G'H'$) eine Curve K_1^4 vierter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte von g und K^4 geht. Da dies für jede Gerade durch Q gilt, so müssen K^4 und K_1^4 zusammenfallen.

8a. Demnach kann die Curve K^4 auf unzählige Arten durch projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grundpunkte man erhält, wenn man durch irgend zwei Gruppen von vier Schnittpunkten homologer Kegelschnitte der Büschel ($ABCD$) und ($A'B'C'D'$) zwei beliebige Kegelschnitte legt und deren Schnittpunkte mit K^4 bestimmt. Es folgt also, dass, wenn man zur Construction von K^4 irgend eine der so erhaltenen Gruppen von Punkten als Basis eines erzeugenden Kegelschnittbüschels wählt, von der Basis des andern Büschels nur ein Punkt beliebig gewählt werden kann; die drei anderen sind dadurch bestimmt. Wenn also $ABCDEA_1A_2 .. A_x$ soviel Punkte sind, als eine Curve vierter Ordnung bestimmen, so hat man, um diese zu construiren, drei Punkte XYZ zu suchen, welche der Projectivität genügen

$$(ABCD)\}A_1A_2\dots A_x\{ \,\overline{\wedge}\, (EXYZ)\}A_1A_2\dots A_x\}.$$

Hierüber vergleiche Kortum, Aufgaben des dritten und vierten Grades.

Der letzte Satz behält seine Geltung, wenn die Kegelschnittbüschel einen oder zwei Grundpunkte gemeinschaftlich haben. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem letzten Falle. Die Büschel ($ABCD$) und ($ABC'D'$) erzeugen eine Curve K^4 vierter Ordnung, welche A und B zu Doppelpunkten hat.

Alle Kegelschnitte der Büschel ($ABCD$) und ($ABC'D'$) können aus den Punkten A und B durch projectivische Strahlenbüschel projicirt werden. Dreht man alle diese Büschel um A und B so, dass die Strahlen AD' und BD' in eine Gerade fallen, während die gegenseitige Lage aller übrigen Strahlen ungeändert bleibt, so erzeugen die Büschel, welche die Kegelschnitte $(ABCD)\}\varkappa^2\varkappa_1^2 ..\}$ erzeugten, auch in der neuen Lage Kegelschnitte eines Büschels $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})\}\mathfrak{K}^2\mathfrak{K}_1^2\dots\}$, und die Büschel, welche die Kegelschnitte des Büschels ($ABC'D'$) projicirten, erzeugen die Strahlen eines Strahlenbüschels $\mathfrak{C}'(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1\dots)$. Da aber die so erhaltenen Büschel $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})\}\mathfrak{K}^2\mathfrak{K}_1^2\dots\}$ und $\mathfrak{C}'(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1\dots)$ in projectivischer Beziehung stehen, so ist der Ort der Schnittpunkte ihrer homologen Ele-

mente eine Curve $\mathfrak{K}^3$ dritter Ordnung. Diese kann auf unzählige Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden. Wir wählen auf $\mathfrak{K}^4$ zwei ganz beliebige Punkte M und N, so ist durch deren entsprechende $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{K}^3$ und durch A und B ein Kegelschnittbüschel bestimmt; die Kegelschnitte desselben treffen $\mathfrak{K}^3$ in solchen Punktpaaren, dass die Verbindungslinien der Punkte der einzelnen Paare sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}^3$ schneiden. Es werden die Elemente der beiden Büschel $(AB\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{P})$ aus A und B durch Strahlenbüschel erzeugt, und wenn wir alle diese Büschel um A und B, indem ihre gegenseitige Lage durchaus ungeändert bleibt, so drehen, dass die in AB vereinigten Strahlen sich in D' schneiden, so verwandeln sich die Büschel $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{C}')$ wieder in $(ABCD)$ und $(ABC'D')$ und erzeugen K^4; aber die Büschel $(AB\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{P})$, welche $\mathfrak{K}^3$ erzeugten, verwandeln sich in $(ABMN)$ und $(ABPD')$ und diese müssen natürlich auch K^4 erzeugen, womit gezeigt ist, dass man zu Grundpunkten des einen erzeugenden Büschels ausser AB zwei ganz beliebige Punkte von K^4 wählen kann. Im andern Büschel aber ist D' als ein beliebiger Punkt anzusehen. Denn legt man durch die beiden Schnittpunkte, in denen irgend ein Kegelschnitt des Büschels $(ABMN)$ die Curve K^4 schneidet, ferner durch AB und irgend einen Punkt X von K^4 einen Kegelschnitt, welcher K^4 noch in Y schneiden mag, so kann K^4 auch erzeugt werden durch die beiden Büschel $(ABMN)$ und $(ABXY)$. Hieraus aber folgt der Satz:

8b. Wenn eine Curve K^4 vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten A und B durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel, welche A und B als gemeinsame Doppelpunkte haben, erzeugt ist, so kann sie auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden. Die beiden Grundpunkte, ausser A und B, des einen Büschels und einen des andern kann man beliebig auf der Curve annehmen. Dadurch aber ist der letzte Grundpunkt des zweiten Büschels bestimmt.

Soll man durch sieben Punkte $CDEFGHJ$ eine Curve vierter Ordnung legen, welche zwei gegebene Punkte A und B zu Doppelpunkten hat, so hat man nach dem Vorigen einen Punkt X zu suchen, welcher der Bedingung genügt, dass

$$(ABCD)\{F, G, H, J\} \barwedge (ABEX)\{F, G, H, J\}$$

ist. Es giebt unendlich viele Punkte, welche dieser Bedingung genügen; sie liegen sämmtlich auf einer Curve vierter Ordnung, welche durch $FGHJ$ geht und ABE zu Doppelpunkten hat. Daher giebt es unendlich viele Curven vierter Ordnung, welche A und B zu Doppelpunkten haben und durch $CDEFGHJ$ gehen. Wir denken uns wieder die Kegelschnitte aller Büschel, welche diese Curven erzeugen, durch projectivische Strahlenbüschel projicirt und diese um A und B unter Festhaltung ihrer ge-

seitigen Lage so gedreht, dass die Strahlen AE und BE in AB zusammenfallen, so gehen alle Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ in solche eines andern Büschels $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ und alle übrigen Kegelschnittbüschel in Strahlenbüschel $(\mathfrak{Y})$, ... über, deren Scheitel sämmtlich auf einem Kegelschnitt liegen. Das Kegelschnittbüschel $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ erzeugt mit jedem der Strahlenbüschel $(\mathfrak{Y})$, ... eine Curve dritter Ordnung. Alle so erhaltenen Curven dritter Ordnung gehen durch die acht Punkte $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}\mathfrak{J}$, von denen die letzten sechs diejenigen sind, in welchen sich nach der Drehung die Strahlen schneiden, die sich vorher in $CDFGHJ$ schnitten. Daher müssen diese Curven dritter Ordnung einen neunten Punkt $\mathfrak{K}$ und alle Curven vierter Ordnung den ihm entsprechenden Punkt K gemeinsam haben. Wir folgern:

9. Alle Curven vierter Ordnung mit denselben beiden Doppelpunkten A und B, welche durch projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt sind und durch dieselben sieben Punkte gehen, schneiden sich noch in einem achten Punkte.

Durch acht Punkte lässt sich vermittelst projectivischer Kegelschnittbüschel nur eine Curve vierter Ordnung legen, welche zwei bestimmte Punkte zu Doppelpunkten hat.

Jede Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, welche durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt ist, kann auch durch zwei projectivische involutorische Strahlenbüschel erzeugt werden, deren Scheitel in den beiden Doppelpunkten liegen.

Legt man durch die Doppelpunkte AB und irgend zwei Punkte CD ein Kegelschnittbüschel, so schneiden die Elemente desselben die Curve in solchen Punktpaaren, dass deren Verbindungslinien Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}^2$ sind, welcher CD und die Curve, letztere in vier Punkten, berührt.

Der erste Theil des Satzes folgt aus 7. Die Kegelschnitte $\varkappa_0^2 \varkappa_1^2 \ldots$ des Büschels $(ABCD)$ sind den Tangenten $t_0 t_1 \ldots$ an $\mathfrak{K}^2$ und daher auch den Berührungspunkten derselben projectivisch zugeordnet, wenn $t_0 t_1 \ldots$ diejenigen Geraden sind, welche die Schnittpunkte von $\varkappa_0^2 \varkappa_1^2 \ldots$ mit der Curve vierter Ordnung verbinden. Projiciren wir aus einem beliebigen Punkte E von $\mathfrak{K}^2$ die Berührungspunkte, so erhalten wir ein zu $(\varkappa_0^2 \varkappa_1^2 \ldots)$ projectivisches Strahlenbüschel. Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente ist eine Curve dritter Ordnung, welche $\varkappa^2$ noch in fünf Punkten $F_1 F_2 F_3 F_4 F_5$ ausser in E schneidet. Einer von ihnen muss der Berührungspunkt von CD an $\mathfrak{K}^2$ sein, er sei F_1. Die Tangente in F_2 sei t_2. Sie wird von $\varkappa_0^2 \varkappa_1^2 \ldots$ und den Tangenten $t_0 t_1 \ldots$ in einer Involution und

einer dazu projectivischen Punktreihe geschnitten. Von ihren Doppelpunkten fällt einer auf F_2, die anderen sind die Schnittpunkte von t_2 mit der Curve vierter Ordnung. Die Schnittpunkte von t_2 mit der Curve vierter Ordnung sind erstens die beiden Schnittpunkte von t_2 mit $\varkappa_2^2$, ferner die drei Doppelpunkte der genannten Punktreihen. Einer von diesen liegt stets auf CD. Von den beiden anderen fällt einer mit dem Schnittpunkte F_2 von t_2 und $\varkappa_2^2$ zusammen, so dass also in F_2 zwei Punkte der Curve sich vereinigen und in F_2 die Curve vierter Ordnung von $\mathfrak{K}_2^2$ und t_2 berührt wird. Auf dieselbe Art folgt, dass sich in $F_3 F_4 F_5$ die Curve vierter Ordnung und $\mathfrak{K}^2$ berühren.

Hieraus lässt sich auf die Natur der beiden Doppelpunkte schliessen. Wir legen durch A eine beliebige Gerade a und suchen ihre Schnittpunkte mit der Curve vierter Ordnung. Auf a sei P ein beliebiger Punkt; von ihm lassen sich zwei Tangenten p und p' an $\mathfrak{K}^2$ ziehen, denen zwei Kegelschnitte $\varkappa^2_p$ und $\varkappa^2_{p'}$ entsprechen, welche a noch in Q_p und $Q_{p'}$ schneiden. Aendert sich P auf a, so werden Q_p und $Q_{p'}$ die Punktpaare einer zur Punktreihe P... projectivischen Involution durchlaufen, weil die Tangenten pp' eine Involution bilden. Von den drei Doppelpunkten der Reihen $(P...)$ und $(Q_p Q_{p'}, ...)$ fällt einer auf CD, die anderen sind die Durchschnitte von a mit der Curve vierter Ordnung. Wählt man an Stelle der beliebigen Geraden a eine der beiden Tangenten von A an $\mathfrak{K}^2$, z. B. t_a, und ist $\varkappa^2_{t_a}$ der ihr entsprechende Kegelschnitt und τ_a die Tangente an demselben in A, so ist A einer der Schnittpunkte von τ_a mit der Curve vierter Ordnung, also τ_a eine Tangente in A an diese Curve. Ebenso folgt, dass es noch eine andere Tangente A an die Curve giebt. Diese beiden Tangenten heissen die Doppelpunktstangenten. Im Punkte B giebt es natürlich auch zwei Doppelpunktstangenten. Wir schliessen:

10. In jedem der Doppelpunkte lassen sich zwei Tangenten an die Curve vierter Ordnung ziehen, wenn diese Punkte ausserhalb $\mathfrak{K}^2$ liegen. Liegt einer von ihnen auf $\mathfrak{K}^2$, so ist er eine Spitze, und liegt er innerhalb $\mathfrak{K}^2$, so ist er ein uneigentlicher Doppelpunkt.

Wir denken uns in A und B die beiden projectivischen Strahleninvolutionen, welche die Curve K^4 projiciren. Es seien a_{12} und a'_{12} die beiden Doppelstrahlen von (A); ihnen entsprechen in (B) die Strahlenpaare $b_1 b_2$ und $b'_1 b'_2$. Diese sind die vier Tangenten, welche sich von B an K^4 ziehen lassen. Ebenso folgt, dass sich von A vier Tangenten an K^4 ziehen lassen. Also:

11. Von jedem der Doppelpunkte lassen sich an die Curve K^4 vier Tangenten ziehen.

Mit Hilfe von 8 lässt sich der Satz beweisen:

12. Wenn eine Curve K^4 vierter Ordnung durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt ist, so wird

sie von jedem Kegelschnitte K^2 in acht Punkten geschnitten.

Die Curve K^4 sei erzeugt durch die Büschel $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$. Zwei Schnittpunkte von K^4 und K^2 seien E und E'. Man kann K^4 dann auch erzeugen durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel $(EFGH)$ und $(E'F'G'H')$ (vergl. 8). Die Kegelschnitte dieser Büschel treffen K^2 in Punktgruppen von je drei Punkten. Man lege durch jede dieser Gruppen und zwei feste Punkte K und L, von denen K auf K^2 liegt, Kegelschnitte, so bilden diese zwei projectivische Büschel $(KLMN)$ und $(KLM'N')$, welche eine Curve $\mathfrak{K}^4$ vierter Ordnung erzeugen, die K und L zu Doppelpunkten hat. Sie schneidet K^2 in den Schnittpunkten von K^4 und K^2. — Aus K und L denke man sich die Kegelschnitte der beiden Büschel durch projectivische Strahlenbüschel projicirt und diese um K und L gedreht, bis die Strahlen KM und LN in die Gerade KL fallen. Dann verwandeln sich die Kegelschnitte des Büschels $(KLMN)$ in die Strahlen eines Büschels $(\mathfrak{N})$ und die Kegelschnitte des Büschels $(KLM'N')$ in die eines andern $(KL\mathfrak{M}'\mathfrak{N}')$. Da aber

$$(KL\mathfrak{M}'\mathfrak{N}')\;\overline{\wedge}\;(\mathfrak{N}),$$

so erzeugen diese Büschel eine Curve $\mathfrak{K}^3$ dritter Ordnung.

Der Kegelschnitt K^2 wird aus L und K durch ein Strahlenbüschel (L) und eine zu ihm projectivische Involution (K) projicirt; beide Büschel erzeugen nach der Drehung eine Curve K^3 dritter Ordnung, welche in K einen Doppelpunkt hat und durch L geht. Sie schneidet die Curve $\mathfrak{K}^3$ ausser in K und L noch in sechs Punkten $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_6$. Dreht man sämmtliche Büschel in die alte Lage zurück, so folgt, dass die Curven $\mathfrak{K}^4$ und K^2 ausser in K sich noch in sechs Punkten $P_1 \dots P_6$ schneiden. Durch diese sechs Punkte geht auch K^4; also schneidet diese Curve den Kegelschnitt K^2 in den acht Punkten $EE'P_1 \dots P_6$.

13. Sind $(\alpha_0^3\alpha_1^3\alpha_2^3\dots)$ und $(\beta_0^3\beta_1^3\beta_2^3\dots)$ zwei Büschel von Curven dritter Ordnung und es schneiden sich α_0^3 und β_0^3, α_1^3 und β_1^3 in je drei Punkten derselben Geraden g, so schneiden sich auch die übrigen Curven paarweise in je drei Punkten dieser Geraden.

Die Grundpunkte der beiden Büschel seien $A_1 \dots A_9$ und $B_1 \dots B_9$; man denke sich die einzelnen Curven durch die Kegelschnittbüschel $(A_1 \dots A_4)$ und $(B_1 \dots B_4)$ und die zu ihnen projectivischen Strahlenbüschel (A'_0), (A'_1), (A'_2), ... und (B'_0), (B'_1), (B'_2), ... erzeugt, so liegen alle Punkte A' auf dem Kegelschnitte A^2, der durch die Punkte $A_5 \dots A_9$ bestimmt ist, und alle Punkte B' auf einem Kegelschnitt B^2, der durch die Punkte $B_5 \dots B_9$ bestimmt ist. Es seien $M'M''$ und $N'N''$ die Schnittpunkte von A^2 und B^2 mit g.

Die Kegelschnitte des Büschels $A_1 \dots A_4$ und die Strahlen der Büschel (A'_0), (A'_1), ... schneiden g in der Involution

$$P_0 P'_0,\ P_1 P'_1,\ P_2 P'_2, \ldots$$

und den zu ihr projectivischen Reihen

$$\mathfrak{P}_0,\ \mathfrak{P}'_0,\ \mathfrak{P}''_0, \ldots M', M'',$$
$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}'_1,\ \mathfrak{P}''_1, \ldots M', M'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In gleicher Weise werden durch das Kegelschnittbüschel $(B_1 \ldots B_4)$ und die zu ihm projectivischen Strahlenbüschel (B'_0), (B'_1), ... auf g die Involution

$$Q_0 Q'_0,\ Q_1 Q'_1,\ Q_2 Q'_2, \ldots$$

und die projectivischen Punktreihen

$$\mathfrak{Q}_0,\ \mathfrak{Q}'_0,\ \mathfrak{Q}''_0, \ldots, N', N'',$$
$$\mathfrak{Q}_1,\ \mathfrak{Q}'_1,\ \mathfrak{Q}''_1, \ldots, N', N'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bestimmt.

Einen beliebigen Punkt $\varDelta$ verbinde man mit den beiden Involutionen auf g; irgend zwei Gerade l_1 und l_2 durch $\varDelta$ treffen g in zwei Punkten, die P_a und P_b oder Q_c und Q_d heissen mögen, je nachdem sie der ersten oder zweiten Involution angehören. Ihnen entsprechen $\mathfrak{P}_0^{(a)}$ und $\mathfrak{P}_0^{(b)}$ oder $\mathfrak{Q}_0^{(c)}$ und $\mathfrak{Q}_0^{(d)}$. Auf diesen Geraden l_1 und l_2 nehme man zwei beliebige Punkte C_1 und C_2, ziehe $\mathfrak{P}_0^{(a)} C_1$ und $\mathfrak{P}_0^{(b)} C_2$, die sich in D_0, ferner $\mathfrak{Q}_0^{(c)} C_1$ und $\mathfrak{Q}_0^{(d)} C_2$, die sich in E_0 schneiden mögen, dann erzeugen die Büschel

$$\varDelta(P_0 P'_0,\ P_1 P'_1, \ldots) \text{ und } D_0(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}'_0, \ldots),$$
$$\varDelta(Q_0 Q'_0,\ Q_1 Q'_1, \ldots) \text{ und } E_0(\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}'_0, \ldots)$$

zwei Curven dritter Ordnung δ_0^3 und ε_0^3, die $\varDelta$ zum gemeinsamen Doppelpunkte haben und durch die Punkte C_1 und C_2 gehen. — Man lege nun durch $M' M'' C_1 C_2 D_0$ einen Kegelschnitt D^2, so ist zwischen seinen Punkten und denen von g eine projectivische Beziehung dadurch hergestellt, dass den Punkten $\mathfrak{P}_0^{(a)} \mathfrak{P}_0^{(b)} M' M''$ von g die Punkte $C_1 C_2 M' M''$ von D^2 zugeordnet sind. Deshalb muss die Punktreihe auf D^2 auch mit den Punktreihen

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}'_1,\ \mathfrak{P}''_1, \ldots, M', M''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

in projectivischer Beziehung und perspectivischer Lage sich befinden. Sind D_1, D_2, ... die perspectivischen Centra, so erzeugen die Büschel

$$(D_1), (D_2), \ldots \text{ mit der Involution } \varDelta(P_0 P'_0, \ldots)$$

Curven dritter Ordnung δ_1^3, δ_2^3, ..., die mit δ_0^3 zu einem Büschel gehören, welches C_1 und C_2 zu zwei Grundpunkten und $\varDelta$ zum gemeinsamen Doppelpunkt hat.

Durch die Punkte $N' N'' C_1 C_2 E_0$ ist ein Kegelschnitt E^2 bestimmt, dessen Punkte mit den Punkten $\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}'_0 \ldots$ von g in projectivische Beziehung dadurch gebracht sind, dass den Punkten $\mathfrak{Q}_0^{(c)} \mathfrak{Q}_0^{(d)} N' N''$ von g die Punkte $C_1 C_2 N' N''$ von E^2 zugeordnet sind. Diese Punktreihe auf E^2 muss mit den Punktreihen

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}''_1, \ldots, N'N''$$

. . . .

ebenfalls in projectivischer Beziehung und perspectivischer Lage sich befinden. Wir nennen die perspectivischen Centra

$$E_0, E_1, E_2, \ldots$$

und erhalten in ihnen Strahlenbüschel

$$(E_0), (E_1), (E_2), \ldots,$$

welche mit der Involution

$$\varDelta(Q_0 Q'_0, Q_1 Q'_1, \ldots)$$

in projectivischer Beziehung stehen und mit ihr die Curven

$$\varepsilon_0^3, \varepsilon_1^3, \varepsilon_2^3, \ldots$$

dritter Ordnung eines Büschels erzeugen, welche sämmtlich $\varDelta$ zum Doppelpunkt haben und durch $C_1 C_2$ gehen.

Aus der Erzeugung der Curven

$$\delta_0^3, \delta_1^3, \delta_2^3, \ldots \text{ und } \varepsilon_0^3, \varepsilon_1^3, \varepsilon_2^3, \ldots$$

folgt, dass sie die Gerade g in denselben Punktgruppen treffen, in denen sie von

$$\alpha_0^3, \alpha_1^3, \alpha_2^3, \ldots \text{ und } \beta_0^3, \beta_1^3, \beta_2^3, \ldots$$

geschnitten werden.

Man kann sich jede der Curven δ_0^3, δ_1^3, ... und ε_0^3, ε_1^3, ... auch erzeugt denken durch eine Involution mit dem Scheitel $\varDelta$ und ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel C_1. Dreht man dann alle Involutionen und alle Büschel um $\varDelta$ und C_1, so dass die Strahlen $\varDelta C_2$ und $C_1 C_2$ in die Gerade $\varDelta C_1$ fallen, so erzeugen die Büschel in der neuen Lage zwei Kegelschnittbüschel

$$(\delta_0^2 \delta_1^2 \ldots) \text{ und } (\varepsilon_0^2 \varepsilon_1^2 \ldots),$$

welche $\varDelta$ zum gemeinsamen Grundpunkt haben. — Die Gerade g wird durch zwei projectivische Büschel in perspectivischer Lage projicirt, welche nach der Drehung einen Kegelschnitt γ^2 erzeugen. Dieser wird von jedem der Kegelschnitte der beiden Büschel ausser in $\varDelta$ noch in drei Punkten geschnitten. Da sowohl die Kegelschnitte δ_0^2 und ε_0^2, als auch δ_1^2 und ε_1^2 sich in drei Punkten von γ^2 treffen, so müssen sich alle Kegelschnitte der beiden Büschel paarweise auf γ^2 treffen.

Dreht man die Büschel in $\varDelta$ und C_1 wieder in die alte Lage zurück, so schliesst man zunächst, dass die Curven der Büschel

$$(\delta_0^3 \delta_1^3 \ldots) \text{ und } (\varepsilon_0^3 \varepsilon_1^3 \ldots)$$

und dann auch diejenigen der Büschel

$$(\alpha_0^3 \alpha_1^3 \ldots) \text{ und } (\beta_0^3 \beta_1^3 \ldots)$$

sich paarweise in drei Punkten von g schneiden.

14. Zwei projectivische Büschel von Curven dritter Ordnung erzeugen eine Curve sechster Ordnung, welche durch die *Grundpunkte* der Büschel geht.

Die projectivischen Curvenbüschel seien $(\alpha_0^3 \ldots)$ und $(\beta_0^3 \ldots)$; durch die Punktgruppen, in denen die Curven eine beliebige Gerade g schneiden, und drei feste Punkte $C_1 C_2 C_3$ lege man Curven dritter Ordnung, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt Δ haben, so erhält man zwei neue projectivische Curvenbüschel $(\Delta \Delta C_1 C_2 C_3 C_4 C_5)$ und $(\Delta \Delta C_1 C_2 C_3 C'_4 C'_5)$. Jede dieser Curven kann man sich erzeugt denken durch eine Involution in Δ und ein projectivisches Büschel in C_1; die Gerade g wird aus Δ und C_1 durch zwei projectivische Büschel projicirt. Dreht man sämmtliche Büschel um Δ und C_1, bis die Strahlen ΔC_2 und $C_1 C_2$ mit ΔC_1 zusammenfallen, so erzeugen sie in der neuen Lage zwei Kegelschnittbüschel $(\Delta \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_4 \mathfrak{C}_5)$ und $(\Delta \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}'_4 \mathfrak{C}'_5)$ und einen Kegelschnitt γ^2 durch ΔC_1. Die beiden Büschel sind in projectivischer Beziehung und erzeugen eine Curve K^4 vierter Ordnung mit den Doppelpunkten Δ und $\mathfrak{C}_3$, welche γ^2 noch in sechs Punkten schneidet. Die diesen verwandten Punkte auf g sind solche, in denen sich homologe Curven der Büschel $(\alpha^3 \ldots)$ und $(\beta^3 \ldots)$ schneiden. Daher ist die von diesen Curven erzeugte Curve von der sechsten Ordnung.

15. Die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Kegelschnitte zweier projectivischen Kegelschnittbüschel verbinden, werden von einer Curve sechster Classe mit drei Doppeltangenten eingehüllt und schneiden sich in den Punkten einer Curve sechster Ordnung mit sechs Doppelpunkten.

Sind $(ABCD)\{\varkappa^2 \varkappa_1^2 \ldots\}$ und $(A'B'C'D')\{\lambda^2 \lambda_1^2 \ldots\}$ die projectivischen Kegelschnittbüschel, so wird $\varkappa^2$ von allen Kegelschnitten des andern Büschels in solchen Punktgruppen geschnitten, dass die Verbindungslinien derselben von einer Curve dritter Classe K_3 eingehüllt werden, welche auch die sechs Verbindungslinien der Punkte $A'B'C'D'$ berührt. In gleicher Weise wird λ^2 von allen Kegelschnitten des andern Büschels in solchen Punktgruppen geschnitten, dass deren Verbindungslinien von einer Curve L_3 eingehüllt werden, welche die Verbindungslinien der Punkte $ABCD$ berührt. Diese beiden Curven haben die drei Geraden $t_1 t_2 t_3$, welche von beiden Büscheln in denselben Involutionen geschnitten werden, zu gemeinschaftlichen Tangenten und ausserdem die sechs Verbindungslinien der Schnittpunkte von $\varkappa^2$ und λ^2. Je zwei homologe Kegelschnitte liefern zwei homologe Curven zweier Curvenschaaren dritter Classe, von denen die eine Schaar die Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD und $t_1 t_2 t_3$, die andere $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$ und $t_1 t_2 t_3$ zu Grundtangenten hat. Die übrigen gemeinschaftlichen Tangenten werden daher (vergl. 14) von einer Curve C_6 sechster Classe eingehüllt, welche $t_1 t_2 t_3$ zu Doppeltangenten hat.

Der Kegelschnitt $\varkappa^2$ constituirt mit dem Büschel $(\lambda^2 \lambda_1^2 \ldots)$ ein **Kegelschnittnetz**; *die* Scheitel der im Netze vorkommenden Geradenpaare **liegen**

auf einer Curve $\varkappa^3$ dritter Ordnung, welche durch neun feste Punkte geht, nämlich erstens durch die Scheitel $L_1 L_2 L_3$ der im Büschel $(\lambda^2 \lambda_1^2 \ldots)$ vorkommenden Geradenpaare und zweitens durch die Doppelpunkte $T_1 T'_1$, $T_2 T'_2$, $T_3 T'_3$ der Involutionen, in denen t_1, t_2, t_3 von den Kegelschnitten beider Büschel geschnitten wird. Auf dieselbe Art rufen die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots$ Curven dritter Ordnung $\varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \ldots$ hervor, welche sämmtlich durch die neun Punkte $L_1 L_2 L_3 T_1 T'_1 T_2 T'_2 T_3 T'_3$ gehen und daher ein Büschel bilden.

Sind $K_1 K_2 K_3$ die Tripelpunkte des Büschels $(\varkappa^2 \varkappa_1^2 \ldots)$, so ruft jeder Kegelschnitt des Büschels $(\lambda^2 \lambda_1^2 \ldots)$ mit diesem Büschel eine Curve $(\lambda^3 \lambda_1^3 \ldots)$ hervor und es bilden alle diese Curven ein Büschel mit den neun Grundpunkten $K_1 K_2 K_3 T_1 T'_1 T_2 T'_2 T_3 T'_3$. Die beiden Büschel $(\varkappa^3 \varkappa_1^3 \ldots)$ und $(\lambda^3 \lambda_1^3 \ldots)$ lassen sich projectivisch auf einander beziehen, wenn man je zwei Curven wie $\varkappa^3$ und λ^3 einander zuordnet, welche die Tripelcurven der Netze $\varkappa^2 \lambda^2 \lambda_1^2$ und $\lambda^2 \varkappa^2 \varkappa_1^2$ sind, in denen $\varkappa^2$ und λ^2 entsprechende Kegelschnitte sind. Daher erzeugen jene beiden Büschel von Curven dritter Ordnung eine Curve C^6 sechster Ordnung, welche die Punkte $T_1 T'_1 T_2 T'_2 T_3 T'_3$ zu Doppelpunkten hat. Hiermit ist der zweite Theil des obigen Satzes bewiesen, da je zwei homologe Curven der beiden Büschel $(\varkappa^3 \ldots)$ und $(\lambda^3 \ldots)$ sich in den drei Tripelpunkten der Büschel $(\varkappa^2 \lambda^2)$, $(\varkappa_1^2 \lambda_1^2)$, ..., welche durch homologe Kegelschnitte gebildet werden, schneiden. Man kann diesem zweiten Theile auch folgende Fassung geben:

16. **Sind zwei Kegelschnittbüschel projectivisch aufeinander bezogen, so bestimmen je zwei homologe Kegelschnitte ein Büschel. Die Tripelpunkte aller dieser Büschel liegen auf einer Curve sechster Ordnung, welche die Punkte $T_1 T'_1 T_2 T'_2 T_3 T'_3$ zu Doppelpunkten hat, von denen $T_1 T'_1$, $T_2 T'_2$, $T_3 T'_3$ conjugirte Punkte in Bezug auf beide Büschel sind.**

Wenn man die Kegelschnitte der beiden Büschel auf alle möglichen Arten projectivisch auf einander bezieht, so erhält man andere Curven C_6 und C^6, von denen die ersten sämmtlich $t_1 t_2 t_3$ zu Doppeltangenten, die anderen $T_1 T'_1 T_2 T'_2 T_3 T'_3$ zu Doppelpunkten haben. Unter den ersten giebt es drei, welche in eine Curve fünfter Classe und einen Punkt, unter den letzten drei, welche in eine Curve fünfter Ordnung und eine der drei Geraden $t_1 t_2 t_3$ degeneriren. Jene drei Punkte sind die gegenüberliegenden Punkte der Basen der beiden Kegelschnittbüschel in den drei Curven dritter Ordnung, in welche der Ort der Schnittpunkte homologer Kegelschnitte der beiden Büschel bei einer bestimmten projectivischen Anordnung derselben degeneriren kann.

Die Punkte $T_1 T'_1$, $T_2 T'_2$, $T_3 T'_3$ sind die Gegenecken eines vollständigen Vierseits.

Eine Curve sechster Ordnung, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits zu Doppelpunkten hat, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel von Curven dritter Ordnung erzeugt werden.

Wenn eines der beiden Kegelschnittbüschel in eine Strahleninvolution übergeht, so erleiden die vorigen Sätze einige Modificationen.

Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente eines involutorischen Strahlenbüschels (A) und eines zu ihm projectivischen Kegelschnittbüschels ist eine Curve K^4 vierter Ordnung, welche A zum Doppelpunkte hat und auf unzählige Arten durch dasselbe involutorische Strahlenbüschel und projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann. Von den Basen dieser Kegelschnittbüschel kann ein Punkt beliebig gewählt werden; die drei anderen erhält man, wenn man durch ihn und irgend vier Schnittpunkte eines Strahlenpaares von (A) mit K^4 einen Kegelschnitt legt und dessen übrige drei Schnittpunkte mit K^4 bestimmt.

Aus 14) ergiebt sich, wenn das eine Büschel dritter Ordnung in eine Gerade und ein Büschel zweiter Ordnung zerfällt, der Satz:

17. Zwei projectivische Büschel von Curven zweiter und dritter Ordnung erzeugen eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die Grundpunkte beider Büschel geht.

Es folgt:

Zwei projectivische Involutionen vom zweiten und dritten Grade auf demselben Träger haben fünf Doppelpunkte.

18. Die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Elemente eines involutorischen Strahlenbüschels und eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels verbinden, haben als Enveloppe eine Curve C_5 fünfter Classe mit zwei Doppeltangenten und schneiden sich in den Punkten einer Curve C^4 vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Es seien aa_1, bb_1, cc_1, ... die Strahlenpaare der Involution (S), $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$, ... die Kegelschnitte des Büschels $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. Das Geradenpaar aa_1 wird von allen Kegelschnitten $\varkappa^2$... in Punktpaaren projectivischer Involutionen geschnitten; die Verbindungslinien homologer Punktpaare haben als Enveloppe eine Curve α_3 dritter Classe, welche die sechs Verbindungslinien der vier Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu Tangenten hat. Weiter wird der Kegelschnitt $\varkappa^2$ von allen Strahlenpaaren aa_1, bb_1, ... in solchen Punkt-

quadrupeln geschnitten, dass die Verbindungslinien der Punkte eines jeden solchen Quadrupels von einem Kegelschnitte λ^2 eingehüllt werden, welcher die Doppelstrahlen dd' von (S) zu Tangenten hat. Die Curven α_3 und λ^2 haben die Verbindungslinien der Schnittpunkte von aa_1 und $\varkappa^2$ zu vier gemeinschaftlichen Tangenten und da sie noch zwei andere gemeinschaftliche Tangenten haben, so müssen dies die beiden Geraden t_1 und t_2 sein, welche von beiden Büscheln in denselben Involutionen geschnitten werden. Auf gleiche Weise werden durch bb_1 und $\varkappa_1^2$, cc_1 und $\varkappa_2^2$,... Curven $\beta_3\gamma_3\ldots$ und $\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$ bestimmt, so dass alle Curven $\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots$ eine Schaar mit acht gemeinschaftlichen Tangenten und $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$ eine Kegelschnittschaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden und

$$(\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots)$$

ist. Die gemeinsamen Tangenten homologer Elemente beider Büschel haben als Enveloppe eine Curve fünfter Classe mit den beiden Doppeltangenten t_1 und t_2.

Ferner sind die Tripelcurven der durch die Curven aa_1, $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$; bb_1, $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$; cc_1, $\varkappa^2$, $\varkappa_1^2$; ... constituirten Kegelschnittnetze Curven dritter Ordnung, welche durch die Tripelpunkte $K_1K_2K_3$ des Büschels $(\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots)$, durch S und seinen conjugirten Punkt S' in Bezug auf dieses Büschel und endlich durch die Doppelpunkte $T_1T'_1$ und $T_2T'_2$ auf t_1 und t_2 gehen und also ein Büschel bilden. Wir nennen diese Curven $\alpha^3\beta^3\gamma^3\ldots$. Weiter bestimmt jeder Kegelschnitt des Büschels $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$ mit dem Büschel (S) ein Netz, dessen Tripelcurven in Gerade degeneriren, nämlich in die Polaren $ss_1s_2\ldots$ von S nach $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$, die sich in S' schneiden. Da nun $S'(ss_1s_2\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\alpha^3\beta^3\gamma^3\ldots)$ ist, so erzeugen beide Büschel eine Curve C^4 vierter Ordnung, welche S' zum Doppelpunkte hat und durch die Punkte $K_1K_2K_3ST_1T'_1T_2T'_2$ geht. Diesem Resultat geben wir noch die Form:

19. Sind ein involutorisches Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel projectivisch aufeinander bezogen, so bestimmen je zwei homologe Elemente ein Kegelschnittbüschel. Die Tripelpunkte aller dieser Büschel liegen auf einer Curve vierter Ordnung, welche durch die drei Paare von Punkten SS', $T_1T'_1$, $T_2T'_2$ geht, welche gleichzeitig in Bezug auf beide Büschel conjugirte Punkte sind, und S' zum Doppelpunkte hat.

Es ist noch zu bemerken, dass die Gerade SS' die neunte gemeinschaftliche Tangente der Curven $\alpha^3\beta^3\gamma^3\ldots$ ist.

(Fortsetzung folgt.)

VI.

Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme.

Von

Dr. L. Burmester,

Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden.

Hierzu Taf. III, Fig. 4—10.

Erster Theil.

Ein räumliches oder ebenes System, welches sich derart ändert, dass parallele Gerade parallel bleiben und jede gerade Punktreihe in eine ähnliche Punktreihe übergeht, wird ein affin-veränderliches System genannt; dasselbe ist der specielle Fall eines collinear-veränderlichen räumlichen oder ebenen Systems,* dessen Phasen beständig resp. die unendlich ferne Ebene oder unendlich ferne Gerade selbstentsprechend gemein haben. In dieser Abhandlung wollen wir die fundamentalen Beziehungen der Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen oder ebenen Systems, welche die Bewegung des ähnlich-veränderlichen oder starren Systems als Specialfall enthält, mit den einfachsten synthetischen Hilfsmitteln ableiten und uns ein übersichtliches geometrisches Bild der Bewegungsformen erwirken, durch welches die Weiterforschung geleitet und gefördert wird. Herr Durrande** hat das affin-veränderliche räumliche System zuerst analytisch behandelt und manche interessante Beziehungen auf diesem Wege abgeleitet und angegeben; aber dieselben verleihen uns keine klare Einsicht in den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des veränderlichen Systems, sondern verschleiern die geometrische Uebersichtlichkeit, weil er die fruchtreiche Anwendung der aus den Lehren der projectivischen Geometrie bekannten Beziehungen der

* Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XX, S. 381.

** *Comptes Rendus LXXIV, 1234; LXXV, 1177; LXXVIII, 1036. Annales scientifiques de l'école normale supérieure (1873) 2. II, 81.*

Affinität verschmäht. Ferner hat Herr Kirchhoff in seiner „Mathematischen Physik“ * einige wichtige analytische Beziehungen des affin-veränderlichen räumlichen Systems behufs der Behandlung der hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitet, um zu den Helmholtz-schen Wirbellinien und Wirbelfäden zu gelangen, und mehrere Resultate mitgetheilt, die auch ohne analytische Darlegung aus der Definition des affin-veränderlichen Systems hervorgehen; aber eine eingehende Untersuchung der Bewegung dieses Systems und eine Ableitung der fundamentalen Beziehungen über Geschwindigkeit und Beschleunigung desselben wird dort nicht gegeben.

Sind in Fig. 4, Taf. III, $A_1 B_1 C_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$ ähnliche Punktreihen auf zwei im Raume oder in einer Ebene liegenden Geraden g_1, g_2 und theilen wir die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in gleiche Verhältnisse, so dass

$$\frac{A_1 A_x}{A_2 A_x} = \frac{B_1 B_x}{B_2 B_x} = \frac{C_1 C_x}{C_2 C_x} = \ldots = n$$

ist, dann liegen auch die Punkte $A_x B_x C_x \ldots$ auf einer Geraden g_x und bilden eine mit jenen Punktreihen ähnliche Punktreihe; denn wenn wir $A_1 B_1 C_1 \ldots$ parallel nach $A_x \beta_1 \gamma_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$ parallel nach $A_x \beta_2 \gamma_2$ verschieben, so ergiebt sich aus unserer Figur die Aehnlichkeit jener Punktreihen.

Betrachten wir die Eckpunkte zweier in verschiedenen Ebenen liegender Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ (Fig. 5) als homologe Punkte von zwei affinen räumlichen Systemen S_1, S_2 und theilen wir die Verbindungsstrecken der homologen Punkte durch A_x, B_x, C_x, D_x beziehendlich in gleiche Verhältnisse, so dass

$$\frac{A_1 A_x}{A_2 A_x} = \frac{B_1 B_x}{B_2 B_x} = \frac{C_1 C_x}{C_2 C_x} = \frac{D_1 D_x}{D_2 D_x} = n$$

ist, dann bilden auch die Punkte $A_x B_x C_x D_x$ ein Parallelogramm; denn ziehen wir $A_x \beta_1 \# A_1 B_1$, $A_x \beta_2 \# A_2 B_2$, ferner $D_x \gamma_1 \# D_1 C_1$, $D_2 \gamma_2 \# D_2 C_2$, so liegen die Punkte B_x, C_x resp. auf den Seiten $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ der entstandenen congruenten Dreiecke $A_x \beta_1 \beta_2$, $D_x \gamma_1 \gamma_2$ und theilen diese Seiten in die Verhältnisse

$$\frac{\beta_1 B_x}{\beta_2 B_x} = \frac{\gamma_1 C_x}{\gamma_2 C_x} = n$$

und demnach ist $A_x B_x \# D_x C_x$. Denken wir uns die Verbindungsstrecken der homologen Eckpunkte zweier Parallelepipede der affinen, ähnlichen oder congruenten räumlichen Systeme S_1, S_2 durch Punkte in gleiche Verhältnisse getheilt, so bilden auch diese Punkte ein Parallelepiped, und hieraus folgt, dass die Punkte, welche die Verbindungsstrecken homologer Punkte zweier affiner, ähnlicher

* Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik* 1876, 10. Vorles.

oder congruenter räumlicher Systeme S_1, S_2 in gleiche Verhältnisse theilen, ein mit diesen Systemen affines räumliches System S_x bilden.

Da bekanntlich zwei affine räumliche Systeme S_1, S_2 ausser der unendlich fernen Ebene drei selbstentsprechende Ebenen besitzen (von denen zwei imaginär sein können), die sich im Allgemeinen in einem im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkte und in drei selbstentsprechenden Geraden schneiden, so haben die drei affinen räumlichen Systeme $S_1 S_2 S_x$ diese selbstentsprechenden Elemente gemeinsam. Wir erhalten hiernach den für unsere weiteren Betrachtungen fundamentalen Satz:

1. **Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier affiner, ähnlicher oder congruenter räumlicher Systeme S_1, S_2 in gleiche Verhältnisse theilen, bilden ein mit diesen affines räumliches System S_x, welches die selbstentsprechenden Elemente von S_1, S_2 mit diesen gemeinsam hat.**

Bewegt sich das affin-veränderliche System S_x aus der Systemphase S_1 in die Systemphase S_2, so durchlaufen alle Systempunkte ähnliche Punktreihen; und nehmen wir an, ein affin-veränderliches räumliches System S sei durch eine beliebige krummlinige Bewegung in eine Phase S_1 gelangt und alle Systempunkte bewegen sich von diesem Moment an in der Richtung der Tangenten ihrer Bahncurven mit der ihnen zugehörigen Geschwindigkeit, wobei das affin-veränderliche System S nach einer Zeiteinheit in eine Phase S_v gelangt, dann repräsentiren die Verbindungsstrecken der homologen Punkte von S_1, S_v die Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten der Systempunkte in der Phase S. Hieraus folgt der Satz:

2. **Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase eines beliebig bewegten affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems bilden ein affines räumliches System.**

Hiernach ist der Geschwindigkeitszustand einer Phase S_1 eines affinveränderlichen räumlichen Systems bestimmt, wenn die Grösse und Richtung $A_1 A_v$, $B_1 B_v$, $C_1 C_v$, $D_1 D_v$ der Geschwindigkeiten von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1$ der Phase S_1 gegeben sind. Zu jedem fünften Punkte E_1 in S_1 erhalten wir dann die Grösse und Richtung $E_1 E_v$ der Geschwindigkeit, wenn wir in S_v den entsprechenden Punkt E_v construiren, und die Gerade $E_1 E_v$ ist auch die Tangente an die Bahncurve des Punktes E_1. Die Phase S_v, welche uns in Verbindung mit S_1 ein klares, übersichtliches Bild des Geschwindigkeitszustandes im Moment der Phase S_1 liefert, wollen wir die **Geschwindigkeitsphase** von S_1 nennen. Die selbstentsprechenden Elemente von S_1 und S_v, welche identisch sind mit den selbstentsprechenden Elementen von S_1 und einer unendlich nahen Phase S_2, bleiben während der

unendlich kleinen Bewegung der Phase S_1 nach S_x in Ruhe. Der im Endlichen liegende selbstentsprechende Punkt der unendlich nahen Phasen $S_1 S_x$ hat allein die Geschwindigkeit Null und soll daher in der Folge der Geschwindigkeitspol heissen. Für alle Punkte in den drei selbstentsprechenden Ebenen dieser Phase liegen die Geschwindigkeitsrichtungen beziehendlich in diesen Ebenen und für alle Punkte in den drei selbstentsprechenden Geraden liegen die Geschwindigkeitsrichtungen resp. in diesen Geraden. Ist das bewegte System S ein ähnlich-veränderliches oder ein starres, so gelten dieselben Beziehungen, die zugehörige Geschwindigkeitsphase S_v ist mit dem System S affin; aber im letzten Falle liegt der Geschwindigkeitspol stets im Unendlichen, wie sich leicht aus der bekannten Schraubenbewegung des starren Systems ergiebt.

Die Eckpunkte der Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ (Fig. 5) können wir auch als entsprechende Punkte von affinen ebenen Systemen S_1, S_2 betrachten, die in zwei verschiedenen Ebenen oder in einer Ebene liegen, und jene fundamentalen Beziehungen bleiben auch für diese affinen ebenen Systeme bestehen. Im letzten Falle haben die beiden in einer Ebene liegenden Systeme S_1, S_2 bekanntlich ausser der unendlich fernen Geraden der Ebene noch zwei selbstentsprechende Gerade, die auch imaginär sein können und sich im Allgemeinen in einem im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkte, dem Geschwindigkeitspol, schneiden.

Wir erhalten demnach auch die speciellen Sätze:

3. Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zwei in einer Ebene liegender affiner Systeme S_1, S_2 in gleiche Verhältnisse theilen, bilden ein in derselben Ebene liegendes affines ebenes System S_x, welches die selbstentsprechenden Elemente von S_1, S_2 mit diesen gemein hat.

4. Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase S_1 eines in einer festen Ebene beliebig bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems bilden ein mit S_1 affines ebenes System S_v.

Sind in Fig. 6 $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ entsprechende Eckpunkte zweier Dreiecke von zwei in einer Ebene liegenden ähnlichen ebenen Systemen S_1, S_2 und theilen wir die Verbindungsstrecken der homologen Punkte in gleiche Verhältnisse, so dass

$$\frac{A_1 A_x}{A_2 A_x} = \frac{B_1 B_x}{B_2 B_x} = \frac{C_1 C_x}{C_2 C_x} = n,$$

dann bilden auch die Punkte $A_x B_x C_x$ ein mit jenen Dreiecken ähnliches Dreieck; denn ziehen wir $A_x \beta_1 \# A_1 B_1$, $A_x \beta_2 \# A_2 B_2$ und $A_x \gamma_1 \# A_1 C_1$, $A_x \gamma_2 \# A_2 C_2$, so liegen die Punkte B_x, C_x resp. auf den Seiten $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ der erhaltenen ähnlichen Dreiecke $A_x \beta_1 \beta_2$, $A_x \gamma_1 \gamma_2$ und theilen diese in die Verhältnisse

$$\frac{\beta_1 B_x}{\beta_2 B_x} = \frac{\gamma_1 C_x}{\gamma_2 C_x} = n;$$

demnach ist $A_x B_x C_x \sim A_1 B_1 C_1$ oder $A_2 B_2 C_2$ und diese Beziehungen bleiben auch bestehen, wenn die beiden ähnlichen ebenen Systeme in zwei parallelen Ebenen sich befinden. Da zwei in einer Ebene liegende ähnliche Systeme S_1, S_2 im Allgemeinen einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt besitzen, so ergeben sich die speciellen Sätze:

5. Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher Systeme S_1, S_2 in gleiche Verhältnisse theilen, bilden ein ähnliches System S_x, welches den selbstentsprechenden Punkt von S_1, S_2 mit diesen gemeinsam hat.
6. Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase S_1 eines in einer festen Ebene beliebig bewegten, ähnlich-veränderlichen ebenen Systems bilden ein mit S_1 ähnliches ebenes System S_v.

Es seien in Fig. 7 A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 resp. homologe Punkte in drei beliebig liegenden räumlichen oder ebenen Systemen S_1, S_2, S_3, deren Verwandtschaft erst im Nachfolgenden festgestellt werden soll. Construiren wir die beiden Parallelogramme $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4$, welche (vorausgesetzt, dass die Ecken A_2, A_4 und B_2, B_4 gegenüber liegen) resp. durch die drei homologen Punkte $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ bestimmt sind,* dann steht die erhaltene neue Strecke $A_4 B_4$ der beiden vierten Eckpunkte der Parallelogramme in einer folgenreichen Beziehung zu den Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$. Ziehen wir in unserer Figur $\alpha_2 A_4 \# A_2 B_2$, ferner $B_1 \beta_3 \# A_3 B_3$, so ist wegen der congruenten Dreiecke $A_4 \alpha_2 A_1$, $A_2 B_2 A_3$ und $B_1 \beta_3 B_4$, $B_3 A_3 B_2$ auch $\alpha_2 A_1 \# A_3 B_2 \# B_4 \beta_3$ und demnach $\alpha_2 B_4 \# A_1 \beta_3$, d. h. die geometrische Summe von $A_1 B_1$ und $A_3 B_3$ ist gleich der geometrischen Summe von $A_2 B_2$ und $A_4 B_4$. Legen wir also in Fig. 7a die Strecken 1, 2, 3, 4, welche resp. gleich und parallel den Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$ sind, an einander, so bilden die vier Strecken 1, 2, 3, 4 ein geschlossenes räumliches oder ebenes Viereck, je nachdem jene drei homologen Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ beliebig im Raume oder in parallelen Ebenen liegen, die auch in eine Ebene zusammenfallen können. Und umgekehrt ergiebt sich, wenn ein solches geschlossenes räumliches oder ebenes Viereck gegeben ist und wir ziehen die drei Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ in beliebiger Lage resp. gleich und pa-

* Da drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ drei verschiedene Parallelogramme bestimmen, so wollen wir, um diese Dreideutigkeit zu vermeiden, in der Folge unter dem durch $A_1 A_2 A_3$ bestimmten Parallelogramm stets dasjenige verstehen, dessen Ecken in der Reihenfolge $A_1 A_2 A_3 A_4$ liegen, bei dem also A_1, A_2 und A_3, A_4 gegenüberliegende Ecken sind.

rallel den Vierecksseiten 1, 2, 3, construiren ferner die Parallelogramme $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4$, so ist auch die Strecke $A_4 B_4$ gleich und parallel der Vierecksseite 4.

Nehmen wir nun an, $S_1 S_2 S_3$ seien drei affine räumliche Systeme und denken wir uns in diesen Systemen noch drei homologe Strecken $A'_1 B'_1$, $A'_2 B'_2$, $A'_3 B'_3$ gegeben, welche resp. gleich und parallel den Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ sind und durch die Parallelogramme $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$, $B'_1 B'_2 B'_3 B'_4$ die Punkte A'_4, B'_4 bestimmt, dann gehört zu den vier Strecken $A'_1 B'_1$, $A'_2 B'_2$, $A'_3 B'_3$, $A'_4 B'_4$ dasselbe Viereck 1234 und demnach ist auch im vierten System S_4, welches von den vierten Eckpunkten der Parallelogramme gebildet wird, die Strecke $A'_4 B'_4$ gleich und parallel der Strecke $A_4 B_4$. Denken wir uns ferner auf den homologen Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ beziehendlich die homologen Punkte C_1, C_2, C_3 gegeben, welche diese Strecken in gleichem Verhältnisse theilen, und den vierten Punkt C_4 durch das Parallelogramm $C_1 C_2 C_3 C_4$ bestimmt, dann gehört zu den Strecken $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$, $A_4 C_4$ ein Viereck, welches dem Viereck 1234 ähnlich ist; demnach liegt auch der Punkt C_4 auf der Geraden $A_4 C_4$ und theilt diese Strecke in demselben Verhältnisse. Hieraus folgt der wichtige Satz, welcher auch als specieller Fall aus dem später folgenden Satze 16 hervorgeht:

7. Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe Punkte von drei affinen räumlichen Systemen $S_1 S_2 S_3$ bestimmt sind, bilden ein viertes affines räumliches System S_4.

Ist in den drei affinen Systemen $S_1 S_3 S_2$ die geometrische Summe von zwei homologen Strecken $A_1 B_1$, $A_3 B_3$ gleich der entsprechenden Strecke $A_2 B_2$, dann ist die Seite 4 des zugehörigen Vierecks gleich Null und das vierte System S_4 zieht sich demnach in eine Ebene zusammen. Tritt dasselbe noch bei drei anderen homologen Strecken der Systeme $S_1 S_2 S_3$ ein, die aber mit jenen drei Strecken nicht parallel sind, dann zieht sich das vierte System S_4 in eine Gerade zusammen und findet dasselbe schliesslich noch wieder bei drei anderen homologen Strecken statt, dann schrumpft das vierte System S_4 in einen Punkt zusammen.

Nehmen wir an, es seien $S_1 S_2 S_3$ drei in einer Ebene liegende affine ebene Systeme, dann erhalten wir den speciellen Satz:

8. Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch drei homologe Punkte von drei in einer Ebene liegenden affinen ebenen Systemen $S_1 S_2 S_3$ bestimmt sind, bilden ein viertes affines ebenes System S_4.

Wenn in den drei affinen ebenen Systemen $S_1 S_3 S_2$ die geometrische Summe von zwei homologen Strecken $A_1 B_1$, $A_3 B_3$ gleich der entsprechenden Strecke $A_2 B_2$ ist, dann zieht sich das vierte System S_4 in eine Gerade zusammen und wenn dasselbe noch bei drei anderen homologen

Strecken, die mit jenen nicht parallel sind, eintritt, dann schrumpft das vierte System S_4 in einen Punkt zusammen.

Nehmen wir an, es seien $S_1 S_2 S_3$ drei in einer Ebene liegende ähnliche ebene Systeme und ausser den homologen Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ seien noch die homologen Strecken $A'_1 B'_1$, $A'_2 B'_2$, $A'_3 B'_3$, welche also mit jenen resp. denselben Winkel bilden, gegeben und bestimmen wir zu diesen beziehendlich in dem vierten System S_4 die Strecken $A_4 B_4$, $A'_4 B'_4$, so sind auch die Vierecke 1234, 1'2'3'4', welche diesen Strecken beziehendlich angehören, ähnlich, und folglich bilden auch die beiden Strecken $A_4 B_4$, $A'_4 B'_4$ denselben Winkel, wie jene homologen Streckenpaare. Hiernach erhalten wir den speciellen Satz:

9. Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe Punkte von drei in einer Ebene ähnlichen ebenen Systemen $S_1 S_2 S_3$ bestimmt sind, bilden ein viertes ähnliches ebenes System S_4.

Fallen zwei Seiten des Vierecks 1234, z. B. 2, 4, in eine Gerade, so sind die homologen Geraden der ähnlichen Systeme S_2, S_4 parallel und diese Systeme haben ähnliche Lage. Ist in den ähnlichen ebenen Systemen $S_1 S_3 S_2$ die geometrische Summe von zwei homologen Strecken $A_1 B_1$, $A_3 B_3$ gleich der entsprechenden Strecke $A_2 B_2$, dann schrumpft das vierte System S_4 in einen Punkt zusammen.

In Fig. 8 sind durch vier entsprechende Punkte drei homologe Parallelepipede $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$, $A_3 B_3 C_3 D_3$ in den affinen räumlichen Systemen bestimmt; construiren wir in S_4 die entsprechenden vierten Eckpunkte $A_4 B_4 C_4 D_4$ der Parallelogramme $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_1 C_2 C_3 C_4$, $D_1 D_2 D_3 D_4$, so ist auch durch die vier Punkte $A_4 B_4 C_4 D_4$ in dem vierten System S_4 das homologe Parallelepiped gegeben und die übrigen entsprechenden Eckpunkte der vier homologen Parallelepipede befinden sich in den Ecken von Parallelogrammen.*

Aus unseren Darlegungen ergeben sich weiter die folgenden Sätze:

10. Wird ein affin-veränderliches räumliches System S_2 durch eine Ursache in einer bestimmten Zeit geradlinig in eine Phase S_1 und durch eine andere Ursache in derselben Zeit geradlinig in eine Phase S_3 bewegt, so durchlaufen, wenn beide Ursachen gleichzeitig wirken, die Punkte des Systems S_2 in derselben Zeit die Diagonalen der Parallelogramme, welche durch je drei homologe

* Diese für unsere weiteren Betrachtungen fundamentalen Sätze 1 bis 10 können auch leicht durch die eminent fruchtbare, leider zu wenig bekannte Methode abgeleitet werden, welche H. Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre" (Leipzig 1844, zweite Ausgabe 1878 und Berlin 1862) dargelegt hat.

Punkte von $S_1 S_2 S_3$ bestimmt sind, und die vierten Eckpunkte der genannten Parallelogramme bilden eine Phase S_4 des affin-veränderlichen räumlichen Systems S_2.

11. Wird ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches oder ähnlich-veränderliches ebenes System S_2 durch eine Ursache in einer bestimmten Zeit geradlinig in eine Phase S_2 und durch eine zweite Ursache in derselben Zeit geradlinig in eine Phase S_3 bewegt, so durchlaufen, wenn beide Ursachen gleichzeitig wirken, die Punkte des Systems S_2 in derselben Zeit die Diagonalen der Parallelogramme, welche durch je drei homologe Punkte von $S_1 S_2 S_3$ bestimmt sind, und die vierten Eckpunkte dieser Parallelogramme bilden eine Phase S_4 des affin-veränderlichen, resp. ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S_2.

Nach diesen Sätzen können wir die Phasen eines affin-veränderlichen räumlichen oder ebenen Systems und die Phasen eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems in analoger Weise wie Kräfte und Geschwindigkeiten zusammensetzen und zerlegen.

Bewegt sich ein Punkt M (Fig. 9) in einem unendlich kleinen Zeittheil auf seiner ebenen oder räumlichen Bahncurve um die unendlich kleine Strecke von M_1 nach M_2 und in dem folgenden gleichen unendlich kleinen Zeittheil auf seiner Bahn nach M_3, bewegt sich ferner gleichzeitig mit M ein Punkt M' im ersten unendlich kleinen Zeittheil von M_1 nach M_2, im folgenden gleichen Zeittheil aber in der Richtung $M_1 M_2$ nach M'_3, so dass $M_2 M'_3 = M_1 M_2$, dann wird die unendlich kleine Strecke $M'_3 M_3$ die Deviation genannt. Denken wir uns das unendlich kleine Parallelogramm $M_2 M'_3 M_3 M_4$ construirt, so ist $M_2 M_4$ die Richtung der Beschleunigung des Punktes M_2 und die Beschleunigung selbst ist bekanntlich der Deviation proportional.* Da $M_1 M_2 = M_2 M'_3$, so ist die unendlich kleine Strecke $M_2 M_4$ auch die Diagonale des Parallelogramms $M_1 M_2 M_3 M_4$. Bewegt sich ein affin-veränderliches räumliches System $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$ in einem unendlich kleinen Zeittheil nach $A_2 B_2 C_2 D_2 \ldots$ und im folgenden gleichen unendlich kleinen Zeittheil nach $A_3 B_3 C_3 D_3 \ldots$; denken wir uns dann die unendlich kleinen Parallelogramme $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_1 C_2 C_3 C_4$, $D_1 D_2 D_3 D_4$ u. s. w. construirt, so ist nach obigem Satze 7 auch $A_4 B_4 C_4 D_4 \ldots$ eine Phase des affin-veränderlichen räumlichen Systems und die unendlich kleinen Verbindungsstrecken $A_2 A_4$, $B_2 B_4$, $C_2 C_4$, $D_2 D_4, \ldots$ sind beziehendlich die Richtungen der Beschleunigungen der Punkte $A_2 B_2 C_2 D_2 \ldots$. Denken wir uns ferner in diesen Richtungen die Grössen der zugehörigen Beschleunigungen

* Schell, „Theorie der Bewegung und der Kräfte", Leipzig 1870, S. 198.

A_2A_φ, B_2B_φ, C_2C_φ, D_2D_φ, ..., welche beziehendlich den unendlich kleinen Strecken A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4, D_2D_4, ... proportional sind, aufgetragen, so bilden die Endpunkte $A_\varphi B_\varphi C_\varphi D_\varphi$ ... der Beschleunigungen ein mit $A_2B_2C_2D_2$ ... affines räumliches System S_φ. Wir erhalten hiernach den wichtigen folgenreichen Satz:

12. Die Endpunkte der Beschleunigungen der Systempunkte einer Phase eines beliebig bewegten affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems bilden ein affines räumliches System.

Nennen wir das System S_φ der Endpunkte der Beschleunigungen die Beschleunigungsphase, so entspricht jeder Phase des veränderlichen räumlichen Systems eine affine Beschleunigungsphase und die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der Systemphase und der zugehörigen Beschleunigungsphase repräsentiren die Grösse und Richtung der Beschleunigungen der Systempunkte. Diese wichtige, interessante Beziehung liefert ein klares, übersichtliches Bild des Beschleunigungszustandes eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems und wird die Grundlage für unsere weiteren Untersuchungen bilden.

Eine Systemphase S_x und die zugehörige Beschleunigungsphase S_φ besitzen als affine räumliche Systeme im Allgemeinen drei im Endlichen liegende selbstentsprechende Ebenen, die sich in drei selbstentsprechenden Geraden und in einem selbstentsprechenden Punkte schneiden. Diesen selbstentsprechenden Punkt, den einzigen, dessen Beschleunigung gleich Null ist, wollen wir den Beschleunigungspol nennen. Für alle in den drei selbstentsprechenden Ebenen liegenden Systempunkte der betreffenden Phase liegen die Beschleunigungsrichtungen beziehendlich in diesen Ebenen und für alle in den drei selbstentsprechenden Geraden liegenden Systempunkte fallen die Beschleunigungsrichtungen resp. in diese Geraden. Da die affinen räumlichen Systeme S_x, S_φ durch vier nicht in einer Ebene liegende homologe Punkte bestimmt sind, so erhalten wir den Satz:

13. Sind durch A_xA_φ, B_xB_φ, C_xC_φ, D_xD_φ die Grössen und Richtungen der Beschleunigungen von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten $A_xB_xC_xD_x$ einer Phase S_x eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems gegeben, so ist der Beschleunigungszustand der Phase bestimmt, und wenn man zu einem beliebigen fünften Punkte E_x der Phase S_x den entsprechenden Punkt E_φ in der affinen Beschleunigungsphase S_φ construirt, so repräsentirt E_xE_φ die Grösse und Richtung der Beschleunigung des Punktes E_x.

Betrachten wir ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches, ähnlich-veränderliches oder starres ebenes System, so gelten nach den oben abgeleiteten Sätzen die analogen Beziehungen und es ergeben sich die folgenden Sätze:

14. Sind durch $A_x A_\varphi$, $B_x B_\varphi$, $C_x C_\varphi$ die Grössen und Richtungen der Beschleunigungen von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten $A_x B_x C_x$ einer Phase S_x eines affin-veränderlichen ebenen Systems gegeben, so ist der Beschleunigungszustand der Phase bestimmt, und wenn man zu einem beliebigen vierten Punkte D_x der Phase S_x den entsprechenden Punkt D_φ in der affinen ebenen Beschleunigungsphase S_φ construirt, so repräsentirt $D_x D_\varphi$ die Grösse und Richtung der Beschleunigung des Punktes D_x.

15. Sind durch $A_x A_\varphi$, $B_x B_\varphi$ die Grössen und Richtungen der Beschleunigungen von zwei Punkten $A_x B_x$ einer Phase S_x eines ähnlich-veränderlichen oder starren ebenen Systems gegeben, so ist der Beschleunigungszustand der Phase bestimmt, und wenn man zu einem beliebigen dritten Punkte C_x der Phase S_x den entsprechenden C_φ in der ähnlichen ebenen Beschleunigungsphase S_φ construirt, so repräsentirt $C_x C_\varphi$ die Grösse und Richtung der Beschleunigung des Punktes C_x.

Denken wir uns für alle Phasen des veränderlichen Systems den selbstentsprechenden Punkt mit der resp. zugehörigen Beschleunigungsphase bestimmt, so bilden diese selbstentsprechenden Punkte, die wir Beschleunigungspole genannt haben, eine Curve, welche wir die Beschleunigungspolbahn nennen wollen; und wenn wir zu diesen den verschiedenen Phasen angehörenden Beschleunigungspolen die entsprechenden Punkte in einer bestimmten Systemphase S_1 construiren, so erhalten wir in S_1 eine Curve, welche wir die Beschleunigungspolcurve nennen. Diese Curve in dem veränderlichen System hat demnach die Eigenschaft, dass ihre Punkte successive die Beschleunigung Null erhalten.

Die Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung erster Ordnung sind dieselben, wie zwischen Beschleunigung erster und zweiter Ordnung u. s. f. Demnach gelten alle Resultate, welche wir für die Beschleunigung erster Ordnung ableiten, auch für die Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung.

Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Punkte $ABCD$ eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen und nehmen wir einen beliebigen fünften Systempunkt E an, legen durch den Schnittpunkt G, den die

Gerade *DE* mit der Ebene *ABC* bildet, in diese Ebene eine beliebige Gerade, welche die Geraden *AB*, *AC* resp. in den Punkten β, γ trifft, dann beschreiben nach dem Satze 1 auch β, γ auf affinen Curven affine Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte *G* und folglich auch von dem auf *GD* liegenden Punkte *E*. Hiernach erhalten wir den Satz:

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen dieser Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Systemcurve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt dann die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve *L* eines affin-veränderlichen räumlichen Systems *S*, dessen Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als die Phasen einer Systemcurve *Λ* eines andern affin-veränderlichen räumlichen Systems Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve *L* affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve *Λ* erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in *S* liegenden Systemcurve *L* gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehendlich affine Curven sind, so ergiebt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann in eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig begrenzten, ins Unendliche gehenden Geraden degeneriren.

Ist die Bewegung eines Punktes auf einer Ellipse affin mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, so wird jene Bewegung in der Physik eine harmonische, die Umlaufszeit eine Periode genannt, und bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung stets nach dem Ellipsenmittelpunkt gerichtet und dem Abstande des bewegten Punktes von dem Ellipsenmittelpunkte proportional. Hiernach folgt der Satz:

19. Bewegen sich vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems harmonisch gleichperiodisch auf vier Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines räumliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen.

Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten veränderlichen Systems die zugehörige affine Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen, weil die Beschleunigung dem Abstande von dem betreffenden Ellipsenmittelpunkte proportional ist, die Ellipsenmittelpunkte beziehendlich die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse, daher ist der selbstentsprechende Punkt je zweier dieser Phasen identisch mit dem selbstentsprechenden von der betreffenden Systemphase und dem festen, unveränderlichen affinen Mittelpunktsystem. Bestimmen wir also alle selbstentsprechenden Punkte, welche die verschiedenen Systemphasen mit dem festen Mittelpunktsystem bilden, so erhalten wir die Beschleunigungspolbahn, und wenn wir zu den Beschleunigungspolen dieser Systemphasen die entsprechenden Punkte in einer bestimmten Systemphase S_1 construirt denken, so erhalten wir in S_1 eine Phase der Beschleunigungspolcurve. Die Punkte dieser Curve fallen während der Bewegung successive mit den Beschleunigungspolen zusammen und folglich bewegen sich die Punkte der Beschleunigungspolcurve harmonisch auf geraden Strecken, in welche die elliptischen Bahnen dieser Punkte ausarten. Da in den Endpunkten dieser geraden Strecken eine Rückkehr der Bewegung stattfindet, so bilden diese Endpunkte die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen Systems.

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich die folgenden Resultate für ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches ebenes System.

20. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affinveränderlichen ebenen Systems umhüllen dieselbe Curve, welche von den Phasen dieser Systemcurve umhüllt wird und welche wir die **Hüllbahncurve** nennen. Aus 20) ergiebt sich dann die Umkehrbarkeit der Bewegung:

21. **Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve C eines affin-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Punkte auf affinen ebenen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als Phasen einer Systemcurve Γ eines andern affin-veränderlichen ebenen Systems Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve C affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve Γ umhüllen dieselbe Hüllbahncurve, wie die Phasen der in S liegenden Systemcurve C.**

Ferner ergeben sich die folgenden speciellen Sätze:

22. **Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein ebenes affines System.**
23. **Bewegen sich drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines ebenes System.**

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken übergehen und dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen ebenen Systems.

Bewegen sich zwei Punkte eines affin - veränderlichen ebenen Systems mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf zwei in einer Ebene liegenden Kreisen, dann bewegen sich alle Punkte ihrer Verbindungsgeraden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf Kreisen. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines affinveränderlichen ebenen Systems solche Bewegungen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten und die Mittelpunkte der Bahnkreise bilden ein affines ebenes System; bewegt sich aber der dritte Systempunkt im entgegengesetzten Sinne mit derselben Winkelgeschwindigkeit, welche die beiden ersten Punkte besitzen, auf einem Kreise, dann beschreiben ausser *diesen drei Punkten nur* noch die auf der Verbindung der erstgenannten

beiden Punkte liegenden Systempunkte Kreise, alle übrigen bewegen sich harmonisch auf Ellipsen.

Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ABC eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene befindlichen ähnlichen Curven und nehmen wir einen beliebigen vierten Systempunkt D an, legen durch ihn eine beliebige Gerade, die AB, AC resp. in β, γ trifft, dann beschreiben nach dem Satze 5 auch die Punkte β, γ ähnliche Punktreihen auf ähnlichen Curven und dasselbe gilt somit auch von dem Punkte D. Dies giebt den Satz:

24. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden ähnlichen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die in dem Satze 21 ausgesprochene Umkehrbarkeit der Bewegung:

25. Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf zwei in einer Ebene befindlichen affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

26. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf zwei Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein jenem ähnliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen. Die Endpunkte dieser geraden Strecken erfüllen die Geschwindigkeitspolbahn. Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die zugehörige ähnliche Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen die Ellipsenmittelpunkte die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse und die Beschleunigungsrichtung eines Systempunktes geht beständig durch den entsprechenden Ellipsenmittelpunkt.

Wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sich harmonisch gleichperiodisch auf zwei in seiner Ebene liegenden geraden Strecken bewegen, dann laufen die anderen Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und auf geraden Strecken; und hierin ist die besondere Bewegung eines starren ebenen Systems, von dem zwei Punkte sich auf Geraden bewegen, als ganz specieller Fall enthalten.

Ist bei der im Satz 19 ausgesprochenen harmonischen Bewegung die Beschleunigung eines Punktes des affin-veränderlichen räumlichen Systems beständig gleich dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte

seiner elliptischen Bahn, dann gilt dasselbe von allen Systempunkten; die Beschleunigungsphase S_φ ist dann starr und identisch mit dem System der Mittelpunkte der elliptischen Bahnen.

Sind in Fig. 10 zwei in einer Ebene liegende affine ebene Systeme S_1, S_2 gegeben, so können wir leicht den geometrischen Ort derjenigen homologen Punkte dieser Systeme bestimmen, deren Verbindungsstrecken gleich einer gegebenen constanten Strecke m sind. Nehmen wir an, es seien $A_1 B_1 \ldots$ und $A_2 B_2 \ldots$ homologe Punktreihen auf den entsprechenden Geraden l_1, l_2 und P sei der selbstentsprechende Punkt von S_1, S_2; dann ziehen wir die entsprechenden Strahlen PA_1, PA_2, beschreiben um P mit m als Radius einen Kreis k, ziehen den Kreisradius $P\alpha \parallel A_1 A_2$, $\alpha A'_1 \parallel PA_2$ und $A'_1 A'_2 \parallel A_1 A_2$, so ist $A'_1 A'_2 = m$ und A'_1, A'_2 sind homologe Punkte in S_1, S_2, deren Verbindungsstrecke gleich der constanten Länge m ist. In gleicher Weise erhalten wir die homologen Punkte $B'_1 B'_2$, indem wir den Kreisradius $P\beta \parallel B_1 B_2$, $\beta B'_1 \parallel PB_2$ und $B'_1 B'_2 \parallel B_1 B_2$ ziehen. Dann bilden die Punkte $A'_1 B'_1 \ldots$ und $A'_2 B'_2 \ldots$ resp. den genannten geometrischen Ort in S_1 und S_2. Betrachten wir S_1 als Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems und S_2 als zugehörige Geschwindigkeitsphase oder Beschleunigungsphase, so bilden $A'_1 B'_1 \ldots$ beziehendlich den geometrischen Ort der Systempunkte, welche gleiche Geschwindigkeit oder gleiche Beschleunigung besitzen. Wir wollen nun beweisen, dass dieser geometrische Ort eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt mit P zusammenfällt. Die Verbindungsgeraden der homologen Punkte $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, ... umhüllen eine Parabel π, weil die Punktreihen $A_1 B_1 \ldots$ und $A_2 B_2 \ldots$ ähnlich sind. Die beiden durch P gehenden Geraden h, i, welche die homologen Punkte $H_1 H_2$, $J_1 J_2$ verbinden, sind die selbstentsprechenden Geraden in den affinen ebenen Systemen S_1, S_2; diese selbstentsprechenden Geraden, welche in unserer Figur reell sind und auch imaginär sein können, sind Tangenten der Parabel π und daher reell oder imaginär, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Parabel π liegt. Betrachten wir nun $P\alpha A'_1 A'_2$ und $P\beta B'_1 B'_2$ beziehendlich als entsprechende Punkte in affinen ebenen Systemen Σ_α und Σ_β, so sind auch in diesen Systemen die Geraden h, i selbstentsprechende Gerade; denn als reelle oder imaginäre Tangenten der Parabel π theilen sie die Verbindungsstrecken $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in gleiche Verhältnisse und folglich auch die parallelen Strecken $A'_1 A'_2$ und $B'_1 B'_2$. Betrachten wir $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \ldots$ als Phasen eines affin-veränderlichen ebenen Systems Σ, so sind in diesen die Geraden h, i und der Punkt P als selbstentsprechende Elemente fest und ein Punkt des Systems durchläuft den Kreis k. Nach einem früher bewiesenen allgemeinen Satze* folgt dann, dass alle Systempunkte

---

* Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 20, S. 381.

von Σ Curven beschreiben, die mit dem Kreise k affin sind und in affinen Systemen liegen, welche dieselben selbstentsprechenden Elemente h, i, l' besitzen. Demnach ist die Curve $A'_1 B'_1 \ldots$, sowie die Curve $A'_2 B'_2 \ldots$ eine Ellipse mit dem Mittelpunkte P. Hiernach ergeben sich die Sätze:

27. **Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.**

28. **Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Beschleunigung besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.**

Jeder constanten Geschwindigkeit entspricht eine Ellipse, welche für die Geschwindigkeit gleich Null in den Geschwindigkeitspol zusammenschrumpft; und alle diese Ellipsen sind affine Curven in ebenen affinen Systemen, die dieselben selbstentsprechenden Elemente besitzen, welche die betreffende Systemphase mit ihrer unendlich nahen Phase oder mit ihrer Geschwindigkeitsphase gemein hat. Ebenso entspricht jeder constanten Beschleunigung eine Ellipse, welche für die Beschleunigung gleich Null in den Beschleunigungspol zusammenschrumpft; und alle diese Ellipsen sind affine Curven in ebenen affinen Systemen, die dieselben selbstentsprechenden Elemente besitzen, welche die betreffende Systemphase mit der zugehörigen Beschleunigungsphase gemein hat. Da die Strecken $A'_1 A'_2$, $B'_1 B'_2$, ... constant sind und die selbstentsprechenden Geraden h, i die Verbindungsstrecken homologer Punkte der affinen Systeme $S_1 S_2$ in gleiche Verhältnisse theilen, so sind auch die Strecken $a_h a_i$, $b_h b_i$, ..., welche die Geraden h, i auf diesen Verbindungsstrecken bestimmen, constant. Wenn wir also die constante Strecke $a_h a_i$ zwischen den Geraden h, i, falls diese reell sind, gleiten lassen, so beschreiben die Punkte A'_1 und A'_2 resp. die homologen Ellipsen e_1 und e_2. Wir wollen eine Ellipse, deren Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, eine **Geschwindigkeitsellipse** und eine Ellipse, deren Punkte gleiche Beschleunigung haben, eine **Beschleunigungsellipse** nennen. Bei einem ähnlich-veränderlichen oder starren ebenen System gehen diese Ellipsen in concentrische Kreise über, deren gemeinsamer Mittelpunkt resp. der Geschwindigkeitspol oder Beschleunigungspol ist.

Die Fundamentalsätze 2 und 12 liefern ein klares, übersichtliches Bild des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes einer Phase S_x eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems S. Der Beschleunigungszustand in einer Phase S_x des veränderlichen Systems ergiebt sich als identisch mit dem Geschwindigkeitszustande, der auftritt bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung

punkte die selbstentsprechenden Elemente der Systemphase und der {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Phase sind.

30. Die Gesammtheit aller Geraden in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren Punkte in einer Ebene liegende {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen besitzen, bilden einen triedralen Strahlencomplex; und die in einer Ebene liegenden {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen umhüllen eine Parabel.

31. Die {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen der Punkte einer Geraden des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid.

32. Die {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen der Punkte jeder durch den {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Pol gehenden Geraden sind parallel.

Die durch einen Punkt in einem affinen System gehenden Geraden, nen schneidende Geraden im andern affinen System entsprechen, liegen f einer Kegelfläche zweiter Ordnung und die Schnittpunkte erfüllen ne Raumcurve dritter Ordnung. Daraus folgt der Satz:

33. Der geometrische Ort der Systempunkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen durch einen Punkt gehen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung, welche diesen Punkt und den {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Pol enthält, und diese Richtungen erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Zwei entsprechende Ebenenbüschel in zwei affinen Systemen erzeuen ein durch die selbstentsprechenden Punkte gehendes Hyperboloid. emnach folgt:

34. Der geometrische Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen eine Gerade schneiden, ist *ein durch* diese Gerade und den

Gerade DE mit der Ebene ABC bildet, in diese Ebene eine beliebig Gerade, welche die Geraden AB, AC resp. in den Punkten β, γ trifft dann beschreiben nach dem Satze 1 auch β, γ auf affinen Curven affin Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte G und folglich auch von dem auf GD liegenden Punkte E. Hiernach erhalten wir den Satz

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende System punkte eines affin-veränderlichen räumlichen System auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affin Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkte

Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlich Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punk reihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der dur jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten aff veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen die Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Syste curve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt da die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve L ein affin-veränderlichen räumlichen Systems S, dess Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen b schreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen Syste Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstar gedachten Phasen der Curve L affine Punktreihen durc schreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Syste curve $\varLambda$ erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche dur die Phasen der in S liegenden Systemcurve L gebild wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehendlich affi Curven sind, so ergiebt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Syste punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Syste affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen od Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affi Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Para beln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die d Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übe gehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zw Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseit *begrenzten, ins* Unendliche gehenden Geraden degeneriren.

Ist die Bewegung eines Punktes auf einer Ellipse affin mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, so wird jene Bewegung in der Physik eine harmonische, die Umlaufszeit eine Periode genannt, und bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung stets nach dem Ellipsenmittelpunkt gerichtet und dem Abstande des bewegten Punktes von dem Ellipsenmittelpunkte proportional. Hiernach folgt der Satz:

19. Bewegen sich vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems harmonisch gleichperiodisch auf vier Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines räumliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen.

Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten veränderlichen Systems die zugehörige affine Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen, weil die Beschleunigung dem Abstande von dem betreffenden Ellipsenmittelpunkte proportional ist, die Ellipsenmittelpunkte beziehendlich die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse, daher ist der selbstentsprechende Punkt je zweier dieser Phasen identisch mit dem selbstentsprechenden von der betreffenden Systemphase und dem festen, unveränderlichen affinen Mittelpunktsystem. Bestimmen wir also alle selbstentsprechenden Punkte, welche die verschiedenen Systemphasen mit dem festen Mittelpunktsystem bilden, so erhalten wir die Beschleunigungspolbahn, und wenn wir zu den Beschleunigungspolen dieser Systemphasen die entsprechenden Punkte in einer bestimmten Systemphase S_1 construirt denken, so erhalten wir in S_1 eine Phase der Beschleunigungspolcurve. Die Punkte dieser Curve fallen während der Bewegung successive mit den Beschleunigungspolen zusammen und folglich bewegen sich die Punkte der Beschleunigungspolcurve harmonisch auf geraden Strecken, in welche die elliptischen Bahnen dieser Punkte ausarten. Da in den Endpunkten dieser geraden Strecken eine Rückkehr der Bewegung stattfindet, so bilden diese Endpunkte die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen Systems.

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich die folgenden Resultate für ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches ebenes System.

20. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin veränderlichen ebenen Systems umhüllen dieselbe Curve, welche von de Phasen dieser Systemcurve umhüllt wird und welche wir die Hüllbahn curve nennen. Aus 20) ergiebt sich dann die Umkehrbarkeit der Be wegung:

21. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve C eine affin-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Punkt auf affinen ebenen Bahncurven affine Punktreihen be schreiben, können als Phasen einer Systemcurve Γ eine andern affin-veränderlichen ebenen Systems Σ ange sehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedac ten Phasen der Curve C affine Punktreihen durchschre ten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve umhüllen dieselbe Hüllbahncurve, wie die Phasen der S liegenden Systemcurve C.

Ferner ergeben sich die folgenden speciellen Sätze:

22. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende S stempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Syste affine Punktreihen auf drei Hyperbeln, Ellipsen od Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affi Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Pa beln, und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die d Ellipsen bilden ein ebenes affines System.

23. Bewegen sich drei nicht in einer Geraden liegende S stempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Syste harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen, so beweg sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodis auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden e affines ebenes System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken übergehen u dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Geschwindigkeitspolba des veränderlichen ebenen Systems.

Bewegen sich zwei Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Syste mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf zwei in ein Ebene liegenden Kreisen, dann bewegen sich alle Punkte ihrer Verbi dungsgeraden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne a Kreisen. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines affi veränderlichen ebenen Systems solche Bewegungen, so gilt dasselbe v allen Systempunkten und die Mittelpunkte der Bahnkreise bilden e affines ebenes System; bewegt sich aber der dritte Systempunkt im e gegengesetzten Sinne mit derselben Winkelgeschwindigkeit, welche d beiden ersten Punkte besitzen, auf einem Kreise, dann beschreiben aus *diesen drei Punkten* nur noch die auf der Verbindung der erstgenannt

beiden Punkte liegenden Systempunkte Kreise, alle übrigen bewegen sich harmonisch auf Ellipsen.

Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ABC eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene befindlichen ähnlichen Curven und nehmen wir einen beliebigen vierten Systempunkt D an, legen durch ihn eine beliebige Gerade, die AB, AC resp. in β, γ trifft, dann beschreiben nach dem Satze 5 auch die Punkte β, γ ähnliche Punktreihen auf ähnlichen Curven und dasselbe gilt somit auch von dem Punkte D. Dies giebt den Satz:

24. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden ähnlichen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die in dem Satze 21 ausgesprochene Umkehrbarkeit der Bewegung:

25. Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf zwei in einer Ebene befindlichen affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

26. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf zwei Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein jenem ähnliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen. Die Endpunkte dieser geraden Strecken erfüllen die Geschwindigkeitspolbahn. Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die zugehörige ähnliche Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen die Ellipsenmittelpunkte die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse und die Beschleunigungsrichtung eines Systempunktes geht beständig durch den entsprechenden Ellipsenmittelpunkt.

Wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sich harmonisch gleichperiodisch auf zwei in seiner Ebene liegenden geraden Strecken bewegen, dann laufen die anderen Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und auf geraden Strecken; und hierin ist die besondere Bewegung eines starren ebenen Systems, von dem zwei Punkte sich auf Geraden bewegen, als ganz specieller Fall enthalten.

Ist bei der im Satz 19 ausgesprochenen harmonischen Bewegung die Beschleunigung eines Punktes des affin-veränderlichen räumlichen Systems beständig gleich dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte

Gerade DE mit der Ebene ABC bildet, in diese Ebene eine beliebig
Gerade, welche die Geraden AB, AC resp. in den Punkten β, γ triff
dann beschreiben nach dem Satze 1 auch β, γ auf affinen Curven affin
Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte G und folglich auc
von dem auf GD liegenden Punkte E. Hiernach erhalten wir den Sat

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systen punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systen auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affi Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkte

Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlich Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Pun reihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der dur jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten aff veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen die Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Syste curve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt da die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve L ein affin-veränderlichen räumlichen Systems S, dess Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen b schreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen System Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarr gedachten Phasen der Curve L affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve A erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in S liegenden Systemcurve L gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehendlich affine Curven sind, so ergiebt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann in eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig *begrenzten, ins* Unendliche gehenden Geraden degeneriren.

Ist die Bewegung eines Punktes auf einer Ellipse affin mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, so wird jene Bewegung in der Physik eine **harmonische**, die Umlaufszeit eine **Periode** genannt, und bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung stets nach dem Ellipsenmittelpunkt gerichtet und dem Abstande des bewegten Punktes von dem Ellipsenmittelpunkte proportional. Hiernach folgt der Satz:

19. **Bewegen sich vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems harmonisch gleichperiodisch auf vier Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines räumliches System.**

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen.

Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten veränderlichen Systems die zugehörige affine Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen, weil die Beschleunigung dem Abstande von dem betreffenden Ellipsenmittelpunkte proportional ist, die Ellipsenmittelpunkte beziehendlich die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse, daher ist der selbstentsprechende Punkt je zweier dieser Phasen identisch mit dem selbstentsprechenden von der betreffenden Systemphase und dem festen, unveränderlichen affinen Mittelpunktsystem. Bestimmen wir also alle selbstentsprechenden Punkte, welche die verschiedenen Systemphasen mit dem festen Mittelpunktsystem bilden, so erhalten wir die Beschleunigungspolbahn, und wenn wir zu den Beschleunigungspolen dieser Systemphasen die entsprechenden Punkte in einer bestimmten Systemphase S_1 construirt denken, so erhalten wir in S_1 eine Phase der Beschleunigungspolcurve. Die Punkte dieser Curve fallen während der Bewegung successive mit den Beschleunigungspolen zusammen und folglich bewegen sich die Punkte der Beschleunigungspolcurve harmonisch auf geraden Strecken, in welche die elliptischen Bahnen dieser Punkte ausarten. Da in den Endpunkten dieser geraden Strecken eine Rückkehr der Bewegung stattfindet, so bilden diese Endpunkte die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen Systems.

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich die folgenden Resultate für ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches ebenes System.

20. **Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.**

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems umhüllen dieselbe Curve, welche von den Phasen dieser Systemcurve umhüllt wird und welche wir die Hüllbahncurve nennen. Aus 20) ergiebt sich dann die Umkehrbarkeit der Bewegung:

21. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve C eine affin-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Punkt auf affinen ebenen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als Phasen einer Systemcurve Γ eines andern affin-veränderlichen ebenen Systems Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve C affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve umhüllen dieselbe Hüllbahncurve, wie die Phasen der in S liegenden Systemcurve C.

Ferner ergeben sich die folgenden speciellen Sätze:

22. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein ebenes affines System.

23. Bewegen sich drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines ebenes System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken übergehen und dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen ebenen Systems.

Bewegen sich zwei Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf zwei in einer Ebene liegenden Kreisen, dann bewegen sich alle Punkte ihrer Verbindungsgeraden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf Kreisen. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems solche Bewegungen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten und die Mittelpunkte der Bahnkreise bilden ein affines ebenes System; bewegt sich aber der dritte Systempunkt im entgegengesetzten Sinne mit derselben Winkelgeschwindigkeit, welche die beiden ersten Punkte besitzen, auf einem Kreise, dann beschreiben ausser *diesen drei Punkten* nur noch die auf der Verbindung der erstgenannten

beiden Punkte liegenden Systempunkte Kreise, alle übrigen bewegen sich harmonisch auf Ellipsen.

Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ABC eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene befindlichen ähnlichen Curven und nehmen wir einen beliebigen vierten Systempunkt D an, legen durch ihn eine beliebige Gerade, die AB, AC resp. in β, γ trifft, dann beschreiben nach dem Satze 5 auch die Punkte β, γ ähnliche Punktreihen auf ähnlichen Curven und dasselbe gilt somit auch von dem Punkte D. Dies giebt den Satz:

24. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden ähnlichen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die in dem Satze 21 ausgesprochene Umkehrbarkeit der Bewegung:

25. Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf zwei in einer Ebene befindlichen affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

26. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf zwei Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein jenem ähnliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen. Die Endpunkte dieser geraden Strecken erfüllen die Geschwindigkeitspolbahn. Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die zugehörige ähnliche Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen die Ellipsenmittelpunkte die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse und die Beschleunigungsrichtung eines Systempunktes geht beständig durch den entsprechenden Ellipsenmittelpunkt.

Wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sich harmonisch gleichperiodisch auf zwei in seiner Ebene liegenden geraden Strecken bewegen, dann laufen die anderen Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und auf geraden Strecken; und hierin ist die besondere Bewegung eines starren ebenen Systems, von dem zwei Punkte sich auf Geraden bewegen, als ganz specieller Fall enthalten.

Ist bei der im Satz 19 ausgesprochenen harmonischen Bewegung die Beschleunigung eines Punktes des affin-veränderlichen räumlichen Systems beständig gleich dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte

Gerade DE mit der Ebene ABC bildet, in diese Ebene eine beliebig Gerade, welche die Geraden AB, AC resp. in den Punkten β, γ triff dann beschreiben nach dem Satze 1 auch β, γ auf affinen Curven affin Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte G und folglich auc von dem auf GD liegenden Punkte E. Hiernach erhalten wir den Sat

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affin Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkte

Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlich Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der du jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten aff veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen die Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Syste curve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt da die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve L ein affin-veränderlichen räumlichen Systems S, dess Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen b schreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen System Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarr gedachten Phasen der Curve L affine Punktreihen durch schreiten; und die Phasen der in Σ liegenden System curve Λ erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durc die Phasen der in S liegenden Systemcurve L gebilde wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehendlich affin Curven sind, so ergiebt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen od Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affin Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Para beln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die d Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übe gehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zw Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseit *begrenzten, ins* Unendliche gehenden Geraden degeneriren.

Ist die Bewegung eines Punktes auf einer Ellipse affin mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, so wird jene Bewegung in der Physik eine harmonische, die Umlaufszeit eine Periode genannt, und bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung stets nach dem Ellipsenmittelpunkt gerichtet und dem Abstande des bewegten Punktes von dem Ellipsenmittelpunkte proportional. Hiernach folgt der Satz:

19. Bewegen sich vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems harmonisch gleichperiodisch auf vier Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines räumliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen.

Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten veränderlichen Systems die zugehörige affine Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen, weil die Beschleunigung dem Abstande von dem betreffenden Ellipsenmittelpunkte proportional ist, die Ellipsenmittelpunkte beziehendlich die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse, daher ist der selbstentsprechende Punkt je zweier dieser Phasen identisch mit dem selbstentsprechenden von der betreffenden Systemphase und dem festen, unveränderlichen affinen Mittelpunktsystem. Bestimmen wir also alle selbstentsprechenden Punkte, welche die verschiedenen Systemphasen mit dem festen Mittelpunktsystem bilden, so erhalten wir die Beschleunigungspolbahn, und wenn wir zu den Beschleunigungspolen dieser Systemphasen die entsprechenden Punkte in einer bestimmten Systemphase S_1 construirt denken, so erhalten wir in S_1 eine Phase der Beschleunigungspolcurve. Die Punkte dieser Curve fallen während der Bewegung successive mit den Beschleunigungspolen zusammen und folglich bewegen sich die Punkte der Beschleunigungspolcurve harmonisch auf geraden Strecken, in welche die elliptischen Bahnen dieser Punkte ausarten. Da in den Endpunkten dieser geraden Strecken eine Rückkehr der Bewegung stattfindet, so bilden diese Endpunkte die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen Systems.

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich die folgenden Resultate für ein in einer festen Ebene bewegtes affin-veränderliches ebenes System.

20. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems umhüllen dieselbe Curve, welche von der Phasen dieser Systemcurve umhüllt wird und welche wir die Hüllbahncurve nennen. Aus 20) ergiebt sich dann die Umkehrbarkeit der Bewegung:

21. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve C eines affin-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Punkte auf affinen ebenen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als Phasen einer Systemcurve Γ eines andern affin-veränderlichen ebenen Systems Σ angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve C affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve umhüllen dieselbe Hüllbahncurve, wie die Phasen der i S liegenden Systemcurve C.

Ferner ergeben sich die folgenden speciellen Sätze:

22. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affin Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die de Ellipsen bilden ein ebenes affines System.

23. Bewegen sich drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen System harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines ebenes System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken übergehen und dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen ebenen Systems.

Bewegen sich zwei Punkte eines affin-veränderlichen ebenen System mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf zwei in eine Ebene liegenden Kreisen, dann bewegen sich alle Punkte ihrer Verbindungsgeraden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne au Kreisen. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines affin veränderlichen ebenen Systems solche Bewegungen, so gilt dasselbe vo allen Systempunkten und die Mittelpunkte der Bahnkreise bilden ei affines ebenes System; bewegt sich aber der dritte Systempunkt im entgegengesetzten Sinne mit derselben Winkelgeschwindigkeit, welche di beiden ersten Punkte besitzen, auf einem Kreise, dann beschreiben ausse *diesen drei Punkten* nur noch die auf der Verbindung der erstgenannten

beiden Punkte liegenden Systempunkte Kreise, alle übrigen bewegen sich harmonisch auf Ellipsen.

Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ABC eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene befindlichen ähnlichen Curven und nehmen wir einen beliebigen vierten Systempunkt D an, legen durch ihn eine beliebige Gerade, die AB, AC resp. in β, γ trifft, dann beschreiben nach dem Satze 5 auch die Punkte β, γ ähnliche Punktreihen auf ähnlichen Curven und dasselbe gilt somit auch von dem Punkte D. Dies giebt den Satz:

24. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Punktreihen auf drei in einer Ebene liegenden ähnlichen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die in dem Satze 21 ausgesprochene Umkehrbarkeit der Bewegung:

25. Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf zwei in einer Ebene befindlichen affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

26. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf zwei Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein jenem ähnliches System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken ausarten, auf denen sich die betreffenden Punkte harmonisch bewegen. Die Endpunkte dieser geraden Strecken erfüllen die Geschwindigkeitspolbahn. Denken wir uns zu jeder Phase des so bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die zugehörige ähnliche Beschleunigungsphase bestimmt, so theilen die Ellipsenmittelpunkte die Verbindungsstrecken homologer Punkte von je einer Systemphase und zugehöriger Beschleunigungsphase in gleiche Verhältnisse und die Beschleunigungsrichtung eines Systempunktes geht beständig durch den entsprechenden Ellipsenmittelpunkt.

Wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sich harmonisch gleichperiodisch auf zwei in seiner Ebene liegenden geraden Strecken bewegen, dann laufen die anderen Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und auf geraden Strecken; und hierin ist die besondere Bewegung eines starren ebenen Systems, von dem zwei Punkte sich auf Geraden bewegen, als ganz specieller Fall enthalten.

Ist bei der im Satz 19 ausgesprochenen harmonischen Bewegung die Beschleunigung eines Punktes des affin-veränderlichen räumlichen Systems beständig gleich dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte

des affin-veränderlichen Systems von der Phase S_x nach der zugehörigen Beschleunigungsphase S_φ in der Zeiteinheit. Denken wir uns zu einer Phase S_x des veränderlichen Systems die zugehörige affine Geschwindigkeitsphase S_v bestimmt, so geben uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme S_x, S_v die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte und die Tangenten an den Bahncurven dieser Punkte; denken wir uns ferner zu der Phase S_x die zugehörige affine Beschleunigungsphase S_φ construirt, so liefern uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme S_x, S_φ die Grösse und Richtung der Beschleunigung der betreffenden Punkte der Systemphase S_x. Hiernach ist das Studium des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems auf die Untersuchung der rein-geometrischen Beziehungen der drei affinen räumlichen Systeme $S_x S_v S_\varphi$ zurückgeführt und die durch die Geometrie der Lage gebotenen zahlreichen interessanten Beziehungen können als Sätze über Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Bahncurven der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems interpretirt werden. Wir wollen einige der wichtigsten Resultate, die unmittelbar aus dieser Darlegung hervorgehen, ableiten.

Die Verbindungsstrahlen der homologen Punkte zweier affiner räumlicher Systeme bilden einen besondern Strahlencomplex zweiter Ordnung und zweiter Classe, und die drei im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Ebenen dieser Systeme, welche auch Hauptebenen des Complexes genannt werden, bestimmen auf jedem dieser Strahlen Strecken, die im constanten Verhältnisse stehen. Dieser besondere Strahlencomplex, den wir einen **triedralen Strahlencomplex** nennen wollen, wird auch durch die Schnittgeraden je zweier entsprechender Ebenen der affinen Systeme gebildet. Der triedrale Strahlencomplex ist, weil zwei affine räumliche Systeme stets die unendlich ferne Ebene selbstentsprechend gemein haben, ein tetraedraler Strahlencomplex mit einer unendlich fernen Hauptebene und wird noch mehr specialisirt, wenn die affinen räumlichen Systeme in ähnliche oder congruente übergehen; aber wir wollen jene Benennung auch für diese beiden letzten besonderen Fälle beibehalten. Ferner wollen wir auch, um Ausnahmen zu vermeiden und der Consequenz wegen von starren räumlichen Systemen sagen, dass sie einen Geschwindigkeitspol besitzen, obwohl derselbe stets im Unendlichen liegt. Wir erhalten hiernach die sich von selbst ergebenden Sätze:

29. Die $\left\{\begin{array}{l}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{array}\right\}$ **Richtungen der Punkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems bilden einen triedralen Strahlencomplex, dessen Hauptebenen und Haupt-**

von Σ Curven beschreiben, die mit dem Kreise k affin sind und in affinen Systemen liegen, welche dieselben selbstentsprechenden Elemente h, i, P besitzen. Demnach ist die Curve $A'_1 B'_1 \ldots$, sowie die Curve $A'_2 B'_2 \ldots$ eine Ellipse mit dem Mittelpunkte P. Hiernach ergeben sich die Sätze:

27. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

28. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Beschleunigung besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.

Jeder constanten Geschwindigkeit entspricht eine Ellipse, welche für die Geschwindigkeit gleich Null in den Geschwindigkeitspol zusammenschrumpft; und alle diese Ellipsen sind affine Curven in ebenen affinen Systemen, die dieselben selbstentsprechenden Elemente besitzen, welche die betreffende Systemphase mit ihrer unendlich nahen Phase oder mit ihrer Geschwindigkeitsphase gemein hat. Ebenso entspricht jeder constanten Beschleunigung eine Ellipse, welche für die Beschleunigung gleich Null in den Beschleunigungspol zusammenschrumpft; und alle diese Ellipsen sind affine Curven in ebenen affinen Systemen, die dieselben selbstentsprechenden Elemente besitzen, welche die betreffende Systemphase mit der zugehörigen Beschleunigungsphase gemein hat. Da die Strecken $A'_1 A'_2$, $B'_1 B'_2$, ... constant sind und die selbstentsprechenden Geraden h, i die Verbindungsstrecken homologer Punkte der affinen Systeme $S_1 S_2$ in gleiche Verhältnisse theilen, so sind auch die Strecken $a_h a_i$, $b_h b_i$, ..., welche die Geraden h, i auf diesen Verbindungsstrecken bestimmen, constant. Wenn wir also die constante Strecke $a_h a_i$ zwischen den Geraden h, i, falls diese reell sind, gleiten lassen, so beschreiben die Punkte A'_1 und A'_2 resp. die homologen Ellipsen e_1 und e_2. Wir wollen eine Ellipse, deren Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, eine Geschwindigkeitsellipse und eine Ellipse, deren Punkte gleiche Beschleunigung haben, eine Beschleunigungsellipse nennen. Bei einem ähnlich-veränderlichen oder starren ebenen System gehen diese Ellipsen in concentrische Kreise über, deren gemeinsamer Mittelpunkt resp. der Geschwindigkeitspol oder Beschleunigungspol ist.

Die Fundamentalsätze 2 und 12 liefern ein klares, übersichtliches Bild des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes einer Phase S_x eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems S. Der Beschleunigungszustand in einer Phase S_x des veränderlichen Systems ergiebt sich als identisch mit dem Geschwindigkeitszustande, der auftritt bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung

des affin-veränderlichen Systems von der Phase S_x nach der zugehörigen Beschleunigungsphase S_φ in der Zeiteinheit. Denken wir uns zu einer Phase S_x des veränderlichen Systems die zugehörige affine Geschwindigkeitsphase S_v bestimmt, so geben uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme S_x, S_v die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte und die Tangenten an den Bahncurven dieser Punkte; denken wir uns ferner zu der Phase S_x die zugehörige affine Beschleunigungsphase S_φ construirt, so liefern uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme S_x, S_φ die Grösse und Richtung der Beschleunigung der betreffenden Punkte der Systemphase S_x. Hiernach ist das Studium des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems auf die Untersuchung der rein-geometrischen Beziehungen der drei affinen räumlichen Systeme $S_x S_v S_\varphi$ zurückgeführt und die durch die Geometrie der Lage gebotenen zahlreichen interessanten Beziehungen können als Sätze über Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Bahncurven der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems interpretirt werden. Wir wollen einige der wichtigsten Resultate, die unmittelbar aus dieser Darlegung hervorgehen, ableiten.

Die Verbindungsstrahlen der homologen Punkte zweier affiner räumlicher Systeme bilden einen besondern Strahlencomplex zweiter Ordnung und zweiter Classe, und die drei im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Ebenen dieser Systeme, welche auch Hauptebenen des Complexes genannt werden, bestimmen auf jedem dieser Strahlen Strecken, die im constanten Verhältnisse stehen. Dieser besondere Strahlencomplex, den wir einen **triedralen Strahlencomplex** nennen wollen, wird auch durch die Schnittgeraden je zweier entsprechender Ebenen der affinen Systeme gebildet. Der triedrale Strahlencomplex ist, weil zwei affine räumliche Systeme stets die unendlich ferne Ebene selbstentsprechend gemein haben, ein tetraedraler Strahlencomplex mit einer unendlich fernen Hauptebene und wird noch mehr specialisirt, wenn die affinen räumlichen Systeme in ähnliche oder congruente übergehen; aber wir wollen jene Benennung auch für diese beiden letzten besonderen Fälle beibehalten. Ferner wollen wir auch, um Ausnahmen zu vermeiden und der Consequenz wegen von starren räumlichen Systemen sagen, dass sie einen Geschwindigkeitspol besitzen, obwohl derselbe stets im Unendlichen liegt. Wir erhalten hiernach die sich von selbst ergebenden Sätze:

29. Die $\left\{\begin{array}{l}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{array}\right\}$ Richtungen der Punkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems bilden einen **triedralen Strahlencomplex**, dessen Hauptebenen und **Haupt-**

punkte die selbstentsprechenden Elemente der Systemphase und der {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Phase sind.

30. Die Gesammtheit aller Geraden in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren Punkte in einer Ebene liegende {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen besitzen, bilden einen triedralen Strahlencomplex; und die in einer Ebene liegenden {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen umhüllen eine Parabel.

31. Die {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen der Punkte einer Geraden des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid.

32. Die {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen der Punkte jeder durch den {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Pol gehenden Geraden sind parallel.

Die durch einen Punkt in einem affinen System gehenden Geraden, nen schneidende Geraden im andern affinen System entsprechen, liegen af einer Kegelfläche zweiter Ordnung und die Schnittpunkte erfüllen ne Raumcurve dritter Ordnung. Daraus folgt der Satz:

33. Der geometrische Ort der Systempunkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen durch einen Punkt gehen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung, welche diesen Punkt und den {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Pol enthält, und diese Richtungen erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Zwei entsprechende Ebenenbüschel in zwei affinen Systemen erzeugen ein durch die selbstentsprechenden Punkte gehendes Hyperboloid. Demnach folgt:

34. Der geometrische Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren {Geschwindigkeits- / Beschleunigungs-} Richtungen eine Gerade schneiden, ist ein durch diese Gerade und den

{Geschwindigkeits-/Beschleunigungs-} Pol gehendes Hyperboloid und die Gesammtheit dieser Richtungen umhüllt eine Complexfläche.

Zwei entsprechende Parallelebenenbüschel in zwei affinen Systemen haben die unendlich ferne Ebene selbstentsprechend gemeinsam und erzeugen demnach eine Ebene, die durch den im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt der affinen Systeme geht. Bestimmen wir also drei solche Ebenen durch drei Paar entsprechende Parallelebenenbüschel in den Systemen S_x, S_v, so ist der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen der Geschwindigkeitspol. Die Geschwindigkeitsrichtungen aller Punkte einer solchen durch den Geschwindigkeitspol gehenden Ebene liegen demnach in den Ebenen des zugehörigen, in S_v befindlichen Parallelebenenbüschels oder, mit anderen Worten, sind senkrecht zu einer auf diesen Parallelebenen normalen Geraden. Das Analoge gilt für die Beschleunigung und wir erhalten den von Herrn Durrande* analytisch abgeleiteten Satz:

35. Alle Punkte in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren {Geschwindigkeits-/Beschleunigungs-} Richtungen senkrecht zu einer Geraden sind, liegen in einer durch den {Geschwindigkeits-/Beschleunigungs-} Pol gehenden Ebene.

Betrachten wir zwei entsprechende ebene affine Systeme e_x, e_v in den affinen räumlichen Systemen S_x, S_v, dann entspricht der Schnittgeraden $e_x e_v$ in S_v eine in der Ebene e_x liegende Gerade in S_x. Denken wir uns von dem affinen ebenen System e_v eine senkrechte Projection e'_v auf Ebene e_x bestimmt, dann haben die affinen ebenen Systeme e_x, e'_v einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt und zwei durch diesen gehende selbstentsprechende Gerade, die auch imaginär sein können. Dasselbe gilt von je zwei in S_x, S_φ liegenden ebenen Systemen und wir gelangen demnach zu dem Satze:

36. In jeder Ebene e_x einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems giebt es einen Punkt, dessen {Geschwindigkeits-/Beschleunigungs-} Richtung senkrecht zu dieser Ebene e_x ist, und zwei durch diesen Punkt gehende reelle oder imaginäre Gerade, die solche

* a. a. O., und *Comptes rendus LXXIV*, 1234.

Punkte tragen, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen in senkrecht auf e_x stehenden Ebenen liegen, und ferner eine Gerade, für deren Punkte die $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen in der Ebene e_x selbst liegen.*

Denken wir uns zu einer Systemphase S_x die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsphase S_v, S_φ bestimmt und legen wir durch drei homologe Punkte dieser drei affinen Systeme eine Ebene, so enthält dieselbe die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsrichtung des betreffenden Systempunktes in der Phase S_x und ist daher die Schmiegungsebene für das Bahncurvenelement dieses Punktes. Da die Ebenen, welche durch je drei homologe Punkte von drei entsprechenden Punktreihen gehen, eine Raumcurve dritter Classe osculiren, so ergiebt sich der Satz:

37. **Die Schmiegungsebenen für die Bahncurvenelemente der Punkte einer Geraden eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems sind zugleich Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Classe, der cubischen Parabel.**

Wir nehmen in den beiden affinen räumlichen Systemen S_x, S_v zwei entsprechende Gerade g_x, g_v an, legen eine Ebene e parallel zu den Verbindungsgeraden der auf g_x, g_v liegenden homologen Punkte und beschreiben um den Schnittpunkt, welchen die Gerade g_x mit der Ebene e bildet, einen Kreis mit einem Radius m. Betrachten wir nun diesen Kreis als Directrix einer Cylinderfläche, deren Mantellinien der Geraden g_x parallel sind, so wird diese Cylinderfläche von der Geraden g_v in zwei Punkten geschnitten und die diesen beiden Punkten entsprechenden Punkte auf g_x haben dann eine Geschwindigkeit, welche gleich dem Kreisradius m ist. Es giebt hiernach auf jeder Systemgeraden zwei Punkte mit der Geschwindigkeit m, die auch imaginär sein können. Geht die Gerade g_x durch den Geschwindigkeitspol P^{xv}, so geht auch die entsprechende Gerade g_v durch denselben; dann liegen die Geschwindigkeitsrichtungen der Punkte der Geraden g_x in der Ebene der Geraden $g_x g_v$ und sind parallel. Demnach befinden sich die beiden auf g_x liegenden Punkte, welche dieselbe Geschwindigkeit m besitzen, in gleichem Abstande von P^{xv} und sind in diesem Falle stets reell. Wenn wir in gleicher Weise zwei entsprechende Gerade g_x, g_φ in den Systemen S_x, S_φ betrachten, so erhalten wir die Sätze:

38. **Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, welche**

* Hierbei betrachten wir selbstverständlich die selbstentsprechenden Ebenen in $S_x S_v$ und $S_x S_\varphi$ als ausgeschlossen.

gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

39. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems, welche gleiche Beschleunigung besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.*

Da ähnliche räumliche Systeme eine reelle selbstentsprechende Ebene und eine auf dieser senkrecht stehende selbstentsprechende Gerade besitzen, und congruente räumliche Systeme nur eine selbstentsprechende Gerade haben, welche zwei congruente Punktreihen trägt, so folgt aus dem Satze 38 der specielle:

40. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol, dessen Axe die selbstentsprechende Gerade ist, welche die Systemphase mit ihrer unendlich nahen Phase gemeinsam hat und welches bei einem starren räumlichen System in einen Rotationscylinder übergeht.

Wir wollen das Ellipsoid, dessen Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, das Geschwindigkeitsellipsoid und das Ellipsoid, welches die Punkte gleicher Beschleunignng trägt, das Beschleunigungsellipsoid nennen; jenes geht für die Geschwindigkeit Null in den Geschwindigkeitspol über und dieses zieht sich für die Beschleunigung Null in den Beschleunigungspol zusammen.

Sind drei Ebenen $E_h E_i E_k$ gegeben, welche sich in einem Punkte P schneiden, und denken wir uns die Geraden $g_a g_b g_c \ldots$ im Raume liegend welche diese Ebenen resp. in den Punkten $A_h A_i A_k$, $B_h B_i B_k$, $C_h C_i C$ derart treffen, dass

$$\frac{A_h A_i}{A_i A_k} = \frac{B_h B_i}{B_i B_k} = \frac{C_h C_i}{C_i C_k} = \ldots = const.$$

ist, nehmen wir ferner auf diesen Geraden die ähnlichen Punktreih $A_1 A_2 A_h A_i A_k$, $B_1 B_2 B_h B_i B_k$, $C_1 C_2 C_h C_i C_k$, ... an, so können wir di Geraden $g_a g_b g_c \ldots$ als die Verbindungsgeraden der homologen Punk $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, ... zweier räumlicher affiner Systeme S_1, S_2 anseh für welche P der selbstentsprechende Punkt und $E_h E_i E_k$ die drei selbs entsprechenden Ebenen sind. Ist insbesondere

* Dieser Satz wurde für das starre System laut einer brieflichen Mittheilu zuerst von Herrn Schell in seinem Vortrage zu Carlsruhe im Jahre 1871 analytis abgeleitet, ferner von Herrn Jordan und dann auch von Herrn Liguine *(Bullet de la Société mathématique de France 1873, T. I pag. 146 et 152)* mitgetheilt.

$$A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2 = \ldots = const.,$$

dann sind die genannten Punktreihen congruent und der geometrische Ort der Punkte $A_1 B_1 C_1 \ldots$, welche von ihren homologen Punkten gleichen Abstand haben, ist nach dem Satze 38 ein Ellipsoid. Hieraus folgt der Satz:

41. **Bewegen sich drei Punkte einer starren geraden Punktreihe auf drei Ebenen, so beschreibt jeder andere Punkt dieser Reihe ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der drei Ebenen ist.**

Stellen wir noch die Bedingung, dass ein vierter Punkt dieser starren Punktreihe sich auf einer vierten Ebene bewegt, dann schneidet diese das betreffende Ellipsoid in einer Ellipse $\mathfrak{e}_1$, der im andern affinen System eine Ellipse $\mathfrak{e}_2$ entspricht, und wir erhalten den von Herrn Mannheim* gegebenen Satz:

42. **Wenn vier Punkte einer starren geraden Punktreihe sich auf vier Ebenen bewegen, so beschreibt jeder Punkt dieser Reihe eine Ellipse.**

Schneiden sich diese vier Ebenen in einem Punkte, dann ist dieser der gemeinschaftliche Mittelpunkt für alle von den Punkten der Reihe beschriebenen Ellipsen.

Fällen wir von den Punkten der Beschleunigungsphase S_φ Senkrechte auf die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der Geschwindigkeits- und der Systemphase S_v, S_x, dann bilden die erhaltenen Fusspunkte die Endpunkte der Tangentialbeschleunigungen der Systempunkte in der Phase S_x. Ziehen wir durch die Punkte in S_x zu diesen Senkrechten Parallelen und fällen von den homologen Punkten in S_φ auf diese Parallelen Senkrechte, dann bilden die entstandenen Fusspunkte die Endpunkte der Normalbeschleunigungen, und diese Normalbeschleunigung wird gleich Null, wenn die Beschleunigungsrichtung mit der Geschwindigkeitsrichtung zusammenfällt. Nehmen wir in den affinen räumlichen Systemen $S_x S_v S_\varphi$ die entsprechenden affinen ebenen Systeme $e_x e_v e_\varphi$ an, so sind die Ebenen, welche homologe Gerade von e_x und e_v verbinden, Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Classe. Ebenso erzeugen die Ebenen, welche homologe Gerade von e_x und e_φ enthalten, als Schmiegungsebenen auch eine Curve dritter Classe. Diese beiden Curven haben ausser der Ebene e_x und der unendlich fernen Ebene noch drei gemeinschaftliche Schmiegungsebenen $\varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon'''$, die je drei homologe Gerade der affinen ebenen Systeme $e_x e_v e_\varphi$ tragen. Bezeichnen wir die in ε' liegenden drei homologen Geraden resp. mit $g'_x g'_v g'_\varphi$, dann umhüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte von $g'_x g'_v$ eine Parabel, ebenso umhüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte von $g'_x g'_\varphi$ eine Parabel. Beide Parabeln haben ausser der Geraden g'_x noch

* *Bulletin de la Société mathématique de France (1873)* T. I pag. 113, wo auch p. 114 *dieser Satz von Hrn.* *Halphen abgeleitet* wird, u. *Compt. Rend.* LXXVI, p. 551.

zwei gemeinschaftliche Tangenten und diese tragen dann je drei h Punkte; folglich enthält die in e_x liegende Gerade g'_x zwei Punkte, in ihren homologen Punkten in e_v, e_φ auf je einer Geraden sich b Dasselbe gilt von den beiden anderen Geraden g''_x, g'''_x, welche die ε'', ε''' beziehendlich mit e_x bilden, und von der unendlich fern raden, in der e_x von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird ken wir uns diese beiden unendlich fernen Punkte ausgeschlos giebt es in der Ebene e_x sechs Punkte, die mit ihren homologen ten in e_v und e_φ auf je einer Geraden liegen.

In jeder Ebene des veränderlichen Systems giebt es hiern Allgemeinen sechs Punkte, bei denen die Richtungen der Gesch keit und der Beschleunigung zusammenfallen und für welche die N beschleunigung Null ist. Diese Punkte durchlaufen also auf ihren curven momentan Wendepunkte dieser Curven. Da in dem Ge digkeitspol P^{xv} als selbstentsprechendem Punkte von S_x, S_v die hom Punkte P_x, P_v zusammenfallen, so liegen auch diese mit dem hom Punkte P_φ des Systems S_φ in einer Geraden; und dasselbe gilt v Beschleunigungspol als selbstentsprechender Punkt von S_x, S_φ. I folgt der Satz:

43. Der geometrische Ort der Punkte in einer Phase affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen ode ren Systems, welche keine Normalbeschleunigur sitzen und momentan Wendepunkte auf ihren B durchschreiten, ist eine Raumcurve sechster Ord die durch den Geschwindigkeits- und Beschleunig pol geht.

Wenn wir für die Punkte dieser Curve die Endpunkte der rigen Tangentialbeschleunigungen bestimmen, so bilden diese End in dem System S_φ eine jener Curve affine Raumcurve sechster Or die durch den Beschleunigungspol geht. Die vorhin ausgeschlo in der unendlich fernen Ebene liegenden Punkte erfüllen in dies Curve zweiter Ordnung. Mit Einschluss dieser Punkte ist dan geometrische Ort eine Raumcurve achter Ordnung, die in eine curve sechster Ordnung und in eine unendlich ferne Curve zweit nung zerfällt.

Die Tangentialbeschleunigung ist Null für die Punkte, der schwindigkeits- und Beschleunigungsrichtung einen rechten Win den, und der geometrische Ort dieser Punkte ergiebt sich durch f Darlegungen. Betrachten wir in den Systemen $S_x S_v S_\varphi$ die auf d sprechenden Geraden $g_x g_v g_\varphi$ liegenden homologen ähnlichen Punk und denken wir uns durch die auf g_x befindlichen Punkte Ebenen se zu den Geraden gestellt, welche diese Punkte mit den homologen F auf g_v verbinden, so umhüllen diese Ebenen eine parabolische C

fläche und bilden also ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welches auch zu der auf g_φ liegenden Punktreihe projectivisch ist. Da der unendlich fernen Ebene, welche die parabolische Cylinderfläche berührt, der unendlich ferne Punkt der Geraden g_φ entspricht, so giebt es, wenn wir diesen unbeachtet lassen, auf der Geraden g_φ nur noch zwei Punkte $A_\varphi B_\varphi$, welche in entsprechenden Ebenen des Büschels liegen. Bestimmen wir nun zu den auf g_φ liegenden Punkten $A_\varphi B_\varphi$ beziehendlich die homologen Punkte $A_x B_x$ und $A_v B_v$ auf g_x, g_v, so sind $A_\varphi A_x A_v$, $B_\varphi B_x B_v$ rechte Winkel, demnach steht für die Punkte A_x, B_x die Beschleunigungsrichtung $A_x A_\varphi$ und $B_x B_\varphi$ resp. senkrecht auf der Geschwindigkeitsrichtung $A_x A_v$ und $B_x B_v$; folglich giebt es auf einer Systemgeraden zwei Punkte (die auch imaginär sein können), deren Tangentialbeschleunigung Null ist. Für den Geschwindigkeitspol P^{xv}, in dem als selbstentsprechendem Punkt von S_x, S_v die Punkte P_x, P_v zusammenfallen und dem in S_φ der Punkt P_φ entspricht, ist $P_\varphi P_x P_v$ als ein rechter Winkel zu betrachten; das Analoge gilt für den Beschleunigungspol $\Pi^{x\varphi}$, in dem als selbstentsprechender Punkt von S_x, S_φ die Punkte Π_x, Π_φ vereint liegen und dem in S_v der Punkt Π_v entspricht. Hiernach erhalten wir den Satz:

44. Der geometrische Ort der Punkte in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, welche keine Tangentialbeschleunigung besitzen, ist eine Fläche zweiter Ordnung, die durch den Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol geht.

Denken wir uns für die Punkte dieser Fläche die Endpunkte der zugehörigen Normalbeschleunigungen bestimmt, so erfüllen diese Endpunkte in dem System S_φ eine mit jener Fläche affine Fläche zweiter Ordnung. Diese für starre Systeme meist bekannten, hier für veränderliche Systeme abgeleiteten Sätze, welche in organischem Zusammenhange aus unseren fruchtbaren fundamentalen Beziehungen hervorgehen, gelten, wie schon Seite 117 betont wurde, für Beschleunigungen aller höheren Ordnungen.

(Schluss folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

III. Ueber einige unendliche Reihen.

Wenn die Werthe zweier Integrale von den Formen

$$1)\qquad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos nt\,dt,\qquad B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin nt\,dt$$

bekannt sind, so lassen sich die verallgemeinerten Fourier'schen Sätz

$$2)\qquad \tfrac{1}{2}A_0+\Sigma A_n\cos nx=f(x)+\Sigma f(2n\pi-x)+\Sigma f(2n\pi+x),$$

$$3)\qquad \Sigma B_n\sin nx=f(x)-\Sigma f(2n\pi-x)+\Sigma f(2n\pi+x),$$

$$0<x<2\pi,\quad n=1,2,3,\ldots$$

als Transformationen auffassen, durch welche zwei periodische Reihen andere, meistens nicht periodische Reihen umgesetzt werden. Für Gleichung 2) bietet die Annahme $f(t)=e^{-at^2}$ ein bekanntes Beispiel; die Gleichung 3) mag hier ein neues folgen, welches zu mehreren merkenswerthen Resultaten führt.

Aus der schon mehrfach bewiesenen Integralformel**

$$\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\vartheta}{e^{2\pi\vartheta}-1}\,d\vartheta=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda-1}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

erhält man zunächst

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{2\pi\vartheta}-1}-\frac{1}{2\pi\vartheta}\right)\sin\lambda\vartheta\,d\vartheta=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda-1}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

und allgemeiner für $\lambda=2n\pi\varrho$, $\vartheta=\dfrac{t}{2\pi\varrho}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}}-1}-\frac{\varrho}{t}\right)\sin nt\,dt=2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\varrho}-1}-\frac{1}{2n\pi\varrho}\right);$$

man hat also

---

* Man sehe des Verf. Compendium der höheren Analysis, Bd. II S. 151.

** *Ebendas.* Bd. I, § 93, Formel 7.

$$f(t)=\frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}}-1}-\frac{\varrho}{t}, \quad B_n=2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\varrho}-1}-\frac{1}{2n\pi\varrho}\right).$$

Die Formel 3) giebt nun, wenn die Summirungen

$$\Sigma\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}, \quad \frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{2n\pi-x}+\Sigma\frac{1}{2n\pi+x}=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x$$

benutzt werden,

$$\text{4)}\quad \begin{aligned} &2\varrho\,\Sigma\frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho}-1}-\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\\ &=\frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}}-1}-\Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi-x}{\varrho}}-1}+\Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi+x}{\varrho}}-1}-\frac{\varrho}{2}\cot\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Die beiden rechter Hand vorkommenden Reihen lassen sich dadurch transformiren, dass man die Entwickelung

$$\frac{\xi}{1-\xi}=\xi+\xi^2+\xi^3+\ldots, \quad \xi^2<1$$

sowohl für $\xi=e^{-\frac{2n\pi-x}{\varrho}}$, als für $\xi=e^{-\frac{2n\pi+x}{\varrho}}$ in Anwendung bringt; es wird dann

$$\Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi-x}{\varrho}}-1}-\Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi+x}{\varrho}}-1}=\Sigma\frac{e^{\frac{nx}{\varrho}}-e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1}.$$

Beachtet man noch die identische Gleichung

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}}-1}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2\varrho}}+e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}}-e^{-\frac{x}{2\varrho}}}-\tfrac{1}{2},$$

so hat man

$$\text{5)}\quad \frac{x}{2\pi}+2\varrho\,\Sigma\frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho}-1}=-\frac{\varrho}{2}\cot\frac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{e^{\frac{x}{2\varrho}}+e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}}-e^{-\frac{x}{2\varrho}}}-\Sigma\frac{e^{\frac{nx}{\varrho}}-e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1}$$

oder auch, wenn man von den Bezeichnungen

$$\frac{e^u+e^{-u}}{2}=cshp\,u, \quad \frac{e^u-e^{-u}}{2}=snhp\,u$$

Gebrauch macht, mit $\sqrt{\varrho}$ dividirt und etwas anders ordnet,

$$\text{6)}\quad \begin{aligned} &\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}}+\frac{\sqrt{\varrho}}{2}\cot\frac{x}{2}+2\sqrt{\varrho}\,\Sigma\frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho}-1}\\ &=-\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}}+\frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\,cthp\frac{x}{2\varrho}-\frac{2}{\sqrt{\varrho}}\,\Sigma\frac{snhp\frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1}.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit $\Phi(x,\varrho)$, so liegt in der vorstehenden Gleichung der Satz

$$\Phi(iz,\varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho},\frac{1}{\varrho}\right).$$

Durch Differentiationen oder Integrationen in Beziehung auf x oder ϱ lassen sich aus Nr. 6) weitere Resultate ähnlicher Art ableiten, von denen einige Platz finden mögen. Wird die Gleichung 6) nach x differenzirt und dann mit $\pi\sqrt{\varrho}$ multiplicirt, so entsteht

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} + 2\pi\varrho\sum\frac{n\cos nx}{e^{2n\pi\varrho}-1}$$

7)
$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho\, snhp^2\frac{x}{2\varrho}} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum\frac{n\, cshp\frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1},$$

d. i. wenn die linke Seite mit $\Psi(x,\varrho)$ bezeichnet wird,

$$\Psi(iz,\varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho},\frac{1}{\varrho}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist der Fall $x=0$, für welchen periodische, nach Cosinus fortschreitende Reihen giltig bleiben. Die Differenz

$$\frac{\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4p\, snhp^2\frac{x}{2\varrho}}$$

geht dann in $\frac{1}{12}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ über und es wird aus Nr. 7)

8) $$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum\frac{n}{e^{2n\pi\varrho}-1} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\,\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum\frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1},$$

wonach der Function

$$\Psi(\varrho) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + \sum\frac{2n\pi\varrho}{e^{2n\pi\varrho}-1}$$

die Eigenschaft

$$\Psi(\varrho) + \Psi\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$$

zukommt.

Bezeichnet man ferner mit s_n die Summe der Divisoren von n, so kann man der Gleichung 8) auch folgende Form ertheilen:

9) $$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum s_n e^{-2n\pi\varrho} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\,\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}$$

und daraus ergiebt sich z. B. für $\varrho=1$

$$\sum\frac{n}{e^{2n\pi}-1} = \sum s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}\right) = 0,00187793.$$

Bei kleinen ϱ convergiren die in Nr. 8) und 9) linker Hand vorkommenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten Reihen

Punkte die selbstentsprechenden Elemente der Systemphase und der $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Phase sind.

30. Die Gesammtheit aller Geraden in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren Punkte in einer Ebene liegende $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen besitzen, bilden einen triedralen Strahlencomplex; und die in einer Ebene liegenden $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen umhüllen eine Parabel.

31. Die $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen der Punkte einer Geraden des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid.

32. Die $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen der Punkte jeder durch den $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Pol gehenden Geraden sind parallel.

Die durch einen Punkt in einem affinen System gehenden Geraden, denen schneidende Geraden im andern affinen System entsprechen, liegen auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung und die Schnittpunkte erfüllen eine Raumcurve dritter Ordnung. Daraus folgt der Satz:

33. Der geometrische Ort der Systempunkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen durch einen Punkt gehen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung, welche diesen Punkt und den $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Pol enthält, und diese Richtungen erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Zwei entsprechende Ebenenbüschel in zwei affinen Systemen erzeugen ein durch die selbstentsprechenden Punkte gehendes Hyperboloid. Demnach folgt:

34. Der geometrische Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Geschwindigkeits-}\\ \text{Beschleunigungs-}\end{matrix}\right\}$ Richtungen eine Gerade schneiden, ist ein durch diese Gerade und den

und $\varphi(1-\mu)$ eine ähnliche Relation bestehen würde. Auf dem früheren Wege liess sich letztere nicht entdecken, dagegen ergiebt sie sich sehr leicht, wenn man das Integral

$$3)\qquad U=\int_0^\infty \left\{\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^x-e^{-x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx, \quad \mu>0,$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickelt.

Ersetzt man zunächst x durch $2x$, so hat man

$$2^{1-\mu}\,U=\int_0^\infty \left\{\frac{1}{2x}-\frac{2}{e^{2x}-e^{-2x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx,$$

mithin durch Subtraction

$$(2^{1-\mu}-1)\,U=\int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^x-e^{-x}}-\frac{2}{e^{2x}-e^{-2x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx.$$

Es ist nun weiter

$$\frac{1}{e^x-e^{-x}}-\frac{2}{e^{2x}-e^{-2x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$=e^{-x}-e^{-2x}+e^{-3x}-\ldots-(e^{-2x}-e^{-4x}+e^{-6x}-\ldots),$$

mithin durch Substitution in die vorige Gleichung und nach Ausführung der Integrationen

$$(2^{1-\mu}-1)\,U=\Gamma(\mu)\left(\frac{1}{1^\mu}-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\ldots\right)-\Gamma(\mu)\left(\frac{1}{2^\mu}-\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{6^\mu}-\ldots\right)$$

oder zufolge der Bedeutung von $\varphi(\mu)$

$$4)\qquad U=\frac{1}{2^{1-\mu}-1}\left(1-\frac{1}{2^\mu}\right)\Gamma(\mu)\,\varphi(\mu).$$

Eine andere, nicht für alle positiven μ geltende Entwickelung von U entsteht dadurch, dass man in Nr. 3) von der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^x-e^{-x}}=\frac{x}{\pi^2+x^2}-\frac{x}{(2\pi)^2+x^2}+\frac{x}{(3\pi)^2+x^2}-\ldots$$

Gebrauch macht und die einzelnen Integralwerthe nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}\cdot\frac{1}{a^{1-\mu}}, \quad -1<\mu<+1$$

bestimmt; dies giebt

$$U=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}\left\{\frac{1}{\pi^{1-\mu}}-\frac{1}{(2\pi)^{1-\mu}}+\frac{1}{(3\pi)^{1-\mu}}-\ldots\right\}=\frac{\pi^\mu}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}\,\varphi(1-\mu).$$

Die Vergleichung dieses und des unter Nr. 4) verzeichneten Werthes von U führt nun zu der Relation

$$5)\qquad \frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)}=\frac{2^\mu-1}{2^{1-\mu}-1}\cdot\frac{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu}, \quad 0<\mu<1.$$

Symmetrischer gestaltet sich dieselbe, wenn man die Function $f(\mu)$ durch folgende Gleichung definirt

6) $$F(\mu)=(2^\mu-1)\left(\frac{1}{1^\mu}-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\ldots\right)\sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu\sin\frac{1}{2}\mu\pi}};$$

es ist dann

7) $$F(1-\mu)=F(\mu).$$

Mittelst eines ganz analogen Verfahrens gelangt man auch rasch zu der anfangs erwähnten Relation zwischen $\psi(\mu)$ und $\psi(1-\mu)$. Wird nämlich in dem Integral

$$V=\int_0^\infty\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,x^{\mu-1}\,dx$$

die Entwickelung

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=e^{-x}-e^{-3x}+e^{-5x}-\ldots$$

benutzt, so ergiebt sich für jedes $\mu>0$

$$V=\Gamma(\mu)\,\psi(\mu);$$

durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2+x^2}-\frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2+x^2}+\frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2+x^2}-\ldots\right\}$$

wird dagegen unter der Voraussetzung $0<\mu<1$

$$V=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\mu\frac{\psi(1-\mu)}{\sin\frac{1}{2}\mu\pi},$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von V

8) $$\frac{\psi(1-\mu)}{\psi(\mu)}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu\Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi,\quad 0<\mu<1.$$

Um auch hier eine symmetrische Form herbeizuführen, möge die Function $f(\mu)$ durch die Gleichung

$$f(\mu)=\left(\frac{1}{1^\mu}-\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{5^\mu}-\ldots\right)\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu\Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi}$$

definirt werden; die Relation

10) $$f(1-\mu)=f(\mu)$$

gilt dann für die Function f wie früher für F.

Aus den Gleichungen 5) und 8) kann man durch Differentiation nach μ weitere Relationen ableiten, die jedoch von wenig Bedeutung sein dürften.

(Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellsch. d. Wissensch.)

SCHLÖMILCH.

gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Ellipsoi dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

39. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Pha eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlich oder starren räumlichen Systems, welche gleiche B schleunigung besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mitte punkt der Beschleunigungspol ist.*

Da ähnliche räumliche Systeme eine reelle selbstentsprechende Eben und eine auf dieser senkrecht stehende selbstentsprechende Gerade be sitzen, und congruente räumliche Systeme nur eine selbstentsprechend Gerade haben, welche zwei congruente Punktreihen trägt, so folgt au dem Satze 38 der specielle:

40. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phas eines ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Ro tationsellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindig keitspol, dessen Axe die selbstentsprechende Gerad ist, welche die Systemphase mit ihrer unendlich nahe Phase gemeinsam hat und welches bei einem starre räumlichen System in einen Rotationscylinder übe geht.

Wir wollen das Ellipsoid, dessen Punkte gleiche Geschwindigke besitzen, das Geschwindigkeitsellipsoid und das Ellipsoid, welch die Punkte gleicher Beschleunigung trägt, das Beschleunigungs ellipsoid nennen; jenes geht für die Geschwindigkeit Null in den Ge schwindigkeitspol über und dieses zieht sich für die Beschleunigung Nu in den Beschleunigungspol zusammen.

Sind drei Ebenen $E_h E_i E_k$ gegeben, welche sich in einem Punkte schneiden, und denken wir uns die Geraden $g_a g_b g_c \ldots$ im Raume liegen welche diese Ebenen resp. in den Punkten $A_h A_i A_k$, $B_h B_i B_k$, $C_h C_i C$ derart treffen, dass

$$\frac{A_h A_i}{A_i A_k} = \frac{B_h B_i}{B_i B_k} = \frac{C_h C_i}{C_i C_k} = \ldots = const.$$

ist, nehmen wir ferner auf diesen Geraden die ähnlichen Punktreihe $A_1 A_2 A_h A_i A_k$, $B_1 B_2 B_h B_i B_k$, $C_1 C_2 C_h C_i C_k$, ... an, so können wir d Geraden $g_a g_b g_c \ldots$ als die Verbindungsgeraden der homologen Punk $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, ... zweier räumlicher affiner Systeme S_1, S_2 ansehe für welche P der selbstentsprechende Punkt und $E_h E_i E_k$ die drei selbs entsprechenden Ebenen sind. Ist insbesondere

* Dieser Satz wurde für das starre System laut einer brieflichen Mittheilun zuerst von Herrn Schell in seinem Vortrage zu Carlsruhe im Jahre 1871 analytis abgeleitet, ferner von Herrn Jordan und dann auch von Herrn Liguine *(Bullet de la Société mathématique de France 1873, T. I pag. 146 et 152)* mitgetheilt.

$$A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2 = \dots = const.,$$

dann sind die genannten Punktreihen congruent und der geometrische Ort der Punkte $A_1 B_1 C_1 \dots$, welche von ihren homologen Punkten gleichen Abstand haben, ist nach dem Satze 38 ein Ellipsoid. Hieraus folgt der Satz:

41. Bewegen sich drei Punkte einer starren geraden Punktreihe auf drei Ebenen, so beschreibt jeder andere Punkt dieser Reihe ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der drei Ebenen ist.

Stellen wir noch die Bedingung, dass ein vierter Punkt dieser starren Punktreihe sich auf einer vierten Ebene bewegt, dann schneidet diese das betreffende Ellipsoid in einer Ellipse $\mathfrak{e}_1$, der im andern affinen System eine Ellipse $\mathfrak{e}_2$ entspricht, und wir erhalten den von Herrn Mannheim* gegebenen Satz:

42. Wenn vier Punkte einer starren geraden Punktreihe sich auf vier Ebenen bewegen, so beschreibt jeder Punkt dieser Reihe eine Ellipse.

Schneiden sich diese vier Ebenen in einem Punkte, dann ist dieser der gemeinschaftliche Mittelpunkt für alle von den Punkten der Reihe beschriebenen Ellipsen.

Fällen wir von den Punkten der Beschleunigungsphase S_φ Senkrechte auf die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der Geschwindigkeits- und der Systemphase S_v, S_x, dann bilden die erhaltenen Fusspunkte die Endpunkte der Tangentialbeschleunigungen der Systempunkte in der Phase S_x. Ziehen wir durch die Punkte in S_x zu diesen Senkrechten Parallelen und fällen von den homologen Punkten in S_φ auf diese Parallelen Senkrechte, dann bilden die entstandenen Fusspunkte die Endpunkte der Normalbeschleunigungen, und diese Normalbeschleunigung wird gleich Null, wenn die Beschleunigungsrichtung mit der Geschwindigkeitsrichtung zusammenfällt. Nehmen wir in den affinen räumlichen Systemen $S_x S_v S_\varphi$ die entsprechenden affinen ebenen Systeme $e_x e_v e_\varphi$ an, so sind die Ebenen, welche homologe Gerade von e_x und e_v verbinden, Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Classe. Ebenso erzeugen die Ebenen, welche homologe Gerade von e_x und e_φ enthalten, als Schmiegungsebenen auch eine Curve dritter Classe. Diese beiden Curven haben ausser der Ebene e_x und der unendlich fernen Ebene noch drei gemeinschaftliche Schmiegungsebenen $\varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon'''$, die je drei homologe Gerade der affinen ebenen Systeme $e_x e_v e_\varphi$ tragen. Bezeichnen wir die in ε' liegenden drei homologen Geraden resp. mit $g'_x g'_v g'_\varphi$, dann umhüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte von $g'_x g'_v$ eine Parabel, ebenso umhüllen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte von $g'_x g'_\varphi$ eine Parabel. Beide Parabeln haben ausser der Geraden g'_x noch

* *Bulletin de la Société mathématique de France* (1873) T. I pag. 113, wo auch p. 114 *dieser Satz von Hrn.* Halphen abgeleitet wird, u. *Compt. Rend.* LXXVI, p. 551.

Winkel D in die Theile y und v, so dass x und y im Dreieck ABD liegen. Nennt man O und J die Mittelpunkte der Kreise, setzt $x-y=\delta$, $u-v=\delta_1$, so erhält man aus den Dreiecken AOJ und COJ

$$1)\quad \cos\frac{\delta}{2}=\frac{(r^2-d^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}+\varrho^2}{2r\varrho.\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\delta_1}{2}=\frac{(r^2-d^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}+\varrho^2}{2r\varrho.\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Da $AB+CD=AD+BC$ ist, so hat man

$$\sin x-\sin y=\sin u-\sin v$$

oder

$$2)\quad \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta_1}{2}}=ctg\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Elimination von δ und δ_1 aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man

$$\frac{4r^2\varrho^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-\left[(r^2-d^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}+\varrho^2\right]^2}{4r^2\varrho^2\cos^2\alpha^2-\left[(r^2-d^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}+\varrho^2\right]^2}=1$$

und endlich

$$2\varrho^2(r^2+d^2)=(r^2-d^2)^2.$$

Weissenburg i. E. MIDINOWSKI.

VII.

Ueber die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkte der Ausdehnungslehre.

Von

V. Schlegel.

Hierzu Taf. IV, Fig. 1—11.

Der Begriff des Imaginären wurde bisher nur in der Weise geometrisch interpretirt, dass man dasselbe als eine Eigenschaft gewisser Punkte und Geraden ansah, die, ohne eine reelle Existenz zu besitzen, dem Auge nur sinnbildlich dargestellt werden konnten. Es macht hierbei keinen Unterschied, ob man z. B. einen imaginären Punkt durch einen geometrisch reellen darstellt (wie Möbius), oder durch eine Gerade, d. h. durch eine besondere auf der Geraden bestehende Involution (wie Staudt). Für die Veranschaulichung des Imaginären leisten beide Darstellungen gleich wenig. Die erste lässt uns im Stich, sobald imaginäre Punkte nicht an und für sich betrachtet werden, sondern als Lösung eines geometrischen Problems erscheinen. Die zweite nimmt zwar von einem solchen Problem ihren Ausgang, bringt es aber nicht über abstracte Begriffe hinaus und macht das Problem selbst zum Bilde der Lösung. Denn wie soll man es anders bezeichnen, wenn die imaginären Doppelpunkte einer Involution durch die Involution selber dargestellt werden? — In beiden Fällen ist der Zusammenhang zwischen der geometrischen Darstellung reeller und derjenigen imaginärer Gebilde ein sehr ungenügender und namentlich nicht so organisch, wie derjenige zwischen reellen und imaginären Zahlen. Eine Darstellung aber, welche diesem Zusammenhange nicht in vollem Maasse gerecht wird, kann nicht als die naturgemässe, endgiltige angesehen werden.

In der That führen sich alle bisherigen Darstellungen der imaginären Zahlen mit Definitionen ein, die der Geometrie der reellen Zahlen fremd sind, und verrathen hierdurch sogleich, dass man sich auf ein fremdes, in sich abgeschlossenes Gebiet begiebt, welches bei aller Ein-

heit und Uebereinstimmung im Innern doch nicht die Ueberzeugun erwecken kann, dass es das einzige und nothwendige ist, auf welche die Schwierigkeiten des Imaginären völlig gelöst werden.

Ich bin durch meine Beschäftigung mit der Ausdehnungslehre z einer andern Auffassung des Imaginären gelangt, die, wie mir scheint die oben gestellte Forderung eines organischen Zusammenhangs zwische der Geometrie des Reellen und der des Imaginären mehr zu erfüllen ge eignet ist, wie die bisherige. Ich betrachte nämlich das Imaginäre nich als eine an gewissen unconstruirbaren* Punkten und Linien haftend Eigenschaft, sondern als eine Eigenschaft der gegenseitigen Lage zwei construirbarer Gebilde, spreche also nicht von imaginären Punkten un imaginären Geraden (die sich nicht zur Anschauung bringen lassen), son dern von der imaginären Lage eines Punktepaares** auf einer Gerade von dem imaginären Hindurchgehen einer Geraden durch ein Punktepa u. s. w. Als Beispiel sei noch erwähnt, dass eine Gerade und ein Krei sich in den Centralpunkten des durch beide bestimmten Systems vo Orthogonalkreisen imaginär schneiden (vergl. Raumlehre II, S. 111 Diese imaginären Beziehungen erscheinen dem Auge in der geometrische Darstellung allerdings als gleichbedeutend mit nicht stattfindenden reelle Beziehungen. Aber das Nichtstattfinden einer reellen Beziehung i keineswegs immer gleichbedeutend mit dem Vorhandensein einer imag nären Beziehung. (Vergl. den Schluss dieses Aufsatzes.)

Indem ich es im Folgenden unternehme, diese Auffassung des Im ginären zu begründen und durchzuführen, bemerke ich gleich im Vorau dass die hiermit zusammenhängende Darstellung des Imaginären sich n begrifflich von der Möbius'schen unterscheidet, während dieselbe Punktepaare, welche dort als Bilder conjugirter Complexzahlen ersche nen, hier Punkte sind mit imaginärer Lage in Bezug auf eine Gerad Ferner dass die Staudt'schen Sätze und Definitionen über die gege seitige Lage reeller und imaginärer Gebilde mit den hier durch einfac Anschauung sich ergebenden übereinstimmen.

Anmerkung. Man bemerkt, dass das Imaginäre bei dieser Au fassung nicht ein absoluter, sondern ein relativer Begriff ist, da z.

---

* Welche Bewandtniss es mit der wirklichen Construction der imaginär Schnittpunkte zweier Kreise hat, die Hankel in seiner „Theorie der complex Zahlensysteme" S. 86 oben erwähnt, kann ich nicht ersehen, da der zweite Th seines Werkes, welcher hierüber Auskunft geben sollte, nicht erschien und m Weiteres über eine derartige Construction nicht bekannt ist.

** Wenn es sonst Staudt zum Verdienst angerechnet wird, dass es ihm g lungen sei, die complex-conjugirten Elemente durchaus zu trennen (vergl. z. Math. Annalen Bd. IV, S. 417), so sehe ich von meinem Standpunkte aus in die Trennung nur ein Trennen des als zusammengehörig Gegebenen, also ein Verla *sen des natürlichen* Weges.

nicht ein Punktepaar an und für sich reell oder imaginär, sondern nur seine Lage zu einer Geraden reell oder imaginär ist. Der Begriff des Imaginären wird hierdurch nur einer ähnlichen geometrischen Auffassung unterworfen, wie sie für das Negative, das Gebrochene und das Irrationale schon besteht. Denn auch eine Strecke ist nicht an und für sich eine negative, gebrochene oder irrationale Grösse, sondern erlangt diese Eigenschaft erst durch Beziehung auf eine andere Richtung oder Strecke.

I. Das Imaginäre in der Ebene.

A. Das Imaginäre in Bezug auf die Gerade.

a) Punktepaare.

1. Die imaginäre Einheit als Drehungsfactor der Strecke. — Eine Strecke $OA = a$ bleibt arithmetisch ungeändert, wenn man sie mit dem Factor $(+1)$ multiplicirt, geometrisch, wenn man sie um vier Rechte um den Anfangspunkt O dreht. Man kann daher die Zahl $+1$ [oder $(+1)^n$, wo n zunächst eine ganze positive Zahl ist] als den Factor ansehen, dessen Hinzutreten zu einer Strecke die Drehung derselben um vier Rechte (resp. $4n$ Rechte) anzeigt. — Eine Strecke erhält arithmetisch entgegengesetztes Vorzeichen, wenn man sie mit dem Factor (-1) multiplicirt, geometrisch entgegengesetzte Richtung, wenn man sie um zwei Rechte dreht. Da nun $(-1)^2 = +1$ und eine zweimalige Drehung um zwei Rechte einer einmaligen um vier Rechte gleichkommt, so ist (-1) der Factor, dessen Hinzutreten zu einer Strecke die Drehung derselben um zwei Rechte anzeigt. — Ist x der Factor, welcher zu der Strecke a treten muss, wenn ihre Drehung einen Rechten betragen soll, so ist $x^2 = -1$, also $x = i$, d. h.: die imaginäre Einheit ist der Factor, dessen Hinzutreten zu einer Strecke Drehung der Strecke um einen Rechten bedeutet. Und allgemein bedeutet die Hinzufügung des Factors i^n eine Drehung der Strecke um n Rechte. (Raumlehre I, S. 36 flgg.) — Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man den oben gegebenen Ausdruck $(+1)^n$, welcher Drehung um $4n$ Rechte bedeutete, auch für gebrochene Werthe von n, namentlich für $n = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{1}{4}$ gelten lässt. Ebenso findet man, dass einem negativen Werthe von n eine Drehung in entgegengesetztem Sinne entspricht.

2. Uebergang von der Strecke zum Punkte. — Nach dem oben Gesagten ist in Fig. 1

$$(e_2 - e_1)i = (B - e_1), \quad (e_2 - e_1)(-i) = (B_1 - e_1),$$

folglich

$$B = e_1 + (e_2 - e_1)i = (1 - i)e_1 + ie_2, \quad B_1 = e_1 - (e_2 - e_1)i = (1 + i)e_1 - ie_2.$$

Allgemeiner sei

$$R=(p+qi)e_2+(1-p-qi)e_1$$

ein aus zwei gegebenen Punkten (e_1 und e_2) mittelst complexer Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleiteter Punkt. Dann erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären

$$R=[pe_2+(1-p)e_1]+qi(e_2-e_1).$$

(Fig. 2.) Bezeichnet man den Punkt $pe_2+(1-p)e_1$ durch P, so dass seine Lage durch die Gleichung

$$(P-e_1)=p(e_2-e_1)$$

bestimmt ist, so ist, wenn wir die Strecke $(e_2-e_1)=1$ setzen,

$$p=(P-e_1).$$

Bestimmen wir ferner einen Punkt Q durch die Gleichung

$$(Q-e_1)=q(e_2-e_1),$$

so ist

$$(Q-e_1)i=qi(e_2-e_1)$$

und folglich

$$R=P+(Q-e_1)i$$

oder

$$(R-P)=(Q-e_1)i.$$

Tragen wir also auf der in e_1 zu e_1e_2 errichteten Senkrechten die Strecke q ab bis Q_1 und ziehen durch P und Q_1 Parallelen zu e_1Q, resp. e_1P, so schneiden sich dieselben in R. — Hiermit ist die Construction eines mittelst complexer Zahlen aus zwei Fundamentalpunkten abgeleiteten Punktes dargethan. — Setzen wir überall $-i$ statt $+i$, so erhalten wir den zu R conjugirten Punkt R_1, und da

$$R_1=P-(Q-e_1)i,$$

also

$$R+R_1=2P$$

ist, so ist auch die Lage von R_1 bestimmt, indem P die Mitte zwischen R und R_1 ist. (Raumlehre I, Nr. 20).

Der bereits bekannten Definition:

„Ein Punkt, der aus zwei Punkten e_1 und e_2 vermittelst reeller Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleitet ist, liegt reell auf der durch e_1 und e_2 bestimmten Geraden" (vergl. Raumlehre I, Nr. 26)

lässt sich nun die folgende gegenüberstellen:

„Ein Punkt (R), der aus zwei Punkten e_1 und e_2 vermittelst complexer Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleitet ist, liegt imaginär auf der durch e_1 und e_2 bestimmten Geraden. Den conjugirten Punkt (R_1) findet man, wenn man $+i$ durch $-i$ ersetzt."

Anm. Ersetzt man in der ganzen Darstellung dieser Nummer den Punkt e_2 durch die Zahl 1, und e_1 durch Null, so erhält man die Darstellung complexer Zahlen, wie sie von Möbius, Gauss, Siebeck

gegeben ist. Es knüpft sich hieran die in einem folgenden Aufsatze auszuführende Bemerkung, dass, da durch diese Substitutionen die Siebeck'sche Darstellung aus derjenigen hervorgeht, die auf den Anschauungen der Ausdehnungslehre beruht, beide Anschauungen auch im Punkte des Imaginären wesentlich übereinstimmen.

Folgerungen. Ein Punktepaar liegt imaginär auf derjenigen Geraden, welche auf der Verbindungsstrecke beider Punkte in ihrer Mitte senkrecht steht. Ein Punktepaar bestimmt nicht nur diejenige Gerade, auf welcher es reell, sondern auch diejenige, auf welcher es imaginär liegt. Auf einer gegebenen Geraden liegen imaginär alle Punktepaare der Ebene, deren Verbindungsstrecke auf der Geraden senkrecht steht und durch dieselbe halbirt wird. Einer der Punkte bestimmt nebst der Geraden den andern Punkt.

Betrachtet man alle Punkte einer Geraden als reell (als Bilder reeller Zahlen), so können alle Punktpaare der Ebene, welche die eben erwähnte Eigenschaft besitzen, in Bezug auf die gegebene Gerade imaginäre Punktpaare genannt werden, indem dadurch nicht die reelle Existenz dieser Punktpaare bestritten, sondern nur eine Eigenschaft derselben in Bezug auf die Gerade ausgedrückt wird.

3. Anwendung auf Doppelpunkte der Involution. — Setzen wir in den in voriger Nummer gefundenen Formeln

$$B = e_1 + (e_2 - e_1)i, \quad B_1 = e_1 - (e_2 - e_1)i$$

die Strecke

$$(e_2 - e_1) = \varepsilon,$$

so ist

$$B = e_1 + i\varepsilon, \quad (B - e_1) = i\varepsilon,$$
$$B_1 = e_1 - i\varepsilon, \quad (B_1 - e_1) = -i\varepsilon.$$

Durch algebraische Multiplication der rechts stehenden Ausdrücke erhält man weiter (vergl. Fig. 1)

$$(B - e_1).(B_1 - e_1) = \varepsilon^2 = \frac{(e_3 - e_2)^2}{4}.$$

Man kann nun erstens e_1 als Centrum einer Involution betrachten, deren Doppelpunkte e_3 und e_2 sind. Dann erhält man der Reihe nach die aus Betrachtung der Figur sich ergebenden Formeln

$$(e_1 - e_3) = -(e_1 - e_2), \quad (e_3 - e_1) = (e_1 - e_2) = \tfrac{1}{2}(e_3 - e_2),$$
$$(e_3 - e_1).(e_1 - e_2) = \frac{(e_3 - e_2)^2}{4}, \quad -(e_3 - e_1).(e_2 - e_1) = \frac{(e_3 - e_2)^2}{4},$$
$$(e_3 - e_1)i.(e_2 - e_1)i = \frac{(e_3 - e_2)^2}{4}, \quad (B_1 - e_1).(B - e_1) = \frac{(e_3 - e_2)^2}{4}.$$

Dies ist genau die oben gefundene Formel, nur anders abgeleitet; und mit Rücksicht auf die angenommene Bedeutung der Punkte e_1, e_2, e_3 folgt, dass B, B_1 ein imaginär liegendes zugeordnetes Punktepaar der auf der Geraden bestehenden Involution ist. In diesem Falle ist also

$$B + B_1 = 2e_1 \text{ oder } (B - e_1) = -(B_1 - e_1).$$

Man kann nun aber auch zweitens annehmen, dass

$$(B - e_1) = +(B_1 - e_1),$$

also

$$B = B_1 = \mathfrak{B}$$

sei. Dann sind die Punkte B und B_1 als imaginäre Doppelpunkte einer auf der Geraden bestehenden Involution charakterisirt.

Anm. Es wird hiernach durch ein zu einer Geraden imaginäres Punktepaar ebenso eine einzige Involution auf der Geraden bestimmt, als ob das Punktepaar reell auf ihr läge. Es ist aber nicht nöthig, diese Involution zum Bilde des Punktepaares zu machen, wenn man nur nicht an der Forderung festhält, dass das Paar auf der Geraden selbst zur Darstellung gebracht werde. Für $\varepsilon = 0$ gehen B und B_1 in den reellen (neutralen) Punkt e_1 über.

Ist M der Mittelpunkt, und sind B und D die Doppelpunkte einer Involution, und AC, A_1C_1, A_2C_2, ... beliebige Paare zugeordneter Punkte, so ist für reelle Doppelpunkte (Fig. 3) (vergl. Raumlehre II, S. 66)

$$\frac{2(M-A)}{(B-D)} = \frac{(B-D)}{2(M-C)} \quad \text{oder} \quad (M-A)(M-C) = +\frac{(B-D)^2}{4}.$$

Wird $(M-A)$ grösser, so wird $(M-C)$ kleiner, folglich ist die Bewegung (der Sinn der Reihe) AA_1A_2 ... entgegengesetzt der Bewegung CC_1C_2 ... Zwei zugeordnete Punkte liegen in diesem Falle immer auf derselben Seite von M (in gleichem Sinne zu M).

Für imaginäre Doppelpunkte ist dagegen (Fig. 4)

$$\frac{2(M-A)}{(B-D)} = \frac{(D-B)}{2(M-C)}$$

oder

$$(M-A)(M-C) = -\frac{(B-D)^2}{4}.$$

Die numerischen Werthe der Strecken sind dieselben wie vorher; doch haben jetzt $(M-A)$ und $(M-C)$ entgegengesetzte Richtung. Die Bewegung AA_1A_2 ... ist diesmal gleich gerichtet mit CC_1C_2 ..., und zwei zugeordnete Punkte liegen immer auf entgegengesetzter Seite von M.

Noch anschaulicher wird der Gegensatz zwischen reell und imaginär liegenden Doppelpunkten der Involution dargestellt, wenn man die involutorischen Punktepaare zuerst auf der Peripherie eines Kreises darstellt und sie dann durch einfache Drehung auf eine Gerade überträgt.

Ist M ein Punkt der Ebene, von dem zwei beliebige Geraden ausgehen, die einen Kreis in den Punktepaaren EF, GH schneiden, so ist stets numerisch

$$(M-E).(M-F) = (M-G).(M-H).$$

Diese Formel würde, wenn alle Punkte auf derselben Geraden lägen, sagen, dass EF, GH Paare einer Involution mit dem Centrum M wären.

(Raumlehre II, S. 66.) Man kann nun den Begriff der Involution erweitern, indem man sagt, dass alle Punktepaare einer Kreislinie, deren Verbindungslinien durch denselben Punkt gehen, eine involutorische Reihe bilden. Diese Reihe geht in eine gewöhnliche über, wenn man sich die Punkte jedes Paares, nach entgegengesetzter Richtung gedreht, auf der Geraden (Axe) niedergelegt denkt, die in M auf dem durch M gehenden Durchmesser senkrecht steht. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. M liegt ausserhalb des Kreises (Fig. 5). — Der Sinn der Reihe $EAG\ldots$ ist entgegengesetzt dem Sinne der Reihe $FCH\ldots$, die Involution also reell. Ihre Doppelpunkte sind die Berührungspunkte der von M an den Kreis gezogenen Tangenten. Auf die Axe übertragen, liegen je zwei conjugirte Punkte auf entgegengesetzter Seite von M. Daher ist (Fig. 5) zwar $(M-B)=(M-D)$, aber $(M-D_1)=-(M-B_1)=\frac{1}{2}(B_1-D_1)$. Also

$$(M-E).(M-F)=-(M-B_1).(M-D_1)=(M-D_1)^2=+\frac{(B_1-D_1)^2}{4}.$$

In Bezug auf die Axe sind also in diesem Falle die übertragenen Doppelpunkte der Involution, B_1 und D_1 reell, dagegen die Schnittpunkte der Axe mit dem Kreise, nämlich P und Q, imaginär. (Vergl. Raumlehre II, S. 111.)

2. M liegt innerhalb des Kreises (Fig. 6). — Der Sinn der Reihe $EAG\ldots$ ist gleich dem Sinn der Reihe $FCH\ldots$, die Involution also imaginär. Ihre Doppelpunkte sind imaginär (haben imaginäre Lage zu BD), da von M aus keine reellen Tangenten an den Kreis gezogen werden können. Auf die Axe übertragen, liegen je zwei conjugirte Punkte auf derselben Seite von M. Ferner ist

$$M=\frac{B+D}{2},\quad (B-M)=(M-D)=\tfrac{1}{2}(B-D),$$
$$(M-D)(M-B)=-\tfrac{1}{4}(B-D)^2,$$

also, wenn wir die imaginär liegenden übertragenen Doppelpunkte mit P_1 und Q_1 bezeichnen,

$$\left(M-{P_1 \atop Q_1}\right)=\mp\tfrac{1}{2}(B-D)i,$$
$$P_1=M+i.\frac{(B-D)}{2},\quad Q_1=M-i.\frac{(B-D)}{2}.$$

Demnach haben die Punkte P_1 und Q_1 die in Fig. 6 angegebene Lage.

In Bezug auf die Axe sind also diesmal die übertragenen Doppelpunkte der Involution, P_1, Q_1, imaginär, dagegen die Schnittpunkte der Axe mit dem Kreise, nämlich B und D, reell.

Anm. Ebenso wenig, wie in Fig. 5 die übertragenen Doppelpunkte der Involution, B_1 und D_1, die reellen Berührungspunkte der aus M an den Kreis gezogenen Tangenten, sind auch in Fig. 6 die übertragenen Doppelpunkte der Involution, P_1 und Q_1, die imaginären Berührungs-

punkte der aus M an den Kreis gezogenen Tangenten. Die Cor
dieser Berührungspunkte wird später gezeigt werden. — Wie
die reellen Berührungspunkte B, D mit den imaginären Schnit
P, Q der in M zum Durchmesser Senkrechten auf derselben
liegen, so liegen auch in Fig. 6 die imaginären Berührungspu
den reellen Schnittpunkten B und D auf derselben Kreislinie (vgl.

4. Anwendung auf Schnittpunkte einer Curve un Geraden. — Schneiden sich zwei Curven imaginär in zwei
so kann man statt der einen Curve auch die Gerade einführen,
cher jene beiden Punkte imaginäre Lage haben. Es genügt
imaginär liegenden Schnittpunkte einer Curve mit einer Gerade
trachten.

Sei $\alpha x^n = 0$ die Gleichung einer C_n und $x = (1-\lambda)a + \lambda$
der Zahl λ variabler Punkt auf der durch die festen Punkte
bestimmten Geraden. Dann sind die Schnittpunkte der Gerade
C_n bestimmt durch die Gleichung

$$\alpha[(1-\lambda)\,a + \lambda b]^n = 0$$

oder

$$\alpha(1-\lambda)^n a^n + n_{\cdot 1}\,\alpha\,(1-\lambda)^{n-1} a^{n-1} \lambda b + n_{\cdot 2}\,\alpha\,(1-\lambda)^{n-2} a^{n-2} \lambda^2$$
$$\ldots + \alpha b^n \lambda^n = 0.$$

Diese Gleichung hat n Wurzeln in λ. Sei ein imaginäres Paar

$$\lambda_1 = \varrho + i\sigma, \quad \lambda_2 = \varrho - i\sigma.$$

Dann sind die entsprechenden Punkte

$$x_1 = (1-\varrho-i\sigma)a + (\varrho+i\sigma)b = (1-\varrho)a + \varrho b + i\sigma(b-a) = p +$$
$$x_2 = (1-\varrho+i\sigma)a + (\varrho-i\sigma)b = (1-\varrho)a + \varrho b - i\sigma(b-a) = p -$$

Folglich

$$x_1 + x_2 = 2p, \quad x_1 - x_2 = 2i\sigma(b-a), \quad \frac{x_1 - x_2}{2} = x_1 - p = i\sigma($$

Hieraus ergiebt sich die Construction dieser imaginären Schn
(Fig. 7).

Insbesondere sind die imaginär liegenden Schnittpunkte ein
und einer Geraden ($B_1 D_1$ Fig. 5) die Centralpunkte (P, Q) des d
Kreis und die Gerade bestimmten orthogonalen Systems (vgl. I
II, S. 111). Rückt M, also auch die Gerade, in unendliche E
so geht der um M beschriebene, den gegebenen orthogonal sc
Kreis in die auf AC in O senkrechte Gerade über. Die beiden
ren Schnittpunkte sind also O und der unendlich ferne Punkt

b) Linienpaare.

Wenn alle Punkte der Ebene, die nicht in der gegebene
(Axe) liegen (nicht dieselbe Lage mit ihr haben), als imaginä
selben zu betrachten sind, so kann auch jede Gerade, die mit
nicht dieselbe oder gleiche Richtung hat, als imaginär zu ders

trachtet werden. Betrachtet man die Axe nur als Repräsentanten einer bestimmten Richtung, so sind alle Parallelen zu ihr reell. Betrachtet man sie aber als Repräsentanten einer bestimmten Richtung und Lage, so sind die Parallelen imaginär. Betrachtet man die Parallele als den Ort imaginär liegender Punkte (was auch von jeder andern Geraden, die Axe ausgenommen, gilt), so gelangt man zur zweiten Auffassung; dagegen zur ersten, wenn man nur die Richtung der Parallele in Betracht zieht.

In Bezug auf die Art und Weise, wie die verschiedenen Fälle imaginärer Beziehung sprachlich ausgedrückt werden, mag hier gleich folgende Uebersicht eingefügt werden. Da der Begriff des Imaginären sich unserer Annahme gemäss nur auf die gegenseitige Lage zweier Gebilde beziehen soll, so hat man drei Fälle zu unterscheiden. Es kann nämlich von den beiden Gebilden das erste von niederer, gleicher oder höherer Stufe sein, als das zweite (in Bezug auf welches die reelle oder imaginäre Lage des ersten ausgesprochen wird). Im ersten Falle sagt man, dass das niedere reell oder imaginär in (auf) dem höheren liegt (z. B. Punkt auf der Geraden, in der Ebene, Gerade in der Ebene etc.) Im zweiten, dass die beiden Gebilde sich in einem der nächst niederen Stufe reell oder imaginär schneiden (ein Gebilde der nächst niederen Stufe reell oder imaginär gemeinsam haben), (z. B. zwei Geraden einen Punkt, zwei Ebenen eine Gerade); im dritten, dass das höhere reell oder imaginär durch das niedere hindurchgeht (Gerade oder Ebene durch Punkt, Ebene durch Gerade). Im ersten Falle ist also das höhere, im (reciproken) dritten Falle das niedere, im zweiten eins oder jedes der beiden Gebilde dasjenige, in Bezug auf welches dem andern die Eigenschaft der imaginären Lage beigelegt wird.

Anm. Zwei Geraden, die in derselben Ebene liegen, sind in Bezug auf diese Ebene beide als reell zu betrachten. Ist aber nicht ihre Lage zur Ebene massgebend, sondern die Lage der einen zur andern, so ist, wenn sie nicht beide zusammenfallen, resp. parallel sind, die eine als imaginär zur andern zu betrachten, in Bezug auf welche man die Eigenschaft des Imaginären ausspricht. Der letztere Fall ist der hier vorliegende. Diese imaginär zur Axe liegende Gerade ist übrigens dieselbe, welche Staudt imaginäre Gerade der ersten Art nennt.

Folgerungen aus der Definition der imaginär liegenden Geraden. 1. Eine imaginäre Gerade hat mit der reellen Geraden stets einen reellen Punkt gemeinsam. 2. Auf jeder nicht durch ihren reellen Punkt gehenden Geraden liegt ein ihr angehöriger complexer Punkt. (Vergl. Math. Ann. IV, S. 424 unten.)

Sind a und b Strecken auf der Axe, so ist (Fig. 8) $a+bi=x$ eine imaginär liegende Strecke, und zwar sind die beiden Geraden

$$x_1=a+bi, \quad x_2=a-bi$$

conjugirt. Also ist die reelle Axe zweier sich schneidenden imaginär liegenden Geraden von bestimmter Richtung die Halbirungslinie ihres Winkels (daher, wenn sie parallel sind, die von beiden gleichweit entfernte Parallele).

Folgerungen. 1. Zwei conjugirte Geraden gehen reell durch einen reellen Punkt. 2. Zwei imaginär liegende Geraden können sich in einem reell oder imaginär liegenden Punkte schneiden. Ihre Conjugirten gehen dann durch den conjugirten Punkt.

Eine reelle (mit der Axe parallele) Gerade schneidet zwei imaginäre Geraden stets in Punkten von gleichem Sinne (d. h. die auf derselben Seite der Axe liegen). Eine imaginäre Gerade ($3a$) schneidet zwei imaginäre Geraden in Punkten von verschiedenem Sinne (die auf verschiedenen Seiten der Axe liegen), wenn ihr reeller Punkt zwischen den reellen Punkten der beiden anderen liegt (Fig. 9); sonst ($3b$) in Punkten von gleichem Sinne.

Definirt man: „Drei Geraden 1, 2, 3 sind in gleichem Sinne beschrieben, wenn sie, durch Drehung aus einander erzeugt, ebenso auf einander folgen, wie ihre reellen Punkte, sonst in entgegengesetztem Sinne", so folgt: Die Gerade 3 ist in gleichem Sinne mit 1 und 2 beschrieben, wenn ihr reeller Punkt ausserhalb derjenigen der anderen liegt; in entgegengesetztem, wenn innerhalb.

Zwei imaginär liegende Punkte können eine reell oder imaginär liegende Verbindungslinie haben. Sei (Fig. 10)

$$x = a + bi, \quad x_1 = a_1 + b_1 i,$$

so ist

$$(x - x_1) = (a - a_1) + (b - b_1) i,$$

also im Allgemeinen imaginär liegend. Ist namentlich $a = a_1$, so steht die Verbindungslinie von x und x_1 auf der Axe senkrecht. Ist aber $b = b_1$, so ist $(x - x_1) = (a - a_1)$, also parallel der Axe, und da bei der hier angewandten Rechnung Strecken mit gleicher Länge und Richtung als gleich betrachtet werden, so ist $(x - x_1)$ als reell liegend anzusehen, was auch daraus folgt, dass i aus dem Werthe von $(x - x_1)$ verschwindet.

B. Das Imaginäre in Bezug auf den Punkt.

a) Linienpaare.

α) Schneidende Geraden.

Da im Gebiete der Ebene die Gerade und der Punkt reciproke Gebilde sind, so können wir das folgende unmittelbar einleuchtende Reciprocitätsgesetz benutzen, um die imaginäre Lage eines Linienpaares zu einem Punkte näher zu bestimmen.

Reciprocitätsgesetz. Wie zwei Punkte der Ebene eine Gerade (*die in der Mitte* ihrer Verbindungslinie errichtete Senkrechte) bestimmen

mit der Eigenschaft, dass alle auf ihr liegenden Punkte gleichen Streckenabstand von den beiden Punkten haben, so bestimmen reciprok zwei Geraden der Ebene einen Punkt (den unendlich fernen Punkt der Halbirungslinie ihres Winkels)* mit der Eigenschaft, dass alle durch ihn gehenden Geraden (die Parallelen zur Halbirungslinie) gleichen Winkelabstand von den beiden Geraden haben.

Folgerungen. 1. Wie es zu einer Geraden unendlich viele Punktepaare giebt, die imaginär auf derselben liegen, auch wenn der Abstand der beiden Punkte gegeben ist, so giebt es zu einem unendlich fernen Punkte (einer Geraden) unendlich viele Linienpaare, die imaginär durch ihn gehen, auch wenn ihr Winkel gegeben ist. — 2. Zwei in endlicher Entfernung sich schneidende Geraden können hiernach nur in Bezug auf einen unendlich fernen Punkt conjugirt sein. (Da man den unendlich fernen Punkt durch seine Gerade ersetzen kann und diese die Halbirungslinie des Winkels der beiden Geraden ist, so erkennt man die Identität dieser imaginären Beziehung mit der unter Ab gefundenen.) — 3. In Bezug auf einen unendlich fernen Punkt (eine Richtung) werden alle durch ihn gehenden Geraden (alle der Richtung Parallelen) als reell, alle anderen als imaginär angesehen. Zwei Geraden mit bestimmter Richtung sind in Bezug auf einen unendlich fernen Punkt conjugirt, wenn er auf der Halbirungslinie ihres Winkels liegt. Sie bestimmen ihn dann vollständig und gehen imaginär durch ihn.

β) Parallele Geraden.

Da zwei parallele Geraden nur ein specieller Fall von zwei sich schneidenden Geraden sind, so wird die imaginäre Lage eines Parallelenpaares zu einem Punkte durch eine entsprechende Specialisirung des oben gegebenen Reciprocitätsgesetzes bestimmt werden. Dieselbe lautet:

„Wie zwei Punkte mit gleicher Lage (zusammenfallende Punkte) unendlich viele Geraden (alle durch den Doppelpunkt hindurchgehenden) bestimmen, mit der Eigenschaft, dass alle auf ihnen liegende Punkte (das sind sämmtliche Punkte der Ebene) gleichen Streckenabstand von den beiden Punkten haben, so bestimmen reciprok zwei Geraden mit gleicher Richtung (parallele Geraden) unendlich viele Punkte (alle Punkte auf einer zu ihnen gezogenen Parallelen) mit der Eigenschaft, dass alle durch sie hindurchgehenden Geraden (das sind sämmtliche Geraden der Ebene) gleichen Winkelabstand von den beiden Geraden haben."

Anm. Zwar haben alle Geraden der Ebene die Eigenschaft, dass alle ihre Punkte von einem Doppelpunkte gleichen Abstand haben, und alle Punkte der Ebene die reciproke, dass alle durch sie gehenden Geraden ein Parallelenpaar unter gleichen Winkeln schneiden. Die Specialisirung

* Es wird immer a[illegible] dass jede Gerade nur eine Richtung darstelle.

des Gesetzes führt jedoch wie im ersten, so auch im zweiten Falle nu auf eine beschränkte Gruppe von Gebilden. — Hinsichtlich des Zustand kommens der erwähnten Specialisirungen sei noch Folgendes bemerk Fallen die beiden Punkte, welche die in der Mitte ihrer Verbindungs linie Senkrechte bestimmen, in einen zusammen, so verwandelt sich ihre imaginäre Lage auf der Senkrechten in eine reelle und die Richtung der Senkrechten wird unbestimmt. Werden andererseits die beiden Geraden, welche den unendlich fernen Punkt der Halbirungslinie ihres Winkels bestimmen, parallel, so verwandelt sich ihr imaginäres Hindurchgehen durch jenen Punkt in ein reelles und die Lage dieses Punktes, d. h. die Lage der Halbirungslinie wird unbestimmt. Im ersten Falle kann man von allen Punkten der Ebene, mit Ausnahme des mit dem Doppelpunkte zusammenfallenden, sagen, dass sie imaginäre Lage zu dem Doppelpunkte haben. Ebenso kann man im zweiten Falle von jedem Punkte der Ebene mit Ausnahme des unendlich fernen, sagen, dass das Parallelenpaar imaginär durch ihn hindurchgehe. Auf diese Weise wird die bei der Specialisirung des Reciprocitätsgesetzes in Verlust gerathene imaginäre Beziehung wiederhergestellt. Hält man im ersten Falle die ursprüngliche Richtung der Senkrechten, im zweiten die ursprüngliche Lage der Halbirungslinie fest, so erhalten nur die Punkte dieser Senkrechten imaginäre Lage zum Doppelpunkte, und nur die Punkte der Halbirungslinie imaginäre Lage zu dem Parallelenpaare. Man wird von dieser Beschränkung Gebrauch machen, wenn die Richtung der Senkrechten, resp. die Lage der Halbirungslinie nicht anderweitig bestimmt ist.

Die imaginären Beziehungen schneidender und paralleler Geraden zu einem Punkte lassen sich nun in folgenden Sätzen gegenüberstellen:

Zwei schneidende Geraden schneiden sich reell in einem endlich fernen Punkte der Halbirungslinie ihres Winkels, imaginär in dem unendlich fernen Punkte derselben.

Zwei parallele Geraden schneiden sich reell in dem unendlich fernen Punkte irgend einer zu ihnen gezogenen Parallelen, imaginär in irgend einem andern Punkte derselben, resp. der gleichweit von beiden entfernten Parallelen.

Folgerungen. In Bezug auf einen Punkt sind also alle durch ihn gehenden Geraden als reell, alle anderen als imaginär zu betrachten. — Ein Paar sich schneidender Linien bestimmt nicht nur denjenigen Punkt, in welchem es sich reell, sondern auch jenen, in welchem es sich imaginär schneidet. — Ein Parallelenpaar bestimmt ausser dem unendlich fernen Punkte, in dem es sich reell schneidet, unendlich viele Punkte, in denen es sich imaginär schneidet. — Eine Gerade bestimmt mit einem unendlich fernen Punkte (einer nach Lage und Richtung gegebenen Geraden) zusammen eine schneidende Linie, mit einem endlich fernen Punkte zusammen eine *Richtung* als conjugirte in Bezug auf den Punkt.

Imaginär liegende Kreistangenten. — Die Tangenten aus einem innerhalb eines Kreises K liegenden Punkte P kann man mittelst des von der Lage von P unabhängigen Satzes bestimmen, dass, wenn p die Polare zu P ist, die Schnittpunkte von p und K (R und R_1) gleichzeitig die Berührungspunkte der aus P gezogenen Tangenten sind. Da ferner die Tangenten (r und r_1) (als imaginär zu P) parallel sein müssen und ihre Winkel durch die Richtungen der Polare und des durch P gehenden Durchmessers halbirt werden, so stehen sie beide auf diesem Durchmesser senkrecht. (Fig. 11.)

Rückt P auf dem Durchmesser bis an die Peripherie des Kreises (V), so nähert sich p der Tangentenlage, die imaginären Schnittpunkte von p und K, nämlich R und R_1, gehen in einen rellen Doppelpunkt (V), und die imaginären Tangenten r und r_1 in eine reelle Doppeltangente über. Rückt P dagegen auf dem Durchmesser bis in den Mittelpunkt (K), so rückt p in unendliche Entfernung, R und R_1 rücken (der letztere Punkt über $+\infty$ und $-\infty$) beide nach K, und r und r_1 gehen in einen Durchmesser über, der hiernach als imaginäre, aus dem Mittelpunkt kommende Tangente gilt und beliebige Richtung hat.

Anm. Man beachte, dass zwei conjugirte imaginäre Gebilde, $a+bi$ und $a-bi$, wenn sie zusammenfallen, immer in ein reelles übergehen, weil $a+bi$ nur dann gleich $a-bi$ sein kann, wenn $b=0$ ist, also das imaginäre Glied verschwindet. Da nun die Tangenten r und r_1 nur in Bezug auf den Punkt P als reell oder imaginär angesehen werden, so werden sie reell, sobald sie durch den Punkt P gehen, also in beiden eben betrachteten speciellen Fällen. Die Berührung selbst ist aber nur im ersten Falle eine reelle, weil nur hier die Berührungspunkte mit einem Punkte der Peripherie zusammenfallen.

Imaginär liegende Tangenten an eine Curve. — Da die erste Polare eines Punktes X in Bezug auf eine C_n diese Curve in den $n(n-1)$ Berührungspunkten der aus X an die C_n gezogenen Tangenten schneidet, so entspricht einem imaginär liegenden Paare solcher Berührungspunkte (R, R_1) auch ein imaginär liegendes Tangentenpaar (r, r_1). Es stehen dann r und r_1 auf RR_1 in den Punkten R und R_1 senkrecht.

b) Punktepaare.

Ist der Punkt, in Bezug auf welchen die imaginäre Lage eines Punktepaares ausgesprochen wird, ein unendlich ferner, so fällt dieser Fall mit Aa zusammen. Ist er ein endlich ferner (P), so folgt durch die zu Ab reciproken Betrachtungen, dass jeder andere Punkt zu P imaginär liegt. Durch einen imaginären (R) und den reellen Punkt geht also stets eine reelle Gerade, auf welcher auch der zu R conjugirte Punkt R_1 liegt. Und zwar ist, da oben die reelle Richtung die Mitte zwischen den beiden conjugirten *imaginären* Richtungen war, jetzt der reelle Punkt

P die Mitte zwischen den beiden conjugirten imaginären Punkten R und R_1. — Durch zwei imaginär liegende Punkte (R, S) kann eine reelle (wenn R, S, P in derselben Geraden liegen) oder eine imaginär liegende Gerade gehen. Im zweiten Falle ist die Verbindungslinie ihrer conjugirten Punkte (R_1, S_1) die zu RS conjugirte Gerade.

Man erhält diese Resultate auch, von Ba ausgehend, durch Betrachtungen, welche reciprok zu denen sind, welche von Aa zu Ab führen. Wenn dort die reelle Gerade und ein imaginäres conjugirtes Punktepaar gegeben war, so erhielt man ein conjugirtes Linienpaar, wenn man einen beliebigen Punkt der reellen Geraden mit den conjugirten Punkten verband. Wenn hier der reelle (endlich entfernte) Punkt und ein imaginäres conjugirtes Linienpaar (mit gleichem Abstande von dem Punkte) gegeben ist, so erhält man ein conjugirtes Punktepaar, wenn man eine beliebige Gerade durch den reellen Punkt zieht und ihre Schnittpunkte mit den conjugirten Geraden bestimmt.

Anm. Es mag hier noch bemerkt werden, dass nach den Gesetzen der Ausdehnungslehre ein Punkt durch Multiplication mit einer reellen Zahl seine Lage nicht ändert, wohl aber durch Multiplication mit einer imaginären Zahl.

II. Das Imaginäre im Raume.

A. Das Imaginäre in Bezug auf die Ebene.

a) Punktepaare.

Dieser Fall ist ganz analog dem der Punktepaare, die zu einer Geraden imaginär liegen (I. Aa). Ein Punktepaar liegt imaginär auf der Ebene, die in der Mitte seiner Verbindungsstrecke auf ihr senkrecht steht. Das Punktepaar bestimmt diese Ebene vollständig. Umgekehrt liegen auf einer Ebene imaginär alle Punktepaare, deren Verbindungsstrecke auf der Ebene senkrecht steht und durch sie halbirt wird. Man erhält diese Resultate, wenn man in der früheren analogen Betrachtung die Gerade e_3e_2 (Fig. 1) um die Verbindungsstrecke der beiden Punkte B, B_1 als Axe sich drehen lässt.

Lässt man Fig. 5 sich um die Axe PQ drehen, so folgt: Eine Ebene (B_1D_1) schneidet eine ausserhalb liegende Kugelfläche σ imaginär in zwei Punkten (P, Q), den Centralpunkten des durch die Ebene und die Kugel bestimmten orthogonalen Systems. Lässt man dieselbe Figur sich um eine in O auf AC senkrecht stehende Axe drehen, so folgt: Eine Cylinderfläche schneidet eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Axe der ersteren liegt, imaginär in zwei von P und Q beschriebenen Kreisen. — Dasselbe gilt von einer Kegelfläche, wenn die Drehung um eine andere durch O gehende Axe stattfindet.

Dreht Fig. 11 sich um die Axe KR_1, so folgt: Die imaginären Berührungspunkte der von einem innerhalb der Kugel K liegenden Punkte P gezogenen Tangenten sind zwei auf KP liegende Punkte R und R_1. Hieraus lässt sich schon schliessen, dass der Tangentenkegel, der seinen Scheitel in P hat, in ein Ebenenpaar degenerirt. In der That zeigt die Figur, dass zwei imaginär berührende parallele Tangentenebenen vorhanden sind, die auf KR_1 in R und R_1 senkrecht stehen. — Dreht Fig. 11 sich um eine in K auf KR_1 senkrechte Axe, so folgt: Der aus den Punkten eines innerhalb der Kugelfläche liegenden concentrischen Kreises beschriebene imaginäre doppelte Tangentenkegel degenerirt in einen doppelten (von r und r_1 beschriebenen) Cylinder, dessen gemeinsame Axe auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. In derselben Ebene liegen auch die imaginären Berührungskreise. — Dreht Fig. 11 sich um eine andere durch K gehende Axe, so hat man statt des doppelten Cylinders einen doppelten Kegel, und der von P beschriebene Kreis hört auf, concentrisch zu sein.

b) Linienpaare.

Da alle ausserhalb einer Ebene liegenden Punkte als zu ihr imaginär liegend zu betrachten sind, so wird auch eine Gerade, welche nicht in der Ebene liegt, also imaginäre Punkte verbindet, im Allgemeinen als imaginär zu betrachten sein. Doch sind folgende Fälle zu unterscheiden. Repräsentirt die Ebene nur eine Seite* (vergl. Raumlehre I, Nr. 35), so sind alle zu ihr parallelen Geraden als reell anzusehen. — Repräsentirt sie eine Seite und eine Richtung, so sind nur diejenigen Geraden, welche dieser Richtung parallel sind, reell. — Repräsentirt sie eine Seite, eine Richtung und eine Lage, so sind nur solche Geraden reell, die ganz in ihr liegen. Jedenfalls hat eine imaginär liegende Gerade stets einen reellen Punkt (ihren endlichen oder unendlich fernen Schnittpunkt mit der Ebene). Bestimmt man zu jedem Punkte der imaginär liegenden Geraden den conjugirten Punkt, so liegen diese Punkte wieder auf einer Geraden, der conjugirten Geraden. — Zwei in Bezug auf eine Ebene conjugirte Geraden schneiden sich also stets in einem reellen Punkte und liegen in einer Ebene. — Die speciellen Fälle der parallelen Geraden sind nach Analogie von I. Ab leicht zu behandeln.

c) Ebenenpaare.

Dieser Fall ergiebt sich aus I. Ab, wenn man alle dort betrachteten Gebilde eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Bewegung machen

---

* Wie man den Inbegriff aller durch eine Gerade ausgedrückten Lagen (Punkte) ihre Richtung nennen kann, so auch den Inbegriff aller durch eine Ebene ausgedrückten Richtungen (Geraden) ihre Seite.

lässt. So findet man: Jede imaginär liegende Ebene schneidet die Ebene in einer reellen Geraden. Die conjugirte Ebene enthält a den Punkten der ersten Ebene conjugirten Punkte. Eine parallele ist als reell zu betrachten, wenn die gegebene Ebene nur Seit Richtung, nicht aber die Lage repräsentirt. Zwei conjugirte E schneiden sich in einer reellen Geraden.

B. Das Imaginäre in Bezug auf den Punkt.

a) Ebenenpaare.

Reciprok mit II. A a. — In Bezug auf einen Punkt sind alle ihn gehenden Ebenen reell, alle anderen imaginär liegend. Zwei i licher Entfernung sich schneidende Ebenen sind conjugirt in Bezu jeden Punkt der unendlich fernen Geraden der Halbirungsebene Winkels, zwei parallele Ebenen in Bezug auf jeden Punkt irgend parallelen, resp. der von beiden gleichweit entfernten parallelen E

b) Linienpaare.

Identisch mit I. B a, da die beiden Geraden mit dem Punkte i selben Ebene liegen müssen. (Denn ist der Punkt und eine G gegeben, so liegt, wie früher schon gezeigt wurde, die conjugirte G mit beiden Gebilden in derselben Ebene.)

c) Punktepaare.

Identisch mit I. B b, da die Punkte stets auf derselben Geraden müssen (aus analogem Grunde wie vorher).

C. Das Imaginäre in Bezug auf die Gerade.

a) Ebenenpaare.

Folgt aus I. B a, wenn man alle Gebilde sich senkrecht zur der Zeichnung bewegen lässt.

b) Punktepaare.

Wie I. A a, da die Gerade und das Punktepaar stets in ders Ebene liegen müssen.

c) Linienpaare.

Wie I. A b. — Je nachdem die gegebene Gerade nur eine Ric oder Richtung und Lage darstellen soll, sind alle ihr parallelen Ge als reell anzusehen oder nicht. Jedenfalls schneidet die imaginär lie Gerade die reelle in einem reellen Punkte und liegt mit ihr in ders Ebene.

Es fragt sich, in welcher Beziehung eine kreuzende Gerade z reellen Geraden steht. Dieselbe hat weder einen reellen Punkt m *gemeinsam, noch liegt* sie mit ihr zusammen in einer reellen Ebene.

ist also diejenige, welche Staudt complexe Gerade zweiter Art nennt. — Indessen hängt die gegenseitige Lage zweier sich kreuzender Geraden mit der imaginären Einheit ganz und gar nicht zusammen. Denn suchen wir die Bedingung, unter der zwei Geraden im Raume sich in demselben Punkte schneiden, so zeigt sich, wenn wir jede der beiden Geraden durch zwei in ihr sich schneidende Ebenen ersetzen, dass dies dieselbe Bedingung ist, unter der vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden. Analytisch ausgedrückt: Es sollen aus vier linearen Gleichungen mit drei Variablen die Werthe dieser Variablen gefunden werden. Da die aus dreien dieser Gleichungen gefundenen Werthe im Allgemeinen der vierten Gleichung widersprechen, so liegt hier nicht eine geometrische, sondern eine analytische Unmöglichkeit vor. Das Auftreten des Imaginären, welches analytisch durchaus keinen Widerspruch enthält, gestattet, wenn es auch stets auf die Unmöglichkeit deutet, eine geometrische Aufgabe in dem beabsichtigten Sinne zu lösen, noch immer, wie wir gesehen haben, eine geometrische Deutung. Dagegen liegt ein analytischer Widerspruch in der Forderung, den Schnittpunkt von beliebigen zwei Geraden oder vier Ebenen im Raume zu bestimmen; dieser Widerspruch hat mit den imaginären Grössen durchaus Nichts zu schaffen und ist offenbar von derselben Natur, wie derjenige, welcher in der Forderung liegt, durch drei beliebige Punkte der Ebene eine Gerade zu legen. Man sieht also, dass nicht jede geometrische Unmöglichkeit auf den Zusammenhang mit der imaginären Einheit zurückzuführen ist und dass wenigstens für den Schnittpunkt zweier Geraden im Raume der Name „complexe Gerade zweiter Art“ nicht angemessen erscheint.

VIII.

Zur Theorie dreifach orthogonaler Flächensysteme.

Von

Dr. Th. Kötteritzsch,

Oberlehrer in Freiberg.

In einer Programmabhandlung, die jüngst auch gesondert im Buchhandel erschienen ist, hat der Verfasser das Thema behandelt: „Die Ermittelung der Potentialcoordinaten und der Krümmungslinien einer gegebenen Niveaufläche durch blosse Quadraturen.“ Jene Abhandlung konnte den überreich im Thema enthaltenen Stoff nur zum geringeren Theile erschöpfen, sie gab im Wesentlichen nur soviel, als man aus den allgemeinen Sätzen Lamé's in seinen „*Leçons sur les coordonnées curvilignes*“ und einigen verwandten und bekannten anderen überhaupt abzuleiten im Stande ist. Die folgenden Zeilen sollen das oben genannte Problem um ein Stück seiner Lösung weiter zuführen.

Um an Raum zu sparen, nehmen wir im Folgenden die Bezeichnungen der obigen Abhandlung ohne Weiteres wieder auf und leiten Citate, die sich auf diese Abhandlung beziehen, kurz ein durch ein vorgesetztes Pg.

Wir beginnen damit, dass wir zu den in der Programmabhandlung aufgeführten Relationen noch einige neue hinzufügen, die theils bekannt, theils aus den am angeführten Orte stehenden Formeln leicht abgeleitet werden können.

Zu den Relationen Pg. Cap. IV, § 1, 3 kann man ergänzen

$$\text{A)}\quad \begin{gathered} l^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 = m^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 = n^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 = 1, \\ lm + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,\ mn + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0,\ nl + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0. \end{gathered}$$

Zu Pg. Cap. IV, § 1, 7 kann man ergänzen

$$\text{B)}\quad \frac{dF}{dx} = \frac{1}{n}\left(b_2 \frac{\partial F}{\partial n_\beta} - b_1 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma}\right),\quad \frac{dF}{dy} = \frac{1}{n}\left(a_1 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma} - a_2 \frac{\partial F}{\partial n_\beta}\right).$$

Zu Pg. Cap. IV, § 1, 17 kann man hinzufügen, dass **allgemein für** *jede stetige Function F* der Punkte der gegebenen Niveaufläche gilt

C) $$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\beta}\right)+r\frac{\partial F}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\gamma}\right)+\varrho\frac{\partial F}{\partial n_\beta}.$$

Zu Pg. Cap. IV, § 1, 10 ergänze man

D) $$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial n_\beta}&=a_2\varrho-l\varrho_1, & \frac{\partial a_2}{\partial n_\gamma}&=a_1 r-l\varrho_2;\\ \frac{\partial b_1}{\partial n_\beta}&=b_2\varrho-m\varrho_1; & \frac{\partial b_2}{\partial n_\gamma}&=b_1 r-m\varrho_2;\\ \frac{\partial c_1}{\partial n_\beta}&=c_2\varrho-n\varrho_1, & \frac{\partial c_2}{\partial n_\gamma}&=c_1 r-n\varrho_2.\end{aligned}$$

Wendet man Pg. Cap. II, § 1, 3 an auf die Orthogonalflächen β und γ, so ergiebt sich weiter

E) $$\begin{aligned}\frac{1}{{}^aR_\beta}&=-\frac{1}{U}\left[l^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+m^2\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}+n^2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+2lm\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}+2mn\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z}+2nl\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x}\right],\\ \frac{1}{{}^aR_\gamma}&=-\frac{1}{V}\left[l^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+m^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}+n^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}+2lm\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}+2mn\frac{\partial^2\gamma}{\partial y\partial z}+2nl\frac{\partial^2\gamma}{\partial z\partial x}\right],\\ r&=-\frac{1}{U}\left[a_2^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+b_2^2\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}+c_2^2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+2a_2b_2\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}+2b_2c_2\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z}+2c_2a_2\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x}\right],\\ \varrho&=-\frac{1}{V}\left[a_1^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+b_1^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}+c_1^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}+2a_1b_1\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}+2b_1c_1\frac{\partial^2\gamma}{\partial y\partial z}+2c_1a_1\frac{\partial^2\gamma}{\partial z\partial x}\right].\end{aligned}$$

Diese Relationen E) gelten aber offenbar nur, wenn man sie auf Punkte der gegebenen Niveaufläche bezieht, da für andere Punkte l, m, n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 andere und zwar unbekannte Werthe annehmen. Besonders hervorgehoben mag noch werden, dass $\frac{1}{{}^aR_\beta}-r$ dasselbe ist, was wir Pg. Cap. IV, § 3 mit G und dass $\frac{1}{{}^aR_\gamma}-\varrho$ dasselbe ist, was ebendort $-H$ genannt wurde. Wir werden in der Folge, der Einfachheit der Schreibweise Rechnung tragend, diese Bezeichnungsweise durch G und H beibehalten, wollen aber, indem weiterhin die in Pg. Cap. IV, § 3 enthaltenen Resultate durch einfachere ersetzt werden, einfach $\frac{1}{{}^aR_\beta}=G$ und $\frac{1}{{}^aR_\gamma}=H$ bezeichnen.

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\beta}\right)=-M\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(U\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)=-MU\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta}-M\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial U}{\partial\alpha}$$
$$=-MU\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right)+U\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial l U}{\partial n_\alpha}$$
$$=-M\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(-\frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)+\varrho_1\frac{\partial F}{\partial n_\beta}$$
$$=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)-\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\frac{\partial l M}{\partial n_\beta}+\varrho_1\frac{\partial F}{\partial n_\beta}$$
$$=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)-G\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}+\varrho_1\frac{\partial F}{\partial n_\beta}.$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)-H\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}+\varrho_2\frac{\partial F}{\partial n_\gamma},$$

so dass wir die neuen Relationen erhalten, die der früheren Relation entsprechen:

$$3)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\beta}\right)+G\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}&=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)+\varrho_1\frac{\partial F}{\partial n_\beta},\\ \frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\gamma}\right)+H\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}&=\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial F}{\partial n_\alpha}\right)+\varrho_2\frac{\partial F}{\partial n_\gamma}.\end{aligned}$$

Es ist nicht schwer, mit Hilfe dieser Relationen 3) und C) aus den Gleichungen 1) und 2) und Pg. Cap. IV, § 1, 10 die Lamé'schen Relationen abzuleiten. Geht man z. B. aus von $a_1\varrho_1=\frac{\partial l}{\partial n_\beta}$ und differentiirt beiderseits nach ∂n_α, so erhält man

$$a_1\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}+\varrho_1\frac{\partial a_1}{\partial n_\alpha}=\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial l}{\partial n_\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial l}{\partial n_\alpha}\right)-G\frac{\partial l}{\partial n_\alpha}+\varrho_1\frac{\partial l}{\partial n_\beta}.$$

Hieraus wird aber weiter

$$a_1\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}+lG\varrho_1+\frac{\partial}{\partial n_\beta}(a_1G+a_2H)-G(a_1G+a_2H)=a_1\varrho_1^2,$$
$$a_1\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial n_\beta}-G^2-\varrho_1^2\right)+lG\varrho_1+G(a_2\varrho-l\varrho_1)$$
$$+a_2\left(\frac{\partial H}{\partial n_\beta}-GH\right)-a_1H\varrho=0,$$
$$a_1\left(\frac{\partial G}{\partial n_\beta}+\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}-H\varrho-G^2-\varrho_1^2\right)+a_2\left(\frac{\partial H}{\partial n_\beta}+G\varrho-GH\right)=0.$$

Nun ist nach der fünften der Lamé'schen Relationen

$$\frac{\partial H}{\partial n_\beta}+G\varrho-GH=0,$$

folglich auch, da a_1 im Allgemeinen nicht verschwindet,

$$\frac{\partial G}{\partial n_\beta}+\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}=H\varrho+G^2+\varrho_1^2.$$

Dies ist aber die letzte der Lamé'schen Relationen.

Schliesslich weisen wir noch besonders darauf hin, dass die Gleichungen Pg. Cap. I, § 1, 1 auch dann noch ein allgemeines erstes Integral von $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}=0$ darstellen, wenn man für β $\chi(\beta)$, für γ $\chi'(\gamma)$ schreibt und unter $\chi(\beta)$ und $\chi'(\gamma)$ irgendwelche eindeutige, endliche und stetige Functionen von β oder von γ allein versteht.

§ 1.

Differentiationen nach ∂n_α.

Die bis jetzt aufgestellten Relationen sind im Wesentlichen nur dadurch entstanden, dass die Differentiationen oder richtiger Variationen nach den Normalenelementen ∂n_β und ∂n_γ verwerthet wurden, Variationen, die wenigstens für Punkte auf der gegebenen Niveaufläche immer ausführbar waren. Ein Gleiches gilt nicht ohne Weiteres für die Variationen nach ∂n_α, weil die Gestalt der Niveaufläche sich ändert, wenn man von der gegebenen zu den nächstbenachbarten äusseren Niveauflächen übergeht, diese Gestaltsveränderung aber vollständig unbekannt ist, insofern man nur weiss, dass α implicite in der Gleichung der gegebenen Niveaufläche enthalten, die Art des Vorkommens von α darin aber vollständig unbekannt ist. Dennoch aber sind wir im Stande, Relationen aufzustellen, die wenigstens die Variationen nach ∂n_α enthalten.

Der Weg, auf welchem wir zu den Relationen Pg. Cap. IV, § 1, 10 geführt wurden, liefert uns ohne Weiteres auch die Relationen

1) $$lG=\frac{\partial a_1}{\partial n_\alpha},\quad lH=\frac{\partial a_2}{\partial n_\alpha},\quad mG=\frac{\partial b_1}{\partial n_\alpha},\quad mH=\frac{\partial b_2}{\partial n_\alpha},\quad nG=\frac{\partial c_1}{\partial n_\alpha},\quad nH=\frac{\partial c_2}{\partial n_\alpha}.$$

Ersetzen wir l, m und n durch seine aus Pg. Cap. IV, § 1, 3 entnommenen Werthe, differentiiren nach ∂n_α und benützen die eben gewonnenen Gleichungen 1), so werden wir auf folgende Relationen geführt:

2) $$\frac{\partial l}{\partial n_\alpha}=-a_1 G-a_2 H,\quad \frac{\partial m}{\partial n_\alpha}=-b_1 G-b_2 H,\quad \frac{\partial n}{\partial n_\alpha}=-c_1 G-c_2 H.$$

Ist F irgend eine stetige Function des Ortes, so ist

Diese Gleichungen 6) sind nicht so einfach, als die 5), weil auch die Variationen $\frac{\partial G}{\partial n_\beta}$ und $\frac{\partial H}{\partial n_\gamma}$ auf den rechten Seiten vorkommen; sie unterscheiden sich aber zu ihrem Vortheil von den Gleichungen 5) dadurch, dass in jeder Gleichung nur eine der unbekannten Functionen G oder H mit ihrer Derivirten entweder als $\frac{\partial G}{\partial n_\beta}$ oder als $\frac{\partial H}{\partial n_\gamma}$ vorkommt.

Zu einer Reihe wichtiger neuer Relationen gelangen wir noch, wenn wir die bisherigen Ergebnisse anwenden auf die Variationen nach ∂n_α, die aus den Lamé'schen Relationen entstehen. Von diesen aber sind ohne Weiteres die dritte und sechste der Lamé'schen Relationen hier zu wiederholen in der Form

$$7)\qquad \frac{\partial r}{\partial n_\alpha} = \varrho_2(r-G), \quad \frac{\partial \varrho}{\partial n_\alpha} = \varrho_1(\varrho - H).$$

Die erste und zweite und ebenso die beiden letzten der Lamé'schen Relationen eignen sich aber hier nicht zur weiteren Discussion, weil sie die Variationen $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\alpha}$ und $\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\alpha}$ entweder als neue unbekannte Functionen einführen würden oder schon enthalten. Differentiirt man ferner die drittletzte der Lamé'schen Relationen nach ∂n_α, so ist das Ergebniss die Summe der mit ϱ_1 multiplicirten vorletzten und der mit ϱ_2 multiplicirten letzten Lamé'schen Relation. Es bleibt also hier allein die Behandlung der vierten und fünften Lamé'schen Relation übrig, die wir jetzt schreiben in den Formen

$$\frac{\partial G}{\partial n_\gamma} = H(G-r), \quad \frac{\partial H}{\partial n_\beta} = G(H-\varrho).$$

Differentiiren wir nun diese beiden Gleichungen nach ∂n_α, so entsteht

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial G}{\partial n_\gamma}\right) = H\frac{\partial G}{\partial n_\alpha} + G\frac{\partial H}{\partial n_\alpha} - H\frac{\partial r}{\partial n_\alpha} - r\frac{\partial H}{\partial n_\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial n_\beta}\right) = G\frac{\partial H}{\partial n_\alpha} + H\frac{\partial G}{\partial n_\alpha} - G\frac{\partial \varrho}{\partial n_\alpha} - \varrho\frac{\partial G}{\partial n_\alpha}.$$

Ersetzt man hier die linken Seiten durch ihre Werthe aus 5) und wendet auf die rechten Seiten die Relationen 4) und 7) an, so erscheinen die beiden Gleichungen

$$GH(\varrho_1+\varrho_2) - G\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} + 2\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma}\right) - H\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} + 2\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial(\varrho_1+\varrho_2)}{\partial n_\beta}\right) - r\frac{\partial(\varrho_1+\varrho_2)}{\partial n_\gamma},$$

$$GH(\varrho_1+\varrho_2) - G\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} + 2\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma}\right) - H\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} + 2\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial(\varrho_1+\varrho_2)}{\partial n_\gamma}\right) - \varrho\frac{\partial(\varrho_1+\varrho_2)}{\partial n_\beta},$$

wenn man noch bedenkt, dass nach den beiden ersten Lamé'schen Relationen

$$r(\varrho_2-\varrho_1)=\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\beta},\quad \varrho(\varrho_1-\varrho_2)=\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\gamma}.$$

Diese eben erlangten beiden Gleichungen sind aber vollkommen identisch, denn ihre linken Seiten stimmen ohne Weiteres überein und die rechten Seiten werden übereinstimmend, wenn man die Relation C) beachtet.

Setzen wir also noch zur Abkürzung

$$8)\qquad \varrho_1+\varrho_2=\sigma,$$

so können wir die obigen beiden Gleichungen zusammenfassen in die eine:

$$GH\sigma-G\frac{\partial(\sigma+\varrho_2)}{\partial n_\gamma}-H\frac{\partial(\sigma+\varrho_1)}{\partial n_\beta}=-\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial n_\beta}\right)-r\frac{\partial\sigma}{\partial n_\gamma}.$$

Da nun weiter

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial\sigma}{\partial n_\beta}\right)=\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial n_\beta}\right)-\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\,\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma},$$

so können wir die eben erlangte Gleichung auch umformen in

$$GH-G\left(\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}+\frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma}\right)-H\left(\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}+\frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma}\right)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\right)-\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\,\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}-r\,\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}$$

oder auch schliesslich in

$$9)\qquad \left[G-\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}-\frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma}\right]\left[H-\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}-\frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma}\right]$$
$$=-\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\right)-r\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}+\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}\,\frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma}+\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}\,\frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma}+\frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\beta}\,\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma^2}.$$

Diese Gleichung 9) ist deswegen von ganz besonderer Wichtigkeit, weil sie neben durchaus bekannten Functionswerthen die unbekannten Functionen G und H ohne ihre Derivirten enthält, so dass, wenn die eine derselben, etwa G, bekannt wäre, aus ihr H durch eine einfache Auflösung einer linearen Gleichung folgen würde.

Der Vollständigkeit wegen möge hier noch die Gleichung Pg. Cap. I, §2, 13 Platz finden, die wir jetzt schreiben in der Form

$$UV\frac{\partial^2 lk}{\partial\beta\,\partial\gamma}=GH+2r\varrho-G\varrho-Hr-\frac{\partial\varrho}{\partial n_\beta}-\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}$$

und der wir, da

$$UV\frac{\partial^2 lk}{\partial\beta\,\partial\gamma}=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial lk}{\partial n_\beta}\right)-\varrho\frac{\partial lk}{\partial n_\beta},$$

auch die Formen geben können

$$10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}\right) - r\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} &= (G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right), \\ \frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}\right) - \varrho\frac{\partial l k}{\partial n_\beta} &= (G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right). \end{aligned}$$

§ 2.

Anwendungen der bisherigen Resultate.

Durch die Gleichungen 9) und 10) des vorigen Paragraphen sind die Resultate von Pg. Cap. IV, § 3 in wesentlich weitergehender und erfolgreicherer Weise ersetzt; es ist daher auch möglich, jetzt in deutlicherer Weise durch Verwendung der eben gewonnenen Resultate der Lösung des ganzen Problems näher zu kommen. Abgesehen nämlich von einem Ausnahmefalle, sind wir nun im Stande, den Beweis durch den Erfolg der Rechnung selbst zu liefern, dass M, k, U und V durch einfache Quadraturen gefunden, also auch das ganze vorliegende Problem durch einfache Quadraturen gelöst werden könne, wenn man in den Besitz von nur einer der beiden Functionen G oder H gelangt ist.

Der erwähnte Ausnahmefall tritt dann ein, wenn eine der beiden Functionen G oder H der Null gleich wird. Betrachten wir, um diesen Ausnahmefall vollständig zu erschöpfen, zuerst den Ausnahmefall

$$G = H = 0.$$

Dann folgt wegen $G = \frac{\partial l M}{\partial n_\beta} = U\frac{\partial l M}{\partial \beta}$, $H = \frac{\partial l M}{\partial n_\gamma} = V\frac{\partial l M}{\partial \gamma}$, weil U und V nicht verschwinden können, dass auch

$$\frac{\partial l M}{\partial \beta} = 0 \text{ und } \frac{\partial l M}{\partial \gamma} = 0.$$

Es kann folglich lM nur Function von α sein und ist, da α für alle Punkte jeder einzelnen Niveaufläche constant ist, selbst ein constanter Werth für diese Punkte.

Da ferner

$$\frac{\partial l M}{\partial n_\alpha} = -M\frac{\partial l M}{\partial \alpha} = \varrho_1 + \varrho_2$$

ebenfalls nur abhängig von α sein kann, so folgt, dass für alle die Flächen, für welche $G = H = 0$ sein kann, $\varrho_1 + \varrho_2$ ein unveränderlicher Werth sein muss.

Weiter ergeben die beiden letzten Lamé'schen Relationen

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\alpha} = \varrho_1^2, \quad \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\alpha} = \varrho_2^2.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha}(\varrho_1 + \varrho_2) = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$$

oder

$$-M\frac{\partial(\varrho_1+\varrho_2)}{\partial\alpha}=\varrho_1^2+\varrho_2^2.$$

Da nun aber von der linken Seite dieser Gleichung bereits bewiesen ist, dass sie nur Function von α sein kann, also constant ist für alle Punkte einer und derselben Niveaufläche, so folgt, dass ein Gleiches auch mit der rechten Seite der Fall sei. Setzen wir also

$$\varrho_1+\varrho_2=a,\quad \varrho_1^2+\varrho_2^2=b^2,\quad\text{also}\quad \varrho_1\varrho_2=\frac{a^2-b^2}{2},$$

so ergiebt sich hieraus

$$\varrho_1-\varrho_2=\pm\sqrt{2b^2-a^2},$$

es muss also auch sowohl ϱ_1, als auch ϱ_2 für alle Punkte der gegebenen Niveaufläche constant sein.

Hiermit folgt weiter aus den beiden ersten Lamé'schen Relationen

$$r(\varrho_1-\varrho_2)=0,\quad \varrho(\varrho_1-\varrho_2)=0.$$

Diese Bedingungen verlangen aber entweder, dass $\varrho_1=\varrho_2$ oder dass gleichzeitig $r=\varrho=0$.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall

$$\varrho_1=\varrho_2=Const.$$

näher, so ergiebt sich aus $\frac{\partial lM}{\partial n_\alpha}=\varrho_1+\varrho_2$ und $\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}=\varrho_1^2$

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\alpha}=\frac{\partial lM}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}=\frac{\partial lM}{\partial\varrho_1}\varrho_1^2=2\varrho_1,$$

folglich durch Integration

$$M=A\varrho_1^2,$$

wenn lA die Integrationsconstante bezeichnet.

Weiter folgt nun aus $\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\alpha}=\varrho_1^2$

$$-A\varrho_1^2\frac{\partial\varrho_1}{\partial\alpha}=\varrho_1^2,$$

hieraus aber durch Integration

$$\alpha=-A\varrho_1+B,$$

wenn B die neue Integrationsconstante bezeichnet.

Da nun für die unendlich entfernte Niveaufläche α und ϱ_1 gleichzeitig zu Null wird, so folgt, dass auch $B=0$ sein muss, dass also

$$\alpha=-A\varrho_1;$$

damit ist aber die Niveauflächenschaar charakterisirt entweder, wenn ϱ_1 von Null verschieden ist, als concentrische Kugelflächen, oder, wenn ϱ_1 gleich Null ist, als Schaar paralleler Ebenen. Das hierher gehörige Potentialcoordinatensystem ist genugsam bekannt und bedarf hier keiner weiteren Worte.

Ist aber zweitens $\varrho_1 \gtrless \varrho_2$, also $r=\varrho=0$, so folgt nun aus der drittletzten der Lamé'schen Relationen auch $\varrho_1\varrho_2=0$; setzen wir also etwa

$\varrho_2 = 0$, $\varrho_1 \gtrless 0$, so wird jetzt $\frac{\partial l M}{\partial \varrho_1} \varrho_1^2 = \varrho_1$, also durch Integration $M = A' \varrho_1$, wenn $l A'$ die neue Integrationsconstante vertritt, und aus $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\alpha} = \varrho_1^2$ folgt jetzt $-A' \varrho_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial \alpha} = \varrho_1^2$, also durch Integration

$$\alpha = -A' l B' \varrho_1,$$

wenn $l B'$ die neue Integrationsconstante vertritt. Hiermit ist aber die zugehörige Niveauflächenschaar charakterisirt als Schaar concentrischer gerader Kreiscylinder, deren entsprechendes Potentialcoordinatensystem ebenfalls längst bekannt ist.

Wir kommen jetzt zur genaueren Untersuchung des Ausnahmefalles, dass nur eine der beiden Functionen G oder H der Null gleich, die andere aber davon verschieden ist. Setzen wir also

$$H = 0, \quad G \gtrless 0.$$

Es folgt jetzt aus der Lamé'schen Relation $\frac{\partial H}{\partial n_\beta} = G(H - \varrho)$, dass auch $\varrho = 0$, dass folglich die Flächen $\gamma = Const.$ durchaus die Krümmung 0 besitzen, d. h. Ebenen sind. Die eine Schaar der Krümmungslinien der zugehörigen Niveauflächen müssen also ebenfalls ebene Curven sein; es sind dies diejenigen, zu denen die Krümmung ϱ_1 gehört.

Wir wenden uns jetzt zur genaueren Untersuchung der andern Schaar von Krümmungslinien, von denen wir also irgend ein Element durch ∂n_γ darstellen können.

Nach der Lamé'schen Relation $\varrho(\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma}$ folgt wegen $\varrho = 0$, dass auch $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} = 0$. Längs jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist also ϱ_1 von unveränderlicher Grösse. Deswegen und wegen $H = 0$ folgt weiter aus der Relation 4, § 1, $\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} = 0$. Längs jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist also auch ϱ_2 von unveränderlicher Grösse. Weiter gilt auch die Lamé'sche Relation

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} = r(\varrho_2 - \varrho_1).$$

Wir differentiiren diese Relation nach ∂n_γ, wenden dabei auf die linke Seite die Relation C) an und beachten die eben gewonnenen Resultate, es erscheint

$$(\varrho_2 - \varrho_1) \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} = 0.$$

Da nun im Allgemeinen $\varrho_2 - \varrho_1$ nicht verschwindet (der Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ führt auf den bereits behandelten Fall concentrischer Kugelflächen zurück), ist

muss $\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}=0$ sein. Längs jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist also auch r von unveränderlicher Grösse.

Denken wir uns irgend eine dieser Krümmungslinien als räumliche Curve, so ist nach bekannten Lehrsätzen der Geometrie deren Krümmung P gegeben durch die Relation

$$P^2=r^2+\varrho_2^2.$$

Differentiiren wir auch diese Gleichung nach ∂n_γ und beachten, dass $\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma}=0$, so folgt, dass auch $\frac{\partial P}{\partial n_\gamma}=0$. Hiermit aber ist gesagt: jede einzelne der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist von unveränderlicher Krümmung.

Wir bilden nun noch die Gleichung der Schmiegungsebene oder der osculirenden Ebene, die der durch den Punkt xyz gehenden Krümmungslinie der zweiten Schaar angehört und durch diesen Punkt xyz hindurchgeht. Wir legen also eine Ebene durch die drei Punkte

$$x,\ y,\ z,$$

$$x+\frac{\partial x}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\quad y+\frac{\partial y}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\quad z+\frac{\partial z}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,$$

$$x+\frac{\partial x}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma+\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(x+\frac{\partial x}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma\right)\partial n_\gamma,\quad y+\frac{\partial y}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma+\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(y+\frac{\partial y}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma\right)\partial n_\gamma,$$

$$z+\frac{\partial z}{\partial n_\gamma}+\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(z+\frac{\partial z}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma\right)\partial n_\gamma.$$

Führt man die Rechnung aus, indem man beachtet Pg. Cap. I, § 2, 6; Cap. I, § 2, 5; Cap. IV, § 1, 4 und Cap. IV, § 1, 3 und die Relationen D), so erhält man für die Schmiegungsebene die Gleichung, wenn die variablen Coordinaten mit ξ, η, ζ bezeichnet werden:

$$(lr+a_1\varrho_2)(x-\xi)+(mr+b_1\varrho_2)(y-\eta)+(nr+c_1\varrho_2)(z-\zeta)=0.$$

Bezeichnen wir kurz die Cosinus der Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, durch λ, μ, ν, so ist bekanntlich

$$\lambda=\frac{lr+a_1\varrho_2}{\sqrt{(lr+a_1\varrho_2)^2+(mr+b_1\varrho_2)^2+(nr+c_1\varrho_2)^2}},$$

$$\mu=\frac{mr+b_1\varrho_2}{\sqrt{(lr+a_1\varrho_2)^2+(mr+b_1\varrho_2)^2+(nr+c_1\varrho_2)^2}},$$

$$\nu=\frac{nr+c_1\varrho_2}{\sqrt{(lr+a_1\varrho_2)^2+(mr+b_1\varrho_2)^2+(nr+c_1\varrho_2)^2}}.$$

Legt man ebenso durch den Punkt $x+\frac{\partial x}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\ y+\frac{\partial y}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\ z+\frac{\partial z}{\partial z_\gamma}\partial n_\gamma$ eine Schmiegungsebene an dieselbe Krümmungslinie, so bildet deren Normale mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus der Reihe nach sind $\lambda+\frac{\partial\lambda}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\ \mu+\frac{\partial\mu}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma,\ \nu+\frac{\partial\nu}{\partial n_\gamma}\partial n_\gamma$.

Nun findet man, wenn man Pg. Cap. IV, § 1, 10 beachtet und ausserdem bedenkt, dass im jetzigen Falle $\frac{\partial r}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}(lr + a_1\varrho_2) = \frac{\partial}{\partial n_\gamma}(mr + b_1\varrho_2) = \frac{\partial}{\partial n_\gamma}(nr + c_1\varrho_2) = 0.$$

Es ist daher auch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \mu}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \nu}{\partial n_\gamma} = 0.$$

Irgend zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen einer Krümmungslinie der zweiten Schaar fallen also zusammen, d. h. auch die zweite Schaar der Krümmungslinien sind ebene Curven.

Nun haben wir bereits gefunden, dass die Krümmung jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar unveränderlich ist; wir kommen daher jetzt zu dem Resultate: Die zweite Schaar der Krümmungslinien besteht entweder aus geraden Linien oder aus Kreisen.

Um diese beiden Fälle hier weiter noch gemeinsam behandeln zu können, fassen wir die Gerade als Kreis mit unendlich grossem Radius auf.

Irgend zwei nicht zusammenfallende Ebenen der Schaar $\gamma = Const.$ treffen alle diese Kreise in gewissen Punkten derart, dass, wenn man in den Treffpunkten Tangenten an die Kreise legt, diese Tangenten senkrecht stehen auf der zugehörigen Ebene $\gamma = Const.$ Dies ist aber nur möglich, wenn die beiden Ebenen $\gamma = Const.$ auch die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise enthalten. Da nun die beiden Ebenen $\gamma = Const.$ sich in einer Geraden schneiden, so folgt, dass auch die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise in einer Geraden liegen müssen. In derselben Geraden müssen sich auch alle anderen Ebenen $\gamma = Const.$ schneiden und da auch diese Ebenen normal von den Kreisen getroffen werden müssen, so folgt, dass die Gerade, welche die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise enthält, normal auf allen Ebenen der Kreise stehen muss oder dass die Kreise selbst in parallelen Ebenen liegen, die senkrecht sind zu den Ebenen $\gamma = Const.$

Hierdurch aber sind die hier in Frage kommenden Niveauflächen genug charakterisirt, man erkennt sie als Cylinderflächen oder als Rotationsflächen, je nachdem die Gerade, welche die Kreismittelpunkte enthält, in unendlicher oder in endlicher Entfernung liegt.

Da in diesem Endresultate auch der Fall $G = H = 0$ mit enthalten ist, so fassen wir unser Endresultat in die Worte zusammen: Der Ausnahmefall, wo die Gleichungen 9) und 10), § 1, keine Verwendung finden können, tritt nur dann ein, wenn die gegebene Niveaufläche entweder eine Cylinderfläche oder eine Rotationsfläche ist.

Da die Behandlung der Cylinder- und Rotationsflächen als gegebene Niveauflächen auf eine rein mathematische Anwendung führt, die für die Folge von Werth ist, so betrachten wir diese Flächen gleich hier genauer und wenden uns da zuerst zu den

Cylinderflächen als gegebene Niveauflächen. Nehmen wir die Z-Axe unseres rechtwinklig räumlichen Coordinatensystems der xyz parallel einer Cylinderseite an, so hat die Gleichung der gegebenen Niveaufläche die Form $f(x, y) = 0$ und für die Orthogonalflächenschaar $\gamma = Const.$ können wir ohne Weiteres setzen

1) $$z = \gamma, \quad -\infty \leq \gamma \leqq +\infty.$$

Dann geben die Gleichungen Pg. Cap. I, § 1, I

2) $$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = K \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -K \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0.$$

Weiter folgt aus 1)

$$V = 1, \quad \Delta_2(\gamma) = 0, \quad \frac{\Delta_2(\gamma)}{V} = 0.$$

Da ferner nach E) auch $\varrho = 0$, so folgt aus L) für die gegebene Niveaufläche

$$\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma} = 0 \text{ oder auch } \frac{\partial lk}{\partial \gamma} = 0.$$

Es ist also k unabhängig von γ, und da überhaupt k auch unabhängig von α sein muss, so ergiebt sich, dass im vorliegenden Falle k oder auch K nur Function von β sein kann. Nach der Schlussbemerkung der Einleitung dieser Arbeit können wir aber anstatt der Gleichungen 2) auch setzen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = K . \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -K . \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0.$$

Da nun K sowohl, wie auch die noch unbestimmte Function χ nur von β abhängig ist, so können wir uns χ immer so gewählt denken, dass $K \frac{\partial \chi}{\partial \beta} = 1$, so dass wir zu dem Resultate kommen: Ist die gegebene Niveaufläche eine Cylinderfläche, so kann man als allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0$ immer benützen

3) $$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Gesetzt nun, es sei G für die gegebene Niveaufläche bekannt, so fände man jetzt auch vermittelst der Gleichung

4) $$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta} = G$$

die Function lM selbst durch eine blose Quadratur. Da nämlich wegen E) und 1) $H = 0$, so ist auch $\frac{\partial lM}{\partial n_\gamma} = 0$, also M nur abhängig von α und β.

Da aber α für die gegebene Niveaufläche ebenfalls constant ist, so ist M für Punkte der gegebenen Niveaufläche nur abhängig von der einen Variablen β. Gleiches lässt sich auch von G darthun, da eine der Lamé-schen Relationen ist $\frac{\partial G}{\partial n_\gamma}=H(G-r)$, also, wegen $H=0$ im vorliegenden Falle, auch $\frac{\partial G}{\partial n_\gamma}=0$ sein muss. Ist aber G unabhängig von γ, so kann es wegen 1) nur als Function von x und y gegeben sein. Da nun ferner auch diese Variablen x und y, weil G für Punkte der gegebenen Niveaufläche bekannt sein soll, die Gleichung der gegebenen Niveaufläche $f(x,y)=0$ erfüllen müssen, so kann man mit Hilfe dieser Gleichung eine der Variablen x und y, etwa y eliminiren, so dass G als Function von x allein bekannt ist. Weiter ist nach Pg. Cap. IV, § 1 auch allgemein

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}=-a_1\frac{\partial lM}{\partial x}-b_1\frac{\partial lM}{\partial y}-c_1\frac{\partial lM}{\partial z}.$$

Nun haben wir bereits gesehen, dass lM unabhängig ist von γ, also nach 1) auch von z, folglich ist einfacher

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}=-a_1\frac{\partial lM}{\partial x}-b_1\frac{\partial lM}{\partial y}.$$

Ebenso, wie in der Function G, haben wir uns aber auch in lM die Variabeln x und y noch an einander gebunden zu denken durch die Gleichung der gegebenen Niveaufläche $f(x,y)=0$. Denken wir uns also x als unabhängige, y als abhängige Variable, so ist

$$\frac{dlM}{dx}=\frac{\partial lM}{\partial x}+\frac{\partial lM}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial lM}{\partial x}-\frac{l}{m}\frac{\partial lM}{\partial y}.$$

Da ferner im jetzigen Falle aus der allgemein giltigen Relation $la_1+mb_1+nc_1=0$ wegen $n=0$ wird $la_1+mb_1=0$, so kann nun der obige Werth von $\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}$ auch geschrieben werden als

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}=-\frac{a_1}{m}\left(m\frac{\partial lM}{\partial x}-l\frac{\partial lM}{\partial y}\right)=-a_1\frac{dlM}{dx}.$$

Aus 4) entsteht demnach

5) $$\frac{dlM}{dx}=-\frac{1}{a_1}.G.$$

Durch einfache Quadratur findet man hieraus

$$lM=lA-\int\frac{1}{a_1}G\,dx,$$

wenn lA die Integrationsconstante bezeichnet, die im Allgemeinen als Function von α zu denken ist. Geht man in 6) noch von den Logarithmen zu den Zahlen über, so entsteht

7) $$M=A.e^{-\int\frac{1}{a_1}G\,dx}.$$

Es ist somit M gefunden für die Punkte der gegebenen Niveaufläche bis auf einen constanten Factor A. Dieser Factor A, der von Null verschieden sein muss, kann beliebig gewählt werden, so lange nicht von anderer Seite her gewisse Bedingungen auftreten, wie z. B. wenn verlangt würde, dass α für die Punkte der gegebenen Niveaufläche einen bestimmten gegebenen Werth haben solle.

Da ferner aus den Gleichungen 3) folgt, dass $M = U$, so hat man mit M zugleich U gefunden für die Punkte der gegebenen Niveaufläche. Ausserdem haben wir gesehen, dass $V = k = 1$. Es ist somit das ganze für Cylinderflächen vorliegende Problem durch blose Quadraturen auf dem eben angegebenen und dem in Pg. Cap. II und III mitgetheilten Wege lösbar, sobald die Function G für die Punkte der gegebenen Niveaufläche bekannt ist.

Wir wenden uns weiter zu den

Rotationsflächen als gegebene Niveauflächen. Nehmen wir die Rotationsaxe der gegebenen Niveaufläche zur X-Axe unseres räumlichen Coordinatensystems der x, y, z, so hat die Gleichung der gegebenen Niveaufläche die Form $f(x, y^2+z^2) = 0$ oder, wenn wir $y^2+z^2 = \mathfrak{r}^2$ setzen, die Form $f(x, \mathfrak{r}) = 0$ und für die Orthogonalflächenschaar $\gamma = Const.$ treten die Meridianebenen der gegebenen Niveaufläche auf, deren Gleichung wir schreiben

$$8) \qquad arctng\,\frac{z}{y} = \gamma, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 2\pi.$$

Hieraus erhalten wir

$$9)\ \varrho = 0, \quad H = 0, \quad V = \frac{1}{\mathfrak{r}}, \quad \Delta_2(\gamma) = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{z}{\mathfrak{r}}, \quad c_2 = -\frac{y}{\mathfrak{r}}.$$

Auch jetzt folgt, ganz wie im vorigen Falle der Cylinderflächen, dass $\frac{\partial l k}{\partial \gamma} = 0$, dass man also $k = 1$ setzen kann, so dass aus den Gleichungen Pg. Cap. I, § 1, 1 sich ergiebt

$$10) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\left(y\frac{\partial \beta}{\partial y} + z\frac{\partial \beta}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{y}{\mathfrak{r}^2}\,\frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{z}{\mathfrak{r}^2}\,\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Nehmen wir nun auch jetzt wieder an, dass G für die gegebene Niveaufläche bekannt sei, so kann man, ähnlich wie im vorigen Falle, beweisen, dass G und lM nur Function von x und $\mathfrak{r}$ sein könne und dass, weil x und $\mathfrak{r}$ zugleich auch der Gleichung der gegebenen Niveaufläche genügen müssen, lM sich durch eine blose Quadratur finden lässt und M selbst dadurch für die Punkte der gegebenen Niveaufläche bekannt ist bis auf eine multiplicirende Constante. Da ferner allgemein $M = k.U.V$ und im jetzigen Falle $k = 1$, $V = \frac{1}{\mathfrak{r}}$, so hat man jetzt auch $U = \mathfrak{r}M$ gefunden und muss somit wiederum durch blose Quadraturen zur Lösung des allgemeinen *Problems* gelangen.

$$15) \qquad \frac{\partial w}{\partial n_\beta} - r w = (G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right),$$

in welcher Gleichung die rechte Seite als Function der beiden unabhängig Variablen x und y vollständig bekannt ist. Wir zerlegen w in das Product $w_1 w_2$, so dass die Gleichung 15) übergeht in

$$16) \quad w_2\left(\frac{\partial w_1}{\partial n_\beta} - r w_1\right) + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n_\beta} - (G-r)(H-\varrho) + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right) = 0.$$

Diese Gleichung 16) zerlegen wir in die beiden

$$17) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n_\beta} - r w_1 = 0,$$

$$18) \qquad \frac{\partial w_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{w_1}\left[(G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right)\right].$$

Die Gleichung 17) lässt sich schreiben in der Form

$$19) \qquad -a_1 \frac{d l w_1}{dx} - b_1 \frac{d l w_1}{dy} = r.$$

Ist nun weiter $f_1(x, y) = c_1$ die Integralgleichung zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$b_1\, dx - a_1\, dy = 0,*$$

so behaupten wir, dass die Bestimmungen

$$20) \qquad l w_1 = -\int \frac{r}{a_1}\, dx + C_1 \quad \text{oder} \quad l w_1 = -\int \frac{r}{b_1}\, dy + C_2$$

die Gleichung 17) integriren, wenn man in $\frac{r}{a_1}$ y oder in $\frac{r}{b_1}$ x mit Hilfe der Integralgleichung $f_1(x, y) = c_1$ eliminirt denkt und wenn C_1 und C_2 die Integrationsconstanten bezeichnen, die auch als Functionen von c_1 gedacht werden können. Nach geschehener Integration ist die Integrationsconstante c_1 wieder durch $f_1(x, y)$ zu ersetzen.

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, weisen wir zunächst nach, dass man für C_1 oder C_2 jede beliebige reelle, von 0 und ∞ verschiedene, stetig verlaufende Function setzen kann, die unabhängig von β ist. Da nämlich C_1 oder C_2 nur Function von $c_1 = f_1(x, y)$ sein soll, so können wir setzen

$$C_1 = \psi_1(c_1) = \psi_1(f_1(x, y)), \quad C_2 = \psi_2(c_1) = \psi_2(f_1(x, y)).$$

Hieraus folgt, da das totale Differential von ψ_1 und ψ_2 offenbar Null sein muss,

$$d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial f_1}\left[\frac{d f_1}{dx} dx + \frac{d f_1}{\partial y} dy\right] = 0, \quad d\psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial f_1}\left[\frac{d f_1}{dx} dx + \frac{d f_1}{dy} dy\right] = 0.$$

Aus jeder dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

---

* Vergl. die Bemerkung, welche am Schlusse der Betrachtung über cylindrische und Rotations-Niveauflächen in Bezug auf die Integration derartiger Differentialgleichungen gemacht wurde.

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{\partial y}dy = 0.$$

Da nun f_1 auch der Differentialgleichung

$$b_1\,dx - a_1\,dy = 0$$

genügen sollte, so muss nothwendig, wenn p irgend einen noch unbestimmten Factor bezeichnet, sein

$$\frac{df_1}{dx} = p\,b_1, \quad \frac{df_1}{dy} = -p\,a_1.$$

Bildet man nun mit Hilfe von Pg. Cap. IV, § 1, 7 $\frac{\partial f_1}{\partial n_\beta}$, so folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial n_\beta} = -a_1\frac{df_1}{dx} - b_1\frac{df_1}{dy} = -a_1 p\,b_1 + b_1 p\,a_1 = 0,$$

folglich ist auch

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial n_\beta} = U\frac{\partial f_1}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \beta} = 0.$$

Es ist somit $f_1(x, y)$ unabhängig von β, also auch ψ_1 und ψ_2, und damit ist bewiesen, dass C_1 oder C_2 für die Punkte der gegebenen Niveaufläche nur eine Function von γ allein bezeichnen könne; wir setzen deswegen

21) $$C_1 = l\,\Gamma_1, \quad C_2 = l\,\Gamma_2.$$

Sollen nun die Bestimmungen 20) der Differentialgleichung 17), die wir auch in der Form

22) $$-a_1\frac{dlw_1}{dx} - b_1\frac{dlw_1}{dy} = r$$

schreiben können, genügen, so haben wir also dies nur noch nachzuweisen für die ersten Theile der Bestimmungen von lw_1. Wegen der Art, wie c_1 in diesen Theilen vorkommt, ist aber

$$\frac{dlw_1}{dx} = -\frac{r}{a_1} - \frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{a_1}dx\left[\frac{df_1}{dx}\right] = \qquad -\frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{b_1}dy\left[\frac{df_1}{dx}\right],$$

$$\frac{dlw_1}{dy} = \qquad -\frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{a_1}dx\left[\frac{df_1}{dy}\right] = -\frac{r}{b_1} - \frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{b_1}dy\left[\frac{df_1}{dy}\right].$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$-a_1\frac{dlw_1}{dx} - b_1\frac{dlw_1}{dy} = r + \left(a_1\frac{df_1}{dx} + b_1\frac{df_1}{dy}\right)\frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{a_1}dx$$
$$= r + \left(a_1\frac{df_1}{dx} + b_1\frac{df_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial c_1}\int\frac{r}{b_1}dy.$$

Da wir nun schon gesehen haben, dass $a_1\frac{df_1}{dx} + b_1\frac{df_1}{\partial y} = 0$, so folgt, dass beide Bestimmungen 20) für lw_1 ergeben

$$-a_1\frac{dlw_1}{dx} - b_1\frac{dlw_1}{dy} = r, \text{ q. e. d.}$$

Zugleich ist auch hieraus ersichtlich, dass die beiden Bestimmungen 20) für lw_1 sich nur um eine Function von γ allein unterscheiden; dass wir

also auch beide Bestimmungen zusammenfassen können in der einen Form

$$23) \qquad l w_1 = \varphi_1(x, y) + l\Gamma_1,$$

wenn $\varphi_1(x, y)$ diejenige Function vertritt, die aus den Bestimmungen 20) durch Ausführung der Quadratur und Ersetzung von c_1 durch f_1 erscheint.

Aus 23) erhalten wir weiter

$$24) \qquad w_1 = \Gamma_1 . e^{\varphi_1(x,y)}.$$

Wir wenden uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung 18), indem wir für dieselbe, da Γ_1 von β unabhängig ist, schreiben können

$$25) \qquad \frac{\partial(\Gamma_1 w_2)}{\partial n_\beta} = e^{-\varphi_1(x,y)}\left[(G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right)\right].$$

Diese Differentialgleichung kann aber ganz so, wie die 17) integrirt werden, indem allein für lw_1 jetzt Γw_2, für r jetzt

$$e^{-\varphi_1(x,y)}\left[(G-r)(H-\varrho) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r\varrho\right)\right]$$

zu setzen ist.

Es muss daher auch das Integrationsergebniss ein ganz analoges sein. Wir schreiben für dasselbe sofort

$$26) \qquad \Gamma_1 w_2 = \varphi_2(x, y) + \Gamma,$$

wo nun ebenfalls $\varphi_2(x, y)$ eine vollständig bekannte Function ist, die sich durch eine blose Quadratur ergiebt, während Γ eine Function von γ allein (für die Punkte der gegebenen Niveaufläche) bezeichnet.

Weiter erhalten wir aus 24) und 26)

$$w = w_1 w_2 = e^{\varphi_1(x,y)}(\varphi_2(x, y) + \Gamma)$$

und, da $w = \dfrac{\partial lk}{\partial n_\gamma}$ war, schliesslich

$$27) \qquad \frac{\partial lk}{\partial n_\gamma} = e^{\varphi_1(x,y)}[\varphi_2(x, y) + \Gamma].$$

In ganz ähnlicher Weise, wie sich eben aus den Gleichungen 10), § 1 $\dfrac{\partial lk}{\partial n_\gamma}$ ergeben hat, finden wir jetzt auch aus der zweiten jener Gleichungen $\dfrac{\partial lk}{\partial n_\beta}$ in der Form

$$28) \qquad \frac{\partial lk}{\partial n_\beta} = e^{\psi_1(x,y)}[\psi_2(x, y) + B],$$

für die Punkte der gegebenen Niveaufläche, indem B eine reelle eindeutige und stetige, von Null und Unendlich verschiedene Function von β allein bezeichnet. Man findet dieses Resultat ebenfalls durch Integration der Differentialgleichung

$$b_2\, dx - a_2\, dy = 0$$

und übrigens durch blose Quadraturen.

Zu den in 27) und 28) enthaltenen Resultaten fügen wir noch besonders folgende Bemerkungen hinzu:

1. Die Functionen B und Γ können aus keiner von dem vorliegenden Problem direct ableitbaren Bedingung weiter bestimmt werden; es liegt hierin, wie sich weiter genauer zeigen wird, die factische Bestätigung der Bemerkung, die unmittelbar vor § 1 gemacht wurde.
2. Die Herleitung der Resultate in 27) und 28) setzt die Kenntniss der Integration zweier gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung voraus, die freilich noch nicht auf Quadraturen zurückgeführt ist.
3. Die in 27) und 28) enthaltenen Resultate erfüllen, weil sie aus den Gleichungen 10), § 1 hergeleitet wurden, die Bedingung

$$29)\qquad \frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}\right)-\varrho\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}.$$

Nachdem $\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}$ und $\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$ für die Punkte der gegebenen Niveaufläche gefunden sind, so kann man nun auch U und V für dieselben Punkte durch blose Quadraturen finden.

Die Gleichungen Pg. Cap. I, § 2, 11 und K) ergeben nämlich für U und V die Bedingungen

$$30)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial l U}{\partial n_\beta}=G-r-\frac{\partial l k}{\partial n_\beta},\quad \frac{\partial l U}{\partial n_\gamma}=\varrho,\\ &\frac{\partial l V}{\partial n_\beta}=r,\quad \frac{\partial l V}{\partial n_\gamma}=H-\varrho-\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}.\end{aligned}$$

Sowohl die ersten beiden, wie auch die letzten beiden dieser Gleichungen können aber ganz ähnlich integrirt werden, wie die Gleichungen 12), wenn noch die entsprechenden Integrabilitätsbedingungen, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(G-r-\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}\right)-\frac{\partial\varrho}{\partial n_\beta}=\left(G-r-\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}\right)\varrho-r\varrho,$$
$$\frac{\partial r}{\partial n_\beta}-\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(H-\varrho-\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}\right)=r\varrho-\left(H-\varrho-\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}\right)r$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen lassen sich aber auch schreiben in der Form

$$\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial H}{\partial n_\beta}+r\varrho-r(H-\varrho)-\left(\frac{\partial\varrho}{\partial n_\beta}+\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}\right)-\varrho\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}=\frac{\partial G}{\partial n_\gamma}+r\varrho-\varrho(G-r)-\left(\frac{\partial\varrho}{\partial n_\beta}+\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}\right).$$

Beachtet man aber, dass

$$\frac{\partial H}{\partial n_\beta}=G(H-\varrho),\quad \frac{\partial G}{\partial n_\gamma}=H(G-r),$$

so sind diese Integrabilitätsbedingungen gerade die Gleichungen 10), § 1, aus denen die Werthe von $\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}$ und $\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$ hergeleitet wurden, also erfüllt.

Wie aus den Gleichungen 12) M in 14) durch blose Quadraturen gefunden wurde, so finden wir also auch jetzt aus den Gleichungen 30)

31) $$U = A_1 e^{W_1}, \quad V = A_2 e^{W_2}$$

für die Punkte der gegebenen Niveaufläche, wenn A_1 und A_2 Integrationsconstanten bezeichnen, die im Allgemeinen auch Functionen von α sein können.

Nachdem somit M, U und V für die Punkte der gegebenen Niveaufläche ermittelt sind, so ergiebt sich noch aus Pg. Cap. I, § 2, 2 durch Substitution der gefundenen Werthe von M, U und V

$$A e^W = k\, A_1 e^{W_1} A_2 e^{W_2},$$

hieraus aber schliesslich

32) $$k = \frac{A}{A_1 A_2} e^{W - (W_1 + W_2)}$$

ebenfalls für die Punkte der gegebenen Niveaufläche.

Es hängt also die Lösung des ganzen vorliegenden Problems, abgesehen von dem in der zweiten Bemerkung Gesagten, allein noch ab von der Beschaffung der Function G.

§ 3.

Beispiel.

Lamé hat in seinen *Leçons sur les coord. curv.* gezeigt, dass die drei Mittelpunktsflächen zweiten Grades so beschaffen sind, dass man das sich orthogonal schneidende homofocale System derselben so umformen kann, dass, wenn sie zusammengefasst werden in den Formen $\alpha = Const.$, $\beta = Const.$, $\gamma = Const.$, man $\Delta_2(\beta) = \Delta_2(\gamma) = 0$ setzen kann. Wir werden aus dieser letzteren Bedingung allein die zugehörige Function G ermitteln und damit zur Lösung des Problems gelangen, soweit es in den vorangehenden Zeilen genauer besprochen worden ist.

Wir stellen jede der drei in Rede stehenden Flächen allgemein dar durch

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1, \quad a > b > c.$$

Wir schreiben als Gleichung der gegebenen Niveaufläche

$$f(x, y, z) = \frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{2} y^2 + \frac{c}{2} z^2 - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Wir erhalten hieraus für die Werthe A, B und C in Pg. Cap. II, § 1, wenn wir noch dem dortigen l das entgegengesetzte Vorzeichen geben und anstatt α f geschrieben denken,

1) $$A = a x (b + l)(c + l), \quad B = b y (c + l)(a + l), \quad C = c z (a + l)(b + l).$$

Da nun überhaupt sein muss

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

so finden wir hieraus durch Substitution der gehörigen Werthe

$$2)\quad a^2x^2(b+l)(c+l)+b^2y^2(c+l)(a+l)+c^2z^2(a+l)(b+l)=0.$$

Die Wurzeln dieser in l quadratischen Gleichung liegen so, dass, wenn wir sie mit l_1 und l_2 bezeichnen, ihre absoluten Werthe der Bedingung genügen

$$a\geqq l_1\geqq b\geqq l_2\geqq c.$$

Wir führen nun l_1 und l_2 als neue Coordinaten für die Punkte xyz der gegebenen Niveaufläche ein und haben zu diesem Zwecke

$$3)\quad \begin{gathered} ax^2+by^2+cz^2=1,\quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\frac{abc}{l_1l_2}, \\ a^2x^2(b+c)+b^2y^2(c+a)+c^2z^2(a+b)=-abc.\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}. \end{gathered}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn zur Abkürzung noch

$$4)\quad D=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b},$$

$$5)\quad \begin{gathered} a^2x^2=\frac{b-c}{D}\,\frac{(a+l_1)(a+l_2)}{l_1l_2}, \\ b^2y^2=\frac{c-a}{D}\,\frac{(b+l_1)(b+l_2)}{l_1l_2}, \\ c^2z^2=\frac{a-b}{D}\,\frac{(c+l_1)(c+l_2)}{l_1l_2}. \end{gathered}$$

Hiermit erhalten wir nun leicht für die Cosinus der Neigungswinkel der Normalen der gegebenen Niveaufläche im Punkte xyz gegen die Coordinatenaxen

$$6)\quad \begin{gathered} l=\sqrt{\frac{b-c}{abcD}(a+l_1)(a+l_2)}, \\ m=\sqrt{\frac{c-a}{abcD}(b+l_1)(b+l_2)}, \\ n=\sqrt{\frac{a-b}{abcD}(c+l_1)(c+l_2)}. \end{gathered}$$

Setzen wir in 1) für l entweder l_1 oder l_2 und gehen dadurch entweder die Werthe von A_1, B_1, C_1 oder von A_2, B_2, C_2 hervor, so ist weiter

$$A_1^2+B_1^2+C_1^2=N_1^2$$
$$=a^2x^2(b+l_1)^2(c+l_1)^2(a+l_1)^2+b^2y^2(c+l_1)^2(a+l_1)^2+c^2z^2(a+l_1)^2(b+l_1)^2,$$
$$A_2^2+B_2^2+C_2^2=N_2^2$$
$$=a^2x^2(b+l_2)^2(c+l_2)^2+b^2y^2(c+l_2)^2(a+l_2)^2+c^2z^2(a+l_2)^2(b+l_2)^2.$$

Führen wir auch hier mit Hilfe der Gleichungen 5) anstatt x, y, z die Variablen l_1 und l_2 ein, so entsteht

$$N_1^2=abc.\frac{l_2-l_1}{l_1l_2}(a+l_1)(b+l_1)(c+l_1),$$

$$N_2^2 = abc \cdot \frac{l_1 - l_2}{l_2 l_1} (a+l_2)(b+l_2)(c+l_2).$$

Für die Cosinus der Neigungswinkel der Normalen der beiden Orthogonalflächen im Punkte $x\,y\,z$ der gegebenen Niveaufläche erhalten wir also

$$\text{7)} \quad \begin{aligned} a_1 &= -\sqrt{\frac{b-c}{abcD}\,\frac{(a+l_2)(b+l_1)(c+l_1)}{l_2-l_1}},\\ b_1 &= -\sqrt{\frac{c-a}{abcD}\,\frac{(b+l_2)(c+l_1)(a+l_1)}{l_2-l_1}},\\ c_1 &= -\sqrt{\frac{a-b}{abcD}\,\frac{(c+l_2)(a+l_1)(b+l_1)}{l_2-l_1}}, \end{aligned}$$

$$\text{8)} \quad \begin{aligned} a_2 &= -\sqrt{\frac{b-c}{abcD}\,\frac{(a+l_1)(b+l_2)(c+l_2)}{l_1-l_2}},\\ b_2 &= -\sqrt{\frac{c-a}{abcD}\,\frac{(b+l_1)(c+l_2)(a+l_2)}{l_1-l_2}},\\ c_2 &= -\sqrt{\frac{a-b}{abcD}\,\frac{(c+l_1)(a+l_2)(b+l_2)}{l_1-l_2}}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun weiter die Derivirten von l_1 und l_2 nach ∂n_β und ∂n_γ herstellen. Hierzu benützen wir die Gleichungen 3), indem wir zunächst die Derivirten von $\frac{1}{l_1}$ und $\frac{1}{l_2}$ nach x, y und z daraus ableiten. Wir finden auf diese Weise

$$\text{9)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial l_1}{\partial x} = \frac{2ax}{bc}\,\frac{l_1^2 l_2}{l_2-l_1}(l_1+b+c), \quad \frac{\partial l_1}{\partial y} = \frac{2by}{ca}\,\frac{l_1^2 l_2}{l_2-l_1}(l_1+c+a),\\ &\frac{\partial l_1}{\partial z} = \frac{2cz}{ab}\,\frac{l_1^2 l_2}{l_2-l_1}(l_1+a+b),\\ &\frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{2ax}{bc}\,\frac{l_2^2 l_1}{l_1-l_2}(l_2+b+c), \quad \frac{\partial l_2}{\partial y} = \frac{2by}{ca}\,\frac{l_2^2 l_1}{l_1-l_2}(l_2+c+a),\\ &\frac{\partial l_2}{\partial z} = \frac{2cz}{ab}\,\frac{l_2^2 l_1}{l_1-l_2}(l_2+a+b). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} = -a_1\frac{\partial l_1}{\partial x} - b_1\frac{\partial l_1}{\partial y} - c_1\frac{\partial l_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} = \ldots,$$
$$\frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma} = -a_2\frac{\partial l_1}{\partial x} - b_2\frac{\partial l_1}{\partial y} - c_2\frac{\partial l_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = \ldots.$$

Setzt man die entsprechenden Werthe aus den Gleichungen 9) ein und benützt für die Zähler von a_1, b_1, ... noch die obigen aus 1) abzuleitenden Werthe, die also noch x, y und z enthalten, und eliminirt alsdann diese Variabeln mit Hilfe der Gleichung 5), so findet man

$$\text{10)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} = -2\frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{\frac{l_1 l_2}{l_2-l_1}(a+l_1)(b+l_1)(c+l_1)}, \quad \frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma} = 0,\\ &\frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} = 0, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = -2\frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{\frac{l_1 l_2}{l_1-l_2}(a+l_2)(b+l_2)(c+l_2)}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun noch die Krümmungen ϱ_1, ϱ_2, r und ϱ durch l_1 und l_2 darstellen.

Die Gleichungen 3) geben sofort

$$11) \qquad \varrho_1 = l_1 \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\sqrt{abc}}, \qquad \varrho_2 = l_2 \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\sqrt{abc}}.$$

Ferner ist

$$r = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} \right) = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta},$$

$$\varrho = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Wir finden also weiter

$$12) \qquad r = \tfrac{1}{2} \frac{l_2}{l_1} \frac{1}{l_2 - l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}, \quad \varrho = \tfrac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{1}{l_1 - l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun dazu über, die eigentlich gesuchten Werthe von G, H, M, U, V und k zu bestimmen, indem wir den in § 2 angegebenen Weg einschlagen, nur mit der Modification, dass wir jetzt l_1 und l_2 als Variable benützen anstatt der in § 2 benützten x und y.

Als diejenige Bedingung, aus der wir G zu ermitteln haben, nehmen wir an, dass $\Delta_2(\beta) = 0$ sein soll. Dann ergiebt sich aus der ersten der Relationen L)

$$\frac{\partial l k}{\partial n_\beta} = -2r.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach ∂n_α, indem wir beachten, dass lk von α unabhängig ist, dass also auch $\frac{\partial l k}{\partial n_\alpha} = 0$, so erhalten wir mit Hilfe von 3) und 7), § 1

$$-2r\varrho_1 = -2\varrho_2(r - G).$$

Hieraus folgt aber

$$13) \qquad G = r \cdot \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\partial l \varrho_2}{\partial n_\beta} = \frac{\partial l \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} = \frac{1}{2 l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}.$$

Die Function H bestimmen wir aus 9), § 1, indem wir im jetzigen Falle haben

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left(\frac{\partial l \sigma}{\partial n_\beta} \right) + r \frac{\partial l \sigma}{\partial n_\gamma} = \left(\tfrac{3}{4} \frac{1}{l_1 + l_2} - \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial l \sigma}{\partial n_\gamma} \frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma} = \tfrac{3}{2} \frac{1}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2 l_2} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial l \sigma}{\partial n_\beta} \frac{\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma} = \tfrac{3}{2} \frac{1}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2 l_1} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta}}{\sigma^2} = \tfrac{9}{4} \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Die rechte Seite der Gleichung 9), § 1 wird also im vorliegenden Falle

$$\tfrac{25}{4}\cdot\frac{1}{(l_1+l_2)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Weiter finden wir

$$G-\frac{\partial l\sigma}{\partial n_\beta}-\frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma}=-\tfrac{5}{2}\frac{1}{l_1+l_2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta},\quad \frac{\partial l\sigma}{\partial n_\gamma}+\frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma}=\tfrac{5}{2}\left(\frac{1}{l_1+l_2}+\frac{1}{2l_2}\right)\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Die Gleichung 9), § 1 wird also jetzt

$$\left(-\tfrac{5}{2}\frac{1}{l_1+l_2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\right)\left(H-\tfrac{5}{2}\left[\frac{1}{l_1+l_2}+\frac{1}{2l_2}\right]\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}\right)=\tfrac{25}{4}\frac{1}{(l_1+l_2)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma};$$

hieraus erhalten wir

14) $$H=\frac{1}{2l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Aus 13) und 14) folgt nun

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}=\frac{1}{2l_1}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta},\quad \frac{\partial lM}{\partial n_\gamma}=\frac{1}{2l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}$$

oder, da wir auch lM als Function von l_1 und l_2 zu betrachten haben,

$$\frac{\partial lM}{\partial l_1}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}+\frac{\partial lM}{\partial l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\beta}=\frac{1}{2l_1}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta},\quad \frac{\partial lM}{\partial l_1}\frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma}+\frac{\partial lM}{\partial l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}=\frac{1}{2l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Hieraus wird aber mit Hilfe der Gleichungen 10)

$$\frac{\partial lM}{\partial l_1}=\frac{1}{2l_1},\quad \frac{\partial lM}{\partial l_2}=\frac{1}{2l_2}.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

15) $$M=A\sqrt{l_1 l_2}=\frac{A\sqrt{abc}}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}},$$

wenn lA die Integrationsconstante bezeichnet.

Die Gleichungen 10), § 1 werden im vorliegenden Falle, da

$$(G-r)(H-\varrho)=-\frac{1}{4(l_2-l_1)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial r}{\partial n_\gamma}=-\tfrac{3}{4}\frac{1}{(l_2-l_1)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},\quad \frac{\partial\varrho}{\partial n_\beta}=-\tfrac{3}{4}\frac{1}{(l_1-l_2)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$r\varrho=-\tfrac{1}{4}\frac{1}{(l_2-l_1)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

16) $$\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}=\frac{1}{(l_2-l_1)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$
$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma}\left(\frac{\partial lk}{\partial n_\beta}\right)-\varrho\frac{\partial lk}{\partial n_\beta}=\frac{1}{(l_2-l_1)^2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Von diesen Gleichungen 16) haben wir blos die erste zu benützen, da wir bereits wissen, dass

$$\frac{\partial lk}{\partial n_\beta}=-2r.$$

Da wir nun aber auch $\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}$ als Function von l_1 und l_2 zu betrachten haben, so können wir mit Hilfe der Gleichungen 10) und der Relation C) die linke Seite der ersten der Gleichungen 16) weiter umformen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial}{\partial n_\beta}\left(\frac{\partial lk}{\partial l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}\right)-r\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}\frac{\partial lk}{\partial l_2}$$
$$=\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}\frac{\partial}{\partial l_1}\left(\frac{\partial lk}{\partial l_2}\right)\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}+\frac{\partial lk}{\partial l_2}r\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}-r\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}\frac{\partial lk}{\partial l_2}$$
$$=\frac{\partial^2 lk}{\partial l_1\partial l_2}\frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Die erste der Gleichungen 16) giebt daher

17) $$\frac{\partial^2 lk}{\partial l_1\partial l_2}=\frac{1}{(l_2-l_1)^2}.$$

Wir erhalten hieraus durch Integration

$$\frac{\partial lk}{\partial l_2}=\frac{1}{l_2-l_1}+L_2,$$

wenn L_2 eine Function von l_2 bezeichnet, die wir willkürlich annehmen können.

Wir wollen $L_2=-\frac{1}{l_2}$ setzen, so dass entsteht

$$\frac{\partial lk}{\partial l_2}=\frac{1}{l_2-l_1}-\frac{1}{l_2}=-\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{1}{l_1-l_2}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}$ und beachten, dass $\frac{\partial lk}{\partial l_2}\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}=\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}$ und die Gleichungen 12), so entsteht auch

18) $$\frac{\partial lk}{\partial n_\gamma}=-2\varrho.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den Relationen L), so ergiebt sich noch, dass auch $\Delta_2(\gamma)=0$.

Aus den Gleichungen 30), § 2 folgt weiter für den jetzigen Fall

19) $$\frac{\partial lU}{\partial n_\beta}=G+r,\quad \frac{\partial lU}{\partial n_\gamma}=\varrho,$$
$$\frac{\partial lV}{\partial n_\beta}=r,\quad \frac{\partial lV}{\partial n_\gamma}=H+\varrho.$$

Da auch lU und lV nur Functionen von l_1 und l_2 sein können, so folgt aus diesen Gleichungen 19) sofort weiter

20) $$\frac{\partial lU}{\partial l_1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{l_1}+l_2\frac{1}{l_1(l_2-l_1)}\right),\quad \frac{\partial lU}{\partial l_2}=\tfrac{1}{2}l_1\cdot\frac{1}{l_2(l_1-l_2)},$$
$$\frac{\partial lV}{\partial l_1}=\tfrac{1}{2}l_2\frac{1}{l_1(l_2-l_1)},\quad \frac{\partial lV}{\partial l_2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{l_2}+l_1\cdot\frac{1}{l_2(l_1-l_2)}\right).$$

Hieraus finden wir

21) $$U = A_1 \cdot \frac{l_1 \sqrt{l_2}}{\sqrt{l_2 - l_1}}, \quad V = A_2 \frac{l_2 \sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2 - l_1}},$$

wenn $l A_1$ und $l A_2$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Endlich ergiebt sich noch aus $M = k\,U.V$

$$A \sqrt{l_1 l_2} = k . A_1 A_2 . \frac{l_1 l_2 \sqrt{l_1 l_2}}{(l_2 - l_1)},$$

22) $$k = \frac{A}{A_1 A_2} . \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2}.$$

Hiermit sind die Werthe gewonnen, die nun, wie in Pg. gezeigt wurde, der Lösung des ganzen vorliegenden Problems zu Grunde gelegt werden müssen.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Eine neue Messungsmethode der Constanten optisch ein- und zweiaxiger Krystalle.

Ein vorzügliches Mittel, leicht und sicher die optischen Constanten flüssiger, weicher und fester Körper zu messen, bietet das bekannte Refractometer von Prof. Abbe in Jena dar. Das Princip des Instruments beruht auf der Benutzung der totalen Reflexion des Lichtes an der zu untersuchenden, zwischen den Spaltungsflächen eines Flintglasprismas eingeschlossenen dünnen Flüssigkeitsschicht. An der Grenze der totalen Reflexion, welche sich als sogenannte Auslöschungsgrenze markirt, gehen die Lichtstrahlen stets parallel den Begrenzungsflächen durch die Flüssigkeitsschicht und es wird somit stets die Geschwindigkeit der Lichtwellen oder Lichtstrahlen in dieser Richtung gemessen.

Ich benutzte zuerst das Instrument zur Messung der Brechungsindices sämmtlicher brechender Augenmedien und zwar nicht blos der flüssigen, sondern auch der festweichen Linsenschichten und Häute. Die Messungen ergaben für das normale menschliche Auge folgende Resultate:

Brechungsindex	des destillirten Wassers von 12,5° C.	1,3326,
"	der Hornhaut	1,3750,
"	des Kammerwassers	1,3351,
"	der vorderen Linsenkapsel	1,3750,
"	der Corticalschicht	1,3867,
"	der mittleren Schicht	1,4075,
"	der Kernsubstanz	1,4154,
"	der hinteren Linsenkapsel	1,3600,
"	des Glaskörpers	1,3348.

Hiernach lässt sich die Curve der Brechungsindices innerhalb der geschichteten Krystalllinse nahezu durch die parabolische Gleichung

$$n = 1{,}4150 - 0{,}0400 \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

ausdrücken, wo b die halbe Axe der Linse in der Accomodation für die Nähe, y den Abstand irgend einer Schicht vom Kerncentrum bezeichnet.*

---

* Man vergl. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, §§ 31—37. *Leipzig 1877.*

Später versuchte ich, das genannte Refractometer zur Messung optischer Constanten sehr dünner fester Körper anzuwenden. Dies gelang wegen der dazwischentretenden Luftschichten nur dadurch, dass ein Flüssigkeit von beliebigem grösserem Brechungsvermögen eingeschaltet wurde. Nimmt man nämlich eine Flüssigkeit von geringerem Brechungsvermögen als dem der zu untersuchenden Substanz, so erhält man n den Brechungsindex der Flüssigkeit. In dem ersten Falle hat das absolute Brechungsvermögen auf die Messung keinen Einfluss. Um mich hievon zu vergewissern, wurden unter meiner Leitung von Herrn Stu Frank zunächst die Indices von geeigneten Flüssigkeiten von verschiedenem Brechungsvermögen gemessen. Es ergaben sich folgende Resultate:

	n_D:
Destillirtes Wasser .	1,3326,
Salmiakgeist . . .	1,3357,
Negativlack	1,4003,
Petroleum	1,4392,
Glycerin	1,4452,
Styrol	1,5407,
Nitrobenzol	1,5532,
Cassiaöl	1,5925,
Schwefelkohlenstoff.	1,6265,
Bromphosphor PBr_3	1,6950.

Das Brechungsvermögen des PBr_3 konnte nicht mit Sicherheit bestimmt werden, da sich dasselbe an der Luft rasch unter Bildung von BrH zersetzte und sich schon etwa nach 20 Secunden ein Zersetzungsproduct von dem Brechungsindex 1,4770 bildete. Die Indices der übrigen Substanzen sind bis auf einige Einheiten der vierten Decimale genau.

Es wurde nun zur Prüfung einer bestimmten Sorte gläserner Deckplättchen für mikroskopische Präparate mit Styrol, Nitrobenzol, Cassiaöl und Schwefelkohlenstoff in das Refractometer gebracht. Als Grenzwerthe einer Reihe von Messungen ergaben sich folgende Resultate:

n_D:		
1,5216 — 1,5221	durch	Styrol,
1,5218 — 1,5219	„	Nitrobenzol,
1,5210 — 1,5215	„	Cassiaöl,
1,5203 — 1,5214	„	Schwefelkohlenstoff,
1,4439	„	Glycerin.

Durch diese Beobachtungen ist also die Annahme vollkommen bestätigt, die kleinen Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenze der Messungen. Der Versuch, diese Methode auch auf doppeltbrechende Substanzen anzuwenden, gelang vollkommen. Die Methode bietet überdies den Vortheil, dass man mit Hilfe eines Nicol oder eines Turmalin-

krystalls sofort den extraordinären Lichtstrahl von dem ordinären zu unterscheiden im Stande ist. Stellt man nämlich die Axe des Turmalins senkrecht zur Auslöschungsgrenze oder, was dasselbe ist, parallel zur Brechungsebene der Strahlen, so erhält man stets den ordinären, in der darauf senkrechten Stellung stets den extraordinären Strahl. Da man Gyps und Glimmer in beliebig dünnen Platten sich verschaffen kann, so wurden zunächst an diesen die Wellenflächen optisch zweiaxiger Medien gemessen.

1. Gyps (klinorhombisch). Derselbe ist parallel der Ebene der optischen Axe, also in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität vollkommen spaltbar, ziemlich deutlich und zwar faserig parallel den Abstumpfungsflächen der vorderen und hinteren stumpfen Säulenkanten, sowie den hinteren schiefen Endflächen, so dass man rhomboidische Tafeln erhält, deren schmale Seiten oder Flächen der dritten muscheligen Structur einen Winkel von 65° 36′ mit den Flächen der zweiten faserigen Structur bilden. Ausserdem bilden die vorderen und hinteren Endzuschärfungskanten einen Winkel von 118° 26′.

Es wurde nun die Fläche der zweiten Structur, also die Hauptaxe des Krystalls in die Refractionsebene der Prismen des Refractometers gelegt, diese Lage mit 0° bezeichnet und wurden dann bei successiver Drehung der Platte folgende Indices des extraordinären Strahles mit Hilfe von Cassiaöl gemessen:

	n_D:	$1:n_D=r$:
0°	1,5201	0,6578,
24° 24′	1,5224	0,6569,
57° 12′	1,5283	0,6543,
90°	1,5283	0,6543,
114° 24′	1,5258	0,6554,
147° 12′	1,5207	0,6576,
180°	1,5200	0,6579,
204° 24′	1,5227	0,6567,
237° 12′	1,5278	0,6545,
270°	1,5287	0,6542,
294° 24′	1,5254	0,6555,
327° 12′	1,5204	0,6577,
360°	1,5202	0,6578.

Der Brechungsindex des ordinären Strahles war constant und zwar im Durchschnitt von 16 Messungen gleich 1,52184. Durch die reciproken Werthe r der Indices n_e sind nun die Radii vectores der Wellenfläche bestimmt. Die beiden Maxima und Minima liegen ungefähr 14° (Neumann) von den rechtwinkligen Axen entfernt und bestimmen die Hauptaxe der elliptischen Welle. Bezeichnet man den kleinsten Brechungsindex mit α, den mittleren mit β, den grössten mit γ, so ist für Strahlen mittlerer Brechbarkeit, genauer für D:

$$\alpha = 1{,}5195, \quad \beta = 1{,}5208, \quad \gamma = 1{,}5283.$$

Die grösste Axe der [illegible] Welle weicht am oberen Ende des Krystallblättchens etwa um 14° nach vorn von der krystallographischen Hauptaxe ab; sie ist die Axe der kleinsten Elasticität. Die Axe der grössten Elasticität steht senkrecht zur vollkommensten Spaltungsebene, die ist zugleich die Axe der Symmetrie.

Aus den drei Hauptbrechungsexponenten α, β, γ berechnet sich nun der Winkel, welchen die optischen Axen mit der Axe der kleinsten Elasticität einschliessen, nach der Formel

$$\cos^2 \zeta = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

wo $a = 1:\alpha$, $b = 1:\beta$, $c = 1:\gamma$ zu setzen ist. Demnach ist

$$\cos^2 \zeta = \frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - 1} = [illegible],$$

woraus man erhält $\zeta = 30^\circ 47' 30''$. Die kleinste Axe der Elasticität ist also hier die erste Mittellinie, der Gyps optisch-positiv und der Winkel der optischen Axen gleich 61° 35′. Die eine der beiden optischen Axen steht nahezu senkrecht zur zweiten Structurfläche mit einer Neigung von 82° 23′, die zweite optische Axe nahezu senkrecht zur dritten Structurfläche mit einer Neigung von ebenfalls 82° 23′. Der Winkel der optischen Axen bildet demnach mit dem Winkel der vorderen und hinteren Endzuschärfungskante genau einen Winkel von 180° und die kleinste Elasticitätsaxe halbirt jenen Winkel nahezu.

Der Winkel der secundären optischen Axen oder der optischen Axen der Strahlen mit der Axe der kleinsten Elasticität ist gemäss der Gleichung

$$\cos^2 \zeta = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

oder

$$\cos^2 \zeta = \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2}{1 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2} = [illegible].$$

Daraus findet man $\zeta = 30^\circ 41' 10''$ und den Winkel 2ζ, den die beiden secundären Axen mit einander bilden, gleich 61° 22′ 20″. Aus dem Umstande, dass der mittlere Brechungscoefficient β constant ist, folgt noch, die Ebene der optischen Axen mit der Symmetrieebene coincidirt.
...ström ist $\alpha = 1{,}52056$, $\beta = 1{,}52267$, $\gamma = 1{,}52975$, woraus folgt
...′ 50″. (Pogg. Ann. Bd. 86, S. 206—234.)

2. Glimmer (rhombisch). Seine Spaltungsebene ist zur Ebene der optischen Axen senkrecht, parallel dem durch die Axe der mittelsten und kleinsten Elasticität gelegten Hauptschnitte der Elasticitätsfläche.

Es wurde zunächst an einem Glimmerblättchen im Polarisationsmikroskop die Lage der Ebene der optischen Axen bestimmt und dasselbe so in das Refractometer gebracht, dass die Ebene der optischen Axe mit der Refractionsebene coincidirte, und bei fortgesetzter Drehung des Blättchens der Index bestimmt. Für den ordinären Strahl ergab sich im Durchschnitt aus 22 Messungen der constante Werth $n_D = 1{,}5692$, ferner für den extraordinären Strahl bei einer Neigung der optischen Axenebene

	n_e:	$1:n_e = r$:
von 0^0	1,6049	0,6231,
„ 45^0	1,6070	0,6223,
„ 90^0	1,6117	0,62045;
	n_0:	
	1,5692	0,63725.

Durch diese Constanten ist die Wellenfläche in dem Glimmerblättchen vollkommen bestimmt. Für den Strahl D ist

$$\alpha = 1{,}5692, \quad \beta = 1{,}6049, \quad \gamma = 1{,}6117.$$

Daraus berechnet sich $z = 81^0\,6'10''$; der Krystall ist also optisch negativ, die Axe der grössten Elasticität die erste Mittellinie und der spitze Winkel der optischen Axen gleich $17^0\,47'40''$, der Winkel der secundären optischen Axen gleich $18^0\,37'20''$.

Rostock, 10. Juli 1877. Prof. Ludw. Matthiessen.

VIII. Bemerkungen über das vollständige Viereck.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 12 und 13.)

Es hat dem Unterzeichneten immer scheinen wollen, als ob der Gauss'sche Satz, dass die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks in einer Geraden liegen, eine sehr isolirte Stellung habe und vielleicht nur ein Bruchstück aus einem Complexe zusammengehöriger Sätze bilde. In der That bestätigt sich diese Vermuthung, wenn man den Gauss'schen Satz nicht als eine Eigenschaft des Vierecks ansieht, sondern als Eigenschaft eines Dreiecks ABC, dessen Ecken mit einem beliebigen Punkte R verbunden sind, der ebensowohl ausserhalb, als innerhalb des Dreiecks liegen kann (Tafel IV, Fig. 12 und 13). Sind nämlich U, V, W die Punkte, in welchen die Verbindungslinien AR, BR, CR den Gegenseiten BC, CA, AB begegnen, so liegen nach Gauss in einer Geraden

die Mittelpunkte von BC, AR, VW,

und hier lehrt eine blosse cyklische Buchstabenvertauschung, dass dieser Satz das Drittheil eines umfassenderen Satzes ausmacht, wornach ferner

die Mittelpunkte von CA, BR, WU
und „ „ „ AB, CR, UV

in geraden Linien liegen müssen. Diese drei Geraden verbinden die Mitten der Gegenseiten und der Diagonalen des einfachen Vierecks $CABR$ und schneiden sich daher in einem Punkte O.

Dieser Satz lässt sich wieder durch perspectivische Projection verallgemeinern. Beachtet man nämlich, dass Anfang, Mitte und Ende einer Strecke nebst dem unendlich entfernten Punkte derselben Geraden ein System harmonischer Punkte bilden und dass die Projection einer harmonisch getheilten Geraden wiederum harmonisch getheilt ist, so erhält man folgenden Satz, worin der Durchschnitt zweier Geraden PQ und s mit $(PQ)_s$ bezeichnet ist: Die in der vorigen Figur enthaltenen Geraden [illegible] BR, CR, VW, WU, UV seien bis zu ihren Durchschnitten mit einer beliebig gewählten Geraden s verlängert, dann liegen jedesmal in einer Geraden die vierten harmonischen Punkte

zu [illegible];
[illegible];
[illegible];

diese drei Geraden schneiden sich in einem Punkte.

Die Figur enthält [illegible] den festen Punkten A, B, C einen beliebigen Punkt R und eine willkürliche Gerade s; es liegt daher nahe, den variablen Gebilden irgendwelche Bewegungen zu ertheilen, z. B. bei festgehaltenem s den Punkt R auf einem Kegelschnitte herumzuführen, [illegible] einen Kegelschnitt umhüllen zu lassen. [illegible] bezeichneten Geraden und ihr [illegible] wohl eine nähere Untersuchung.

[illegible] der reciproke Satz auf- [illegible] Geraden p und q mit (p, q) und [illegible] und einem andern Punkte S mit [illegible] Satz lautet: Die Seiten [illegible] verlängert, von einer be- [illegible] geschnitten und [illegible] wird nun noch [illegible] so schneiden sich jedesmal in

Hier wiederholt sich die frühere Bemerkung, dass zwei willkürliche Gebilde r und S vorhanden sind, deren Bewegungen gewisse, noch zu untersuchende Bewegungen der drei vorigen Punkte und der sie enthaltenden Geraden hervorrufen werden.

Lässt man den Punkt S ins Unendliche wegrücken, so gelangt man zu dem Correlate des Gauss'schen Satzes, welches sich von dem vorigen Satze durch den Parallelismus aller nach S gezogenen Geraden unterscheidet. Hierbei möge jedoch eine Besonderheit erwähnt sein, welche ihren Grund darin hat, dass es nur eine unendlich-ferne Gerade, aber beliebig viele unendlich-ferne Punkte giebt. Das ursprüngliche Gauss'sche Theorem enthält nur eine willkürliche Grösse, nämlich den Punkt R, in dem Correlate bleibt ausser der Transversale r noch die Richtung der Parallelen nach dem unendlich entfernten Punkte S willkürlich; man kann demnach r festhalten und die Richtung der Parallelen stetig ändern, woraus dann specielle Bewegungen der vorkommenden drei Punkte und der sie enthaltenden Geraden hervorgehen werden.

Dem Unterzeichneten fehlt in seiner jetzigen Stellung die Zeit zu ausführlicheren mathematischen Untersuchungen, er theilt daher das Vorige als eine Anregung mit, die vielleicht einem Geometer Anlass zu weiterer Verfolgung der Sache giebt.

SCHLÖMILCH.

IX. Ueber doppelt-centrische Vierecke.

Diejenigen Vierecke, welche einem Kreise umschrieben und zugleich einem andern Kreise eingeschrieben sind, scheinen bisher noch wenig Beachtung gefunden zu haben; dass sie aber eine solche verdienen, mögen die folgenden Aufgaben und Lehrsätze zeigen, die ich hier zur Anregung mittheile.

I. Von einem Kreise sind drei Peripheriepunkte A, B, C gegeben; man sucht einen vierten Peripheriepunkt von der Beschaffenheit, dass das entstehende Sehnenviereck zugleich ein Tangentenviereck ist.

Mit Uebergehung der leicht zu findenden Lösung dieser Aufgabe sei Folgendes bemerkt. Je nachdem BC oder CA oder AB als Diagonale des gesuchten Vierecks betrachtet wird, entstehen drei verschiedene doppelt-centrische Vierecke, welche ABA_1C, BCB_1A, CAC_1B heissen mögen; der umschriebene Kreis ist allen gemeinsam, die eingeschriebenen Kreise dagegen sind verschieden. Man kann daher fragen, wie die Mittelpunkte dieser Kreise gegen den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und wie sie gegen einander liegen, also z. B. unter welchen Umständen sie die Spitzen eines gleichseitigen Dreiecks bilden u. dergl.

Da ferner $AB_1CA_1BC_1$ ein Sehnensechseck ist, so liegen die Durchschnitte A_2, B_2, C_2 der Gegenseiten BC_1 und B_1C, CA_1 und C_1A, AB_1

und $A_1 B$ in einer Geraden $A_2 B_2 C_2$; diese möge als Polare de Sechseck beschriebenen Kreises angesehen und der entsprech mit O bezeichnet werden. Durch diesen Punkt gehen auch eckdiagonalen AA_1, BB_1, CC_1, und daher lässt sich in das Se Kegelschnitt beschreiben, welcher gleichfalls O zum Pol für Polare hat. Der hiermit bestimmte Kegelschnitt wäre nun untersuchen.

II. Von einem Kreise sind drei Tangenten gegeben, sammen ein umschriebenes Dreieck ABC mit den Seiten $BC=$ $AB=c$ bilden; man sucht eine vierte Tangente von der Bes dass das entstehende Tangentenviereck zugleich ein Sehnenv

Die Aufgabe hat drei Auflösungen, je nachdem man a o c als eine Seite des gesuchten Vierecks betrachtet; im ersten die Gegenseite von a der Geraden b in A_b und der Geraden gegnen also $A_b A_c$ heissen; für die übrigen Fälle gelte eine zeichnung. Es entstehen nun die drei doppelt-centrische BCA_bA_c, CAB_cB_a, ABC_aC_b, welche denselben eingeschrieb aber verschiedene umschriebene Kreise besitzen; die gegens der Mittelpunkte dieser vier Kreise wäre näher zu untersuch

Da $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ ein Tangentensechseck ist, so schnei Diagonalen A_bB_a, B_cC_b, C_aA_c in einem Punkte O, welchem, eingeschriebenen Kreises betrachtet, die Polare p entspre Auf dieser liegen auch die Durchschnitte der Gegenseiten A_bA_c, C_bA_b und B_cB_a, A_cB_c und C_aC_b, mithin lässt sich um d ein Kegelschnitt beschreiben, welcher gleichfalls p zur Polar Pole hat.

Sc

X. Ueber einen das Sehnenfünfeck betreffenden S

(Hierzu Taf. IV, Fig. 14.)

Wählt man auf zwei sich in B schneidenden G beiden beliebigen Strecken BA und BC, und er den bezüglichen Mitten, m_0 und m_1, dieser Streck den Lothe DE und DF, von denen ersteres die Ge E und letzteres die Gerade AB in F schneidet, die fünf Punkte D, A, E, F und C auf dem Umf Kreises.

Da sich die drei Seiten eines Dreiecks ABC dreimal zu j auffassen lassen, so liefert die Construction auch drei versch — deren Mittelpunkte M_0, M_1 und M_2 heissen mögen — durch D, als den Mittelpunkt des ABC umbeschriebenen K und deren jeder eine Seite des Dreiecks als Sehne enthält.

Diese drei Kreise stehen in ausgezeichneter Weise in Beziehung zu demjenigen Dreieck PQR, dessen Seiten in bezüglich A, B und C den um ABC beschriebenen Kreis berühren. Zunächst sieht man leicht, dass Dreieck $M_0 M_1 M_2 \sim PQR$ und zwar, dass die ähnlichen Seiten das Verhältniss $1:2$ zu einander haben.

Man wird indess bald ferner bemerken, dass ausser dem Dreieck ABC — als in dem Kreise liegend, welcher Dreieck PQR von aussen berührt — noch drei andere Dreiecke in ähnlicher Beziehung zu PQR stehen, welche nämlich in analoger Weise denjenigen Kreisen einbeschrieben sind, welche die Seiten des Dreiecks PQR ausserdem noch berühren.

Erst nachdem man diese alle gefunden hat — welches indess ziemlich leicht ist — und zu jedem die erstgenannten drei Kreise M_0, M_1 und M_2 auf die dabei angegebene Art construirt hat, erhält man eine vollständige Figur, aus welcher sich sehr mannigfaltige Sätze — der elementaren Geometrie angehörend — ableiten und viele schöne Constructionsaufgaben für Schüler, die das Gebiet der Elemente einigermassen beherrschen, aufstellen lassen.

Da die Ausführung der vollständigen Figur sich nach den gegebenen Daten ziemlich einfach gestaltet, so beschränke ich mich auf diese Mittheilungen. Gern möchte ich indess, dass einer der verehrten Mitarbeiter dieses Journals — da mir leider die Zeit sehr gebricht — einmal eine vollständigere Bearbeitung dieses Gegenstandes lieferte, als wozu ich heute im Stande bin.

Elsfleth. W. H. Preuss.

XI. Ueber das dem Cartesischen reciproke Coordinatensystem.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 15 und 16.)

In Bd. XXI dieser Zeitschrift (S. 278 flgg.) theilt Herr Schwering ein Liniencoordinatensystem mit, welches den Zweck hat, zu den metrischen Eigenschaften der Curven einen ebenso bequemen Zugang zu eröffnen, wie das Cartesische Punktcoordinatensystem. Theoretisch betrachtet, kann dieser Aufgabe nur ein Coordinatensystem genügen, welches dem Cartesischen streng reciprok ist, so zwar, dass Punkt und Linie in beiden Systemen sich überall gegenseitig entsprechen. Aus der folgenden Zusammenstellung geht nun hervor, dass das von Herrn Schwering aufgestellte System in der That dieser Forderung vollkommen genügt, also das dem Cartesischen reciproke System ist.

Cartesische Punktcoordin. (Fig. 15.)

1. Das System besteht aus zwei Geraden (x, y), die durch einen Punkt (O) gehen.
2. Zwei auf den Axen x und y liegende Punkte A und B (die unendlich fernen Punkte) liegen auf der unendlich fernen Geraden.
3. Um die Coordinaten eines Punktes P zu finden, verbindet man diesen Punkt mit den beiden unendlich fernen Punkten A und B (d. h. zieht durch P Parallelen zu den Axen) durch die Linien x_1 und y_1.

Schwering'sche Liniencoordin. (Fig. 16.)

1. Das System besteht aus zwei Punkten (X, Y), die durch eine Gerade (o) verbunden sind.
2. Zwei durch die Anfangspunkte X und Y gehende Geraden a und b (die parallelen Axen) schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte.
3. Um die Coordinaten einer Geraden p zu finden, bestimmt man die Schnittpunkte X_1 und Y_1 dieser Geraden mit den Parallelen a und b.

Diese Reciprocität der Ausdehnungsgebilde (Punkt und Gerade) wird vervollständigt durch diejenige der Zahlgrössen (Entfernungen). Es entsprechen sich nämlich:

4. die Coordinaten des Punktes P, d. h. die Abstände der Geraden x und x_1, sowie y und y_1;
5. der Abstand der unendlich fernen Punkte A und B, d. h. der Winkel der Geraden x und y.

4. die Coordinaten der Geraden p, d. h. die Abstände der Punkte X und X_1, sowie Y und Y_1;
5. der Abstand der Geraden a und b, d. h. der Abstand der Punkte X und Y.

Zu Nr. 5 ist zu bemerken, dass die unendlich fernen Punkte A und B gleichbedeutend sind mit Strecken auf den zugehörigen Geraden (vergl. mein „System der Raumlehre" Th. II, Nr. 2 und 3), dass also der Abstand zweier unendlich fernen Punkte durch den Winkel dieser Strecken oder den der zugehörigen Geraden gemessen wird.

Waren, April 1877. V. Schlegel.

IX.

Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes.

Von

H. A. Lorentz.

Dritte Mittheilung.

§ 1. Nach der elektromagnetischen Lichttheorie, deren Anwendung auf isolirende Körper ich früher besprochen habe,* müssen die Metalle, ihrem Leitungsvermögen zufolge, eigenthümliche optische Eigenschaften besitzen. Zu untersuchen, ob auch in dieser Hinsicht die Theorie mit der Erfahrung übereinstimme, ist der Zweck der gegenwärtigen Mittheilung.

Um die Bewegungsgleichungen der Elektricität für leitende Medien aufzustellen, haben wir zunächst den Leitungsstrom zu betrachten, der in denselben unter dem Einflusse einer elektromotorischen Kraft geweckt wird und dessen Intensität, so weit unsere Erfahrung reicht, durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt wird. Nehmen wir vorläufig die unbeschränkte Giltigkeit dieses Gesetzes an und beschränken wir uns auf isotrope Medien, so haben wir für die Componenten des Leitungsstromes zu setzen

$$1)\qquad u_1=\frac{X}{\varkappa},\quad v_1=\frac{Y}{\varkappa},\quad w_1=\frac{Z}{\varkappa},$$

wo X, Y, Z, wie früher, die Componenten der elektromotorischen Kraft vorstellen und mit $\varkappa$ der Widerstand des Mediums bezeichnet ist. Letztere Grösse lässt sich durch Messungen bestimmen; nur ist dabei zu beachten, dass man, wenn, wie wir früher annahmen, die Luft die Fähigkeit der dielektrischen Polarisation besitzt, durch Messungen in der Luft nicht den wahren Werth von $\varkappa$ erhält. Es ist vielmehr, wenn $\varkappa'$ den gemessenen Werth vorstellt, der wahre Werth

$$2)\qquad \varkappa=\frac{\varkappa'}{1+4\pi\varepsilon_0}.$$

---

* Diese Zeitschrift Bd. XXII, S. 1 und 205.

Ausser der erwähnten Wirkung einer elektromotorischen Kraft ist es aber nicht unwahrscheinlich, dass auch in leitenden Medien durch eine solche Kraft eine Polarisation der Theilchen hervorgerufen wird, und wir wollen annehmen, dass diese den nämlichen Gesetzen folge, wie die in dielektrischen Körpern geweckte Polarisation. Sind demnach, wie in der ersten Mittheilung, ξ, η, ζ die Componenten dieser Polarisation, so setzen wir auch für einen Leiter

3) $$\xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z$$

oder nach 1)

4) $$\xi = \varepsilon \varkappa u_1, \quad \eta = \varepsilon \varkappa v_1, \quad \zeta = \varepsilon \varkappa w_1.$$

Die Aenderung dieser Polarisation bildet nun wieder einen (dem dielektrischen analogen) Strom mit den Componenten $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ oder $\varepsilon \varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\varepsilon \varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t}$, $\varepsilon \varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t}$. Für den Gesammtstrom, dessen Componenten wir in der ersten Mittheilung mit u, v, w bezeichneten, haben wir somit

5) $$u = u_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad v = v_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad w = w_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t}.$$

§ 2. Es bleiben nun die Gleichungen 28) und 29) und ebenso auch I) und II) der ersten Mittheilung ungeändert bestehen. Beachten wir, dass das Medium isotrop ist, und setzen wir für ξ, η, ζ die Werthe 4), so werden die letztgenannten Gleichungen

a) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned}\right.$$

b) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{1}{\varkappa} \Delta \varphi + \frac{A^2}{\varkappa} k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Bei der Ableitung der Gleichungen III) haben wir hier statt $u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ die Werthe 5) zu setzen; wir erhalten dadurch

c) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi\varepsilon\varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t} - 4\pi u_1\right], \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi\varepsilon\varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t} - 4\pi v_1\right], \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi\varepsilon\varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t} - 4\pi w_1\right]. \end{aligned}\right.$$

Auch die Gleichungen IV) und 23) der ersten Mittheilung bleiben *ungeändert; eliminirt* man aus ihnen wieder χ, so ergiebt sich

d) $$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Schliesslich ist diesen Relationen noch die Gleichung 7) der erwähnten Mittheilung hinzuzufügen. Benützt man dabei die Werthe 5) und setzt man zur Abkürzung $\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=P$, so wird

e) $$P+\varepsilon\varkappa\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varDelta\varphi).$$

§ 3. Um zunächst zu untersuchen, wie sich in einem unbegrenzten leitenden Medium transversale elektrische Schwingungen mit ebenen Wellen ausbreiten können, gehen wir aus von den symbolischen Ausdrücken*

6) $$[u_1]=0,\quad [v_1]=a\,e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-xR+\mathrm{p})},\quad [w_1]=0,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Fortpflanzungsrichtung der x-, die Schwingungsrichtung aber der y-Axe parallel läuft. Da nun $P=0$ ist, wird den Gleichungen b) und e) genügt, wenn man auch $\varphi=0$ nimmt. Ebenso werden die Formeln a) befriedigt durch

$$[L]=0,\quad [M]=0,\quad [N]=-\frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)}\,a\,e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-xR+\mathrm{p})},$$

welche Ausdrücke auch der Relation d) Genüge leisten.

Bringt man schliesslich diese Werthe in c) über, so geben die erste und dritte dieser Gleichungen $0=0$; die zweite aber liefert die Bedingung

7) $$R^2=4\pi\varepsilon A^2(1+4\pi\vartheta)+i.\frac{2T}{\varkappa}A^2(1+4\pi\vartheta).$$

Es ist also R eine complexe Grösse. Setzt man dieselbe $=q+ri$, so können q und r aus den Constanten des Mediums und der Schwingungsdauer bestimmt werden und wir gelangen zu folgender particulärer Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$[v_1]=a\,e^{-\frac{2\pi}{T}rx-i\frac{2\pi}{T}(t-qx+\mathrm{p})},$$
$$[N]=-(q+ri)\frac{\varkappa}{A(1+4\pi\vartheta)}\,a\,e^{-\frac{2\pi}{T}rx-i\frac{2\pi}{T}(t-qx+\mathrm{p})}.$$

Nimmt man blos den reellen Theil, so findet man für die wirkliche Bewegung

$$v_1=a\,e^{-\frac{2\pi}{T}rx}\cos\frac{2\pi}{T}(t-qx+\mathrm{p}).$$

§ 4. Es erhellt aus diesem Ausdrucke, dass bei der Fortpflanzung der elektrischen Schwingungen im leitenden Medium die Amplitude in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner, dass also das Licht absorbirt

* Vergl. die zweite *Mittheilung*, § 2.

wird. Dies war vorherzusehen, da, wie man weiss, in einem Leiter die Energie der elektrischen Bewegungen immer theilweise in Wärme umgesetzt wird.

Wirklich sind alle metallischen Leiter sehr wenig durchsichtig, und sind die meisten Körper, welche das Licht ungeschwächt durchlassen, Isolatoren. Eine Ausnahme bilden die Elektrolyte, deren viele fast vollkommen durchsichtig sind, und welche jedenfalls viel mehr Licht durchlassen, als es nach obigen Gleichungen der Fall sein müsste. Auch für die Metalle scheint dies zu gelten; wenigstens hat Maxwell, der zuerst auf den Zusammenhang zwischen Leitungsfähigkeit und Undurchsichtigkeit aufmerksam machte, die Durchsichtigkeit eines dünnen Goldblättchens viel grösser gefunden, als man es nach der Theorie erwarten dürfte.*

Ohne Zweifel liegt der Grund dieser Abweichungen in der Mangelhaftigkeit unserer Anschauungen über das Wesen des elektrischen Stromes. Nur wenn die Wissenschaft in dieser Beziehung viel weiter fortgeschritten ist, darf man auf eine völlig befriedigende Uebereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen hoffen. Indess lässt sich wenigstens ein Umstand angeben, der vielleicht als die Ursache der erwähnten Abweichungen zu betrachten ist.

Das Ohm'sche Gesetz, dessen allgemeine Giltigkeit wir oben voraussetzten, ist nur für stationäre Ströme mit voller Gewissheit bewiesen. Für veränderliche Ströme aber ist es sehr gut möglich, dass dieses Gesetz einer Modification bedarf, wie dies denn auch bereits von Weber, Kirchhoff und Lorberg angenommen worden ist.

Es ist nämlich nicht unwahrscheinlich, dass bei dem Auftreten einer elektromotorischen Kraft der elektrische Strom nicht unmittelbar entsteht mit der vollen, durch das Ohm'sche Gesetz bedingten Intensität, sondern eine gewisse Zeit braucht, um bis zu dieser Intensität anzuschwellen.** Diese Zeit mag sehr kurz sein, so dass für unsere Beobachtungsmittel die Intensität augenblicklich ihren grössten Werth zu erreichen scheint; dennoch ist es möglich, dass bei raschen periodischen Aenderungen der elektromotorischen Kraft, wie bei den Lichterscheinungen, der erwähnte Zeitraum nicht mehr verschwindet gegen die Zeit, während welcher diese Kraft in der nämlichen Richtung wirkt. Dies wird zur Folge haben, dass die Stromintensität in jedem Augenblick kleiner ist, als sie nach dem Ohm'schen Gesetze sein müsste; die Bewegung wird also etwa so vor sich gehen, als wäre der Widerstand für rasch oscillirende Ströme grösser als für stationäre. Dann muss aber, wie man

* *Maxwell, Electricity and Magnetism,* §§ 798—800.

** Dieses Anschwellen ist wohl zu unterscheiden von der beobachteten Erscheinung, dass beim Schliessen einer galvanischen Kette in einem Punkte des Schliessungsbogens die elektromotorische Kraft und dadurch der Strom eine [illegible]*raucht, um in voller* Stärke aufzutreten.

leicht findet, auch die Absorption geringer sein, als wenn das Ohm'sche Gesetz allgemein giltig wäre.

Natürlich könnte dieser Gegenstand nur dann in völlig befriedigender Weise behandelt werden, wenn man mehr über das eigentliche Wesen des elektrischen Stromes wüsste. Indessen hat man aus der Vorstellung, dass bei dieser Erscheinung ein Stoff sich in Strömung befinde, dessen Bewegung durch einen der Reibung ähnlichen Widerstand gehemmt wird, Gleichungen abgeleitet, welche auch die Abweichung vom Ohm'schen Gesetz wiedergeben. Es sind dann nämlich die Formeln 1) umzugestalten in folgende:*

$$8)\qquad X = \varkappa u_1 + g\frac{\partial u_1}{\partial t},\quad Y = \varkappa v_1 + g\frac{\partial v_1}{\partial t},\quad Z = \varkappa w_1 + g\frac{\partial w_1}{\partial t},$$

wo g ein Coefficient ist, der mit der Masse des bewegten Stoffes zusammenhängt. Je kleiner diese Masse ist, um so kleiner wird auch g, um so geringer werden folglich auch die erwähnten Abweichungen.

Allerdings muss bei den Elektrolyten g einen merklichen Werth haben, da sich hier bei einem elektrischen Strome auch die gewöhnliche Materie mit bewegt. Es ist möglich, dass hierdurch bei diesen Körpern die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze so beträchtlich wird, dass das Licht fast nicht absorbirt wird.

§ 5. Viel genauer, als die Absorption des Lichtes in den Metallen, hat man die Eigenschaften des von denselben reflectirten Lichtes messend verfolgt. Es soll nun untersucht werden, wie nach der elektromagnetischen Lichttheorie diese Reflexion vor sich gehen muss.

Dazu brauchen wir zunächst die Formeln für eine schwingende Bewegung, welche sich in einer Richtung fortpflanzt, die in der xz-Ebene liegt und gegen die x-Axe unter einem beliebigen Winkel α geneigt ist. Steht dann die Richtung der elektrischen Schwingungen senkrecht zu der genannten Ebene, so findet man aus der Untersuchung des § 3 für den Bewegungszustand leicht folgende symbolische Ausdrücke:

$$[v_1] = a e^{-i\psi},$$

$$[L] = \frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)}\, a \sin\alpha . e^{-i\psi},\quad [N] = -\frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)}\, a \cos\alpha . e^{-i\psi},$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T}\,(t - xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + \mathrm{p}).$$

Liegt dagegen die Schwingungsrichtung in der xz-Ebene, so ist zu setzen

$$[u_1] = -a \sin\alpha . e^{-i\psi},\quad [w_1] = a\cos\alpha . e^{-i\psi},$$

$$[M] = \frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)}\, a e^{-i\psi},$$

* Vergl. Weber, Elektrodynamische Massbestimmungen, Abh. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. VI, S. 593—597.

wobei ψ wieder die nämliche Function ist, wie in den vorhergehenden Formeln.

Die hier angegebenen Werthe genügen den Bewegungsgleichungen für jeden Werth des Winkels α und sogar auch, wenn α, $\sin\alpha$, $\cos$ complexe Grössen sind.

§ 6. Es müssen weiter die Bedingungen gesucht werden, welche an der Grenze von einem isotropen Nichtleiter und einem Metalle gelten. Es sind dies die Gleichungen A), B), 8) und 24) der ersten Mittheilung; nur sind diese noch etwas zu vereinfachen. Es möge dabei wieder angenommen werden, dass die Grenzfläche mit der yz-Ebene des Coordinatensystems zusammenfalle; ausserdem sei der Isolator das erste, der Leiter das zweite Medium, so dass die Accente bei denjenigen Grössen, welche für beide mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, sich auf das Metall beziehen.

Es werden dann die Gleichungen A) und B)

$$9)\qquad \frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varkappa u_1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)',$$

$$10)\qquad \frac{\eta}{\varepsilon}=\varkappa v_1,\quad \frac{\zeta}{\varepsilon}=\varkappa w_1,$$

$$11)\qquad L+\frac{\partial\chi}{\partial x}=L'+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)',$$

$$12)\qquad M=M',\quad N=N'.$$

In der Formel 8) der ersten Mittheilung ist für u, v, w zu setzen $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, für u', v', w' dagegen nach 5) $u_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $v_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial v_1}{\partial t}$, $w_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial w_1}{\partial t}$. Es folgt mithin

$$13)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=u_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)'.$$

Endlich giebt 24)

$$14)\qquad \vartheta L-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\chi}{\partial x}=\vartheta' L'-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)'.$$

Es lässt sich nun aus 11) und 14) χ wegschaffen; setzen wir auch hier $(1+4\pi\vartheta'):(1+4\pi\vartheta)=1$, was nur bei den magnetischen Metallen einen erheblichen Fehler verursacht, so ergiebt sich

$$15)\qquad L=L'.$$

Wenn man 9) nach t differenzirt, kann man aus dieser Gleichung mittelst 13) φ eliminiren; man erhält dadurch

$$16)\qquad \left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}=u_1+\varepsilon'\varkappa\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon'}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

welche Gleichung man statt 9) nehmen kann.

Für den Isolator können wir nun, wie früher, $\frac{1}{\varepsilon}$ gegen die Einheit vernachlässigen; man darf somit im ersten Gliede von 16) die Grösse $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial\xi}{\partial t}$ fortlassen. Ueber die Zahl ε' wissen wir vorläufig Nichts; indess ist es leicht zu zeigen, dass im zweiten Gliede der Gleichung die Grösse $\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t}$ so klein ist gegen u_1, dass sie vernachlässigt werden darf. Denn nach 2) lässt sich diese Grösse auch so schreiben:

$$\text{17)} \qquad \frac{1}{1+4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\varkappa'}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und wenn man nun berücksichtigt, dass bei den Lichterscheinungen $[u_1]$ durch eine Exponentialgrösse, wie im vorhergehenden Paragraphen, dargestellt wird, findet man aus den Werthen von $\varkappa'$ und T leicht, dass bei den Metallen bereits $\frac{\varkappa'}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t}$ sehr klein gegen u_1 ist. Um so mehr ist dies mit dem Ausdrucke 17) der Fall, da noch ε_0 eine sehr grosse Zahl ist.

Die Gleichung 16) gestaltet sich demnach zur folgenden um:

$$\text{18)} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = u_1 + \varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und die Bedeutung hiervon ist, dass auch an der Grenze keine Anhäufung von Elektricität entstehen kann.

Es muss dann weiter, wie auch aus 13) folgt,

$$\text{19)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)'$$

sein.

Wir wollen nun zeigen, dass man auch hier den Grenzbedingungen genügen kann, wenn man blos Transversalschwingungen in die Rechnung aufnimmt. Da bei diesen überall $\varphi = 0$ ist, haben wir nur die Gleichungen 10), 12), 15) und 18) zu berücksichtigen.

§ 7. Ist zunächst das einfallende Licht in der Einfallsebene (xz-Ebene) polarisirt, so kann man es vorstellen durch die Gleichungen *

$$[\eta_0] = e^{-i\psi_0}, \quad [L_0] = \frac{4\pi A}{R}\sin\alpha . e^{-i\psi_0}, \quad [N_0] = -\frac{4\pi A}{R}\cos\alpha . e^{-i\psi_0},$$

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{T}(t - xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + \mathrm{p}), \quad R = \frac{1}{\mathrm{v}}.$$

Ebenso schreiben wir für das reflectirte Licht

$$[\eta] = a e^{-i\psi}, \quad [L] = \frac{4\pi A}{R}\sin\alpha . a e^{-i\psi}, \quad [N] = \frac{4\pi A}{R}\cos\alpha . a e^{-i\psi},$$

* Vergl. die

$$\psi = \frac{2\pi}{T}(t + xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + \mathrm{p}),$$

und für die Bewegung im Metalle (§ 5)

$$[v'] = a'e^{-i\psi'}, \quad [L'] = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\sin\alpha'.a'e^{-i\psi'},$$

$$[N'] = -\frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\cos\alpha'.a'e^{-i\psi'},$$

$$\psi' = \frac{2\pi}{T}(t - xR'\cos\alpha' - zR'\sin\alpha' + \mathrm{p}).$$

Es kann nun den Grenzbedingungen genügt werden, wenn

20) $$R\sin\alpha = R'\sin\alpha'$$

ist, welche Gleichung dem Brechungsgesetze bei nichtleitenden Medien entspricht.

Es wird dann nämlich an der Grenzfläche ($x=0$) $\psi_0 = \psi = \psi'$ und man erhält aus der ersten der Gleichungen 10)

21) $$\frac{1+a}{\varepsilon} = \varkappa a'.$$

Der Gleichung 18), der zweiten von 10) und der ersten von 12) wird durch die angegebenen Werthe genügt. Die zweite der Formeln 12) liefert aber die Relation

$$\frac{4\pi A}{R}(1-a)\cos\alpha = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}a'\cos\alpha',$$

welche, wenn man sie mit $A(1+4\pi\vartheta) = A'(1+4\pi\vartheta')$ multiplicirt, folgende Gestalt annimmt:

$$R\frac{1-a}{\varepsilon}\cos\alpha = R'\varkappa a'\cos\alpha'$$

oder nach 20)

22) $$\frac{1-a}{\varepsilon}\sin\alpha'\cos\alpha = \varkappa a'\sin\alpha\cos\alpha'.$$

Schliesslich ergiebt sich aus 15)

$$\frac{4\pi A}{R}(1+a)\sin\alpha = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}a'\sin\alpha'$$

und dies führt nach einiger Umformung wieder auf 21) zurück. Aus 21) und 22) folgt aber

$$a = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}$$

und man hat demnach für das reflectirte Licht

A) $$[\eta] = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}e^{-i\frac{2\pi}{T}(t+xR\cos\alpha - zR\sin\alpha+\mathrm{p})}.$$

§ 8. Ist zweitens das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so kann man für die einfallende, reflectirte und durchgelassene Bewegung der Reihe nach setzen

$$[\xi_0] = -\sin\alpha\,.\,e^{-i\psi_0},\quad [\zeta_0] = \cos\alpha\,.\,e^{-i\psi_0},\quad [M_0] = \frac{4\pi A}{R}\,e^{-i\psi_0},$$

$$[\xi] = -\sin\alpha\,.\,a\,e^{-i\psi},\quad [\zeta] = -\cos\alpha\,.\,a\,e^{-i\psi},\quad [M] = \frac{4\pi A}{R}\,a\,e^{-i\psi},$$

$$[u_1] = -\sin\alpha'.a'e^{-i\psi'},\quad [w_1] = \cos\alpha'.a'e^{-i\psi'},\quad [M'] = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\,a'e^{-i\psi'},$$

wo ψ_0, ψ, ψ' die nämliche Bedeutung haben, wie oben.

Um den Grenzbedingungen genügen zu können, muss man auch hier die Relation 20) und die daraus für $x = 0$ folgende Gleichheit von ψ_0, ψ, ψ' annehmen.*

Aus der zweiten der Gleichungen 10) erhält man dann

23) $$\frac{1-a}{\varepsilon}\cos\alpha = \varkappa a'\cos\alpha.$$

Ebenso aus der ersten von 12)

$$\frac{4\pi A}{R}(1+a) = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\,a'$$

oder nach einiger Umformung

24) $$\frac{1+a}{\varepsilon}\sin\alpha' = \varkappa a'\sin\alpha.$$

Endlich giebt die Gleichung 18), wenn man sie durch $i e^{-i\psi}$ dividirt,

$$(1+a)\frac{2\pi}{T}\sin\alpha = a'\sin\alpha'\left(\varepsilon'\varkappa\,.\,\frac{2\pi}{T}+i\right).$$

Aus den Werthen von R und R' folgt nun aber

$$R'^2 = 4\pi\varepsilon' A^2(1+4\pi\vartheta') + i\,.\,\frac{2T}{\varkappa}\,.\,A^2(1+4\pi\vartheta')$$

$$= R^2\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+i\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa\varepsilon}\right) = R^2\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa\varepsilon}\left(\varepsilon'\varkappa\,.\,\frac{2\pi}{T}+i\right)$$

und man kann demzufolge obige Gleichung auch so schreiben:

$$(1+a)\sin\alpha = a'\sin\alpha'\,.\,\frac{R'^2}{R^2}\varkappa\varepsilon,$$

was vermöge der Relation 20) mit 24) identisch ist.

Da auch alle übrigen Grenzbedingungen befriedigt sind, haben wir es nur noch mit 23) und 24) zu thun. Man findet daraus

$$a = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}$$

und man hat folglich für die totale dielektrische Polarisation im reflectirten Lichte

B) $$[\varrho] = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}\,e^{-i\frac{2\pi}{T}(t+xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + p)}.$$

§ 9. Die symbolischen Ausdrücke A) und B) haben genau die gleiche Form wie diejenigen, welche für das an isolirenden Körpern reflectirte Licht gelten. Sobald man aber, um die wirkliche Bewegung zu erhalten, nur

den reellen Theil nimmt, hört die Uebereinstimmung auf; denn bei den Metallen wird R', mithin auch α' complex, während diese Grösse bei Nichtleitern reell ist.

Um nun für die Metallreflexion den reellen Theil von A) und B) zu bestimmen, lässt sich eine Rechnung anwenden, welche Eisenlohr* bei der Ableitung der von Cauchy für die Metallreflexion angegebenen Gleichungen benützt hat. Eisenlohr erhält nämlich diese Gleichungen, indem er in den Formeln, welche für isolirende Körper gelten, für den Brechungsexponenten eine complexe Grösse $\vartheta e^{i\varepsilon}$ setzt. Nun ist aber nach der Gleichung 20) in der That das Verhältniss $\sin\alpha : \sin\alpha'$ eine constante, aber complexe Grösse. Setzen wir dieselbe $= \sigma e^{i\tau}$, so werden die Constanten σ und τ mit den von Eisenlohr eingeführten Grössen ϑ und ε übereinstimmen.

Wir haben also

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\sigma} e^{-i\tau}$$

und demzufolge

$$\cos\alpha' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sigma^2} e^{-2i\tau}} = v e^{i\omega},$$

wobei v und ω leicht aus α, σ und τ zu berechnen sind.

Durch Substitution der Werthe von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ wird nun

$$-\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')} = b + b'i, \quad \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')} = c + c'i,$$

wenn

$$b = \frac{1-m^2}{1+2m\cos(\tau+\omega)+m^2}, \quad b' = -\frac{2m\sin(\tau+\omega)}{1+2m\cos(\tau+\omega)+m^2}, \quad m = \frac{\sigma v}{\cos\alpha},$$

$$c = -\frac{1-m'^2}{1+2m'\cos(\tau-\omega)+m'^2}, \quad c' = \frac{2m'\sin(\tau-\omega)}{1+2m'\cos(\tau-\omega)+m'^2}, \quad m' = \frac{\sigma\cos\alpha}{v}$$

ist.

Bringt man diese Werthe in A) und B) über, so ergiebt sich für den reellen Theil dieser Ausdrücke

$$\eta = \sqrt{b^2+b'^2}\cos(\psi-d_p), \quad \varrho = \sqrt{c^2+c'^2}\cos(\psi-d_s),$$

wenn

$$d_p = arctg\frac{b'}{b}, \quad d_s = arctg\frac{c'}{c}$$

gesetzt wird.

Eine leichte Rechnung ergiebt dann für die Intensität des reflectirten Lichtes, wenn das einfallende Licht in oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist,

25) $J_p = b^2 + b'^2 = tg(f - \frac{1}{4}\pi), \quad J_s = c^2 + c'^2 = tg(g - \frac{1}{4}\pi),$

26) $\cot f = \cos(\tau+\omega)\sin(2\,arc\cot m), \quad \cot g = \cos(\tau-\omega)\sin(2\,arctg\,m'),$

während man zur Bestimmung der Phase folgende Gleichungen hat:

27) $tg\,d_p = \sin(\tau+\omega)\,tg(2\,arc\cot m), \quad tg\,d_s = \sin(\tau-\omega)\,tg(2\,arctg\,m').$

* *Pogg.* Ann. 104, S. 368.

§ 10. Da die Grössen d_p und d_s verschiedene Werthe haben, wird bei einer beliebigen linearen Polarisation des einfallenden Lichtes das reflectirte Licht elliptisch polarisirt sein. Mittelst des Babinet'schen Compensators ist man dann im Stande, das Amplitudenverhältniss $k=\sqrt{\frac{J_s}{J_p}}$ und den Phasenunterschied d_s-d_p zu bestimmen. Da man vorzugsweise diese Grössen gemessen hat, wollen wir noch die theoretischen Werthe derselben angeben. Setzt man $(b+b'i):(c+c'i)=q+q'i$, so findet man leicht $k=\sqrt{q^2+q'^2}$ und $tg(d_s-d_p)=\frac{q'}{q}$. Andererseits folgt aus den ursprünglichen Werthen von $b+b'i$ und $c+c'i$

$$q+q'i=-\frac{\cos(\alpha+\alpha')}{\cos(\alpha-\alpha')},$$

und zur Bestimmung von q und q' hat man hierin die Werthe von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ zu substituiren. Nach einiger Rechnung findet man dann schliesslich, wenn $k=tg\,h$ gesetzt wird,

$$28)\qquad \cos 2h=\cos(\tau+\omega)\sin\left\{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sigma v\cos\alpha}\right)\right\},$$

$$29)\qquad tg(d_s-d_p)=\sin(\tau+\omega)\;tg\left\{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sigma v\cos\alpha}\right)\right\}.$$

Dies sind aber die Formeln, welche Cauchy für die Metallreflexion angegeben hat und deren Richtigkeit Jamin und Quincke geprüft haben. Es hat sich dabei herausgestellt, dass diese Gleichungen in genügender Weise mit den Versuchen übereinstimmen, wenn man nur den Constanten σ und τ passende Werthe beilegt. Diese Werthe wollen wir nun einer näheren Betrachtung unterziehen.

Für einen bestimmten Einfallswinkel A (Haupteinfallswinkel) wird der Phasenunterschied $d_s-d_p=\frac{1}{2}\pi$ (eine viertel Wellenlänge) und man hat den Werth H, den h oder $\mathrm{arctg}\,k$ für diesen Fall annimmt, das Hauptazimuth genannt. Aus den Grössen A und H lassen sich nun, wie z. B. Eisenlohr (a. a. O.) zeigt, σ und τ (bei ihm ϑ und ε) berechnen. So gelten z. B. für die Reflexion auf Silber in Luft folgende Werthe, welche aus den Messungen von Jamin abgeleitet sind:

Linie des Spectrums.	D.	E.	F.	H.
A	72° 30′	71° 30′	69° 34′	66° 12′
H	40 9	40 19	39 46	39 50
τ	79 15	79 29	77 54	77 16
$\log\sigma$	0,4595	0,4283	0,3703	0,2740

beiden Spectrallinien gefundenen Werthe hervor. Denn erstens müssten nach der Theorie die beiden Werthe von K einander gleich sein; zweitens müssten die für s gefundenen Zahlen sich umgekehrt verhalten wie die Schwingungsdauer, und diese Proportion ergiebt, wenn man für die D-Linie $s = 25$ setzt, für die H-Linie $s = 38$, während wir oben für letztere $s = 29$ erhielten.

Es kann also die Theorie gewiss nicht als endgiltig festgesetzt betrachtet werden. Wir haben denn auch die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze nur besprochen, da aus ihr möglicherweise die Abweichungen, welche wir zwischen der Theorie und der Erfahrung finden, entspringen können. Sehr gut ist es möglich, dass man bei weiterer Untersuchung andere Ursachen für dieselben kennen lernen wird. Jedenfalls wird aber gerade die weitere Erforschung der optischen Eigenschaften der Metalle von Wichtigkeit sein für das bessere Verständniss der elektrischen Erscheinungen.

X.

Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung.

Von

Milinowski,

Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass.

II. Artikel.

(Fortsetzung und Schluss von I.)

20. Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente eines Strahlenbüschels $M(g g_1 \ldots)$ und eines projectivischen Büschels von Curven dritter Ordnung $(A_1 \ldots A_9)\{\varkappa^3 \varkappa_1^3 \ldots\}$ ist eine Curve vierter Ordnung K^4, welche durch alle Grundpunkte geht.

Wir schneiden das Büschel (M) durch eine Gerade l, so entsteht auf ihr eine Punktreihe $P\ldots$, die zum Büschel $(A_1 \ldots A_9)$ in projectivischer Beziehung steht, und suchen zu bestimmen, wie oft eine Curve dieses Büschels durch den ihr entsprechenden Punkt auf l geht. — Die geraden Polaren der Punkte $P\ldots$ bezüglich ihrer homologen Curven $\varkappa^3\ldots$ werden von einer Curve dritter Classe vierter Ordnung $C_3\ldots$ eingehüllt, die also eine Doppeltangente hat. Denn ist X ein ganz beliebiger Punkt, so bilden seine conischen Polaren $\xi^2\ldots$ bezüglich $\varkappa^3\ldots$ ein zum letzteren Büschel und daher auch zur Reihe $P\ldots$ oder, wenn Q ein beliebiger Punkt ist, zum Büschel $Q(P\ldots)$ projectivisches Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $X_1 X_2 X_3 X_4$. Die Büschel (Q) und $(X_1 \ldots X_4)$ erzeugen eine Curve X^3 dritter Ordnung, welche l in drei Punkten schneidet. Dies sind die einzigen Punkte von l, deren gerade Polaren bezüglich ihrer homologen Curven aus dem Büschel $(A_1 \ldots A_9)$ durch X gehen und es werden also alle diese geraden Polaren von einer Curve dritter Classe umhüllt.

Durch X legen wir eine Gerade x und nehmen auf ihr die Punkte $Y, Z, \ldots$ Sind dann $(Y_1 \ldots Y_4)\{\eta^2 \ldots\}$, $(Z_1 \ldots Z_4)\{\zeta^2 \ldots\}$ die Büschel

conischer Polaren dieser Punkte in Bezug auf $(A_1 \ldots A_9)\{\varkappa^3 \ldots\}$, so erzeugen sie mit dem Büschel (Q) Curven dritter Ordnung Y^3, Z^3, ..., von denen sich zeigen lässt, dass sie ein Büschel bilden, dem auch X^3 angehört. Da die Büschel $(\xi^2 \ldots)$, $(\eta^2 \ldots)$, $(\zeta^2 \ldots)$, ... mit dem Büschel (Q) in projectivischer Beziehung sich befinden, so sind sie selbst unter einander projectivisch und es erzeugen $(\xi^2 \ldots)$ und $(\eta^2 \ldots)$ eine Curve C^4 vierter Ordnung durch die acht Punkte $X_1 \ldots X_4\, Y_1 \ldots Y_4$. Diese wird von X^3 in $X_1 \ldots X_4$ geschnitten. Ihre übrigen Schnittpunkte mit C^4 müssen auch auf Y^3 liegen; denn ist S irgend einer dieser anderen Schnittpunkte, so treffen sich in ihm die homologen Elemente ξ_s^2 und QP_s, aber auch QP_s und η_s^2. Da aber die Curven X^3 und Y^3 sich ausser in Q noch in acht Punkten $S_1 \ldots S_8$ auf C^4 schneiden, so müssen durch diese neun Punkte $QS_1 \ldots S_8$ auch die Curven $Z^3 \ldots$ hindurchgehen, weil Z^3 auch durch die Büschel $(\xi^2 \ldots)$ und $(\zeta^2 \ldots)$ oder $(\eta^2 \ldots)$ und $(\zeta^2 \ldots)$ erzeugt werden kann. Von den Curven des Büschels $(X^3 Y^3 \ldots)$ berühren vier die Gerade l, also giebt es auf x vier Punkte, durch die sich nur zwei Tangenten an C_3 ziehen lassen, die daher auf C_3 liegen. Mithin ist C_3 von der vierten Ordnung und hat eine Doppeltangente, die wir t nennen wollen. Die Punktreihe $R \ldots$, in welcher diese von den Tangenten von C_3, d. i. von den geraden Polaren der Punkte $P \ldots$ bezüglich ihrer homologen Curven $\varkappa^3 \ldots$ geschnitten wird, ist diesen Tangenten und daher auch der Reihe $P \ldots$ projectivisch. Demnach werden die Geraden $PR_1 \ldots$ von einem Kegelschnitte $[t_1 l]$ eingehüllt, der mit C_3 ausser t noch vier gemeinschaftliche Tangenten hat. Sie seien $t_1 \ldots t_4$ und treffen l in ihren homologen Punkten $P_1 \ldots P_4$. Wenn aber die gerade Polare eines Punktes durch ihn hindurchgeht, so muss er auf der Curve liegen; daher liegen $P_1 \ldots P_4$ auf ihren homologen Curven $\varkappa_1^3 \ldots \varkappa_4^3$. Auf einer beliebigen Geraden giebt es daher vier Punkte, in denen sich homologe Elemente von $(\varkappa^3 \ldots)$ und (M) treffen, also erzeugen diese Büschel eine Curve vierter Ordnung. — Dass dieselbe durch die Grundpunkte geht, folgt auf bekannte Art.

Anderer Beweis. Durch drei feste Punkte $B_1 B_2 B_3$ und die Schnittpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}''_1$, ... von $\varkappa^3$, $\varkappa_1^3$, ... mit einer Geraden l lege man Curven dritter Ordnung β^3, β_1^3, . . , welche M zum gemeinsamen Doppelpunkt haben. Dieselben bilden ein Büschel, dessen Grundpunkte ausser $M B_1 B_2 B_3$ noch $B_4 B_5$ sein mögen. Aus M und B_1 werden β^3, β_1^3, ... durch ein-zweigliedrige, l wird durch zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage projicirt. Dreht man alle Büschel um M und B_1 so, dass MB_2 und $B_1 B_2$ in eine Gerade fallen, so gehen alle Curven β^3, β_1^3, ... in Kegelschnitte β^2, β_1^2, ... eines Büschels mit vier Grundpunkten $M\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5$ über; aus l wird ein Kegelschnitt λ^2, der durch M geht; die Strahlen $gg_1 \ldots$ bilden ein neues Strahlenbüschel um M in anderer Lage. Die Strahlen desselben schneiden die homologen

Kegelschnitte des Büschels $\beta^2 \beta_1^2 \ldots$ in den Punkten einer Curve dritter Ordnung, die M zum Doppelpunkte hat und von λ^2 ausser in M noch in vier Punkten geschnitten wird, deren verwandte Punkte (vor der Drehung) diejenigen sind, in denen l von dem Erzeugniss der Büschel $M(g g_1 \ldots)$ und $\varkappa^3 \varkappa_1^3 \ldots$ geschnitten wird. Also ist dieses Erzeugniss eine Curve vierter Ordnung.

Ein dritter Beweis ergiebt sich unmittelbar aus 14, wenn das eine Büschel dritter Ordnung in ein Büschel erster Ordnung und einen Kegelschnitt zerfällt.

21. Wenn drei der Grundpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung $\varkappa^3 \varkappa_1^3 \ldots$, etwa $A_1 A_2 A_3$, auf einer Geraden g liegen und man legt durch die sechs übrigen eine beliebige Curve K^3 dritter Ordnung, so wird sie von den Curven des Büschels in je drei Punkten einer Geraden geschnitten. Alle diese Geraden treffen sich in einem Punkte, der auf g liegt.

Die übrigen sechs Punkte $A_4 \ldots A_9$ liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$, der mit g zusammen auch eine Curve $(\mathfrak{K}^2, g)$ des Büschels bildet. Wenn wir die Geraden, auf denen K^3 von den Curven des Büschels $(\varkappa^3 \ldots)$ geschnitten wird, mit $s s_1 s_2 \ldots$ bezeichnen, so gehört g auch zu den Geraden $s \ldots$. Entweder trifft jede der Geraden $s \ldots$ die Gerade g in einem besondern Punkte oder es kann einmal oder öfter sich ereignen, dass zwei oder mehrere Gerade $s \ldots$ sich in demselben Punkte von g treffen. Gingen etwa s und s_1 durch den Punkt P von g und ordneten wir den drei Geraden $g s s_1$ die Curven $(\mathfrak{K}^2, g) \varkappa^3 \varkappa_1^3$ zu, so ist dadurch zwischen den Strahlen des Büschels (P) und den Curven $(\varkappa^3 \ldots)$ eine projectivische Beziehung hergestellt; die homologen Elemente beider Büschel schneiden sich auf einer Curve vierter Ordnung, die aus der Geraden g und einer Curve dritter Ordnung besteht, welche durch $A_4 \ldots A_9$ und die sechs Punkte geht, in denen s und s_1 von $\varkappa^3$ und $\varkappa_1^3$ geschnitten wird, die also mit K^3 zwölf gemeinschaftliche Punkte hat und daher mit dieser Curve zusammenfällt. Es müssten sich also in diesem Falle sämmtliche Geraden $s \ldots$ in P treffen. — Wenn sich aber nie zwei Gerade $s \ldots$ auf g schneiden, so muss durch jeden Punkt von g eine solche gehen; da aber durch die Punkte $A_1 A_2 A_3$ keine Gerade s gehen kann, so müssen sich alle in einem Punkte von g schneiden.

Anderer Beweis. Wir betrachten $A_6 \ldots A_9$ als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, dann lassen sich alle Curven $\varkappa^3 \ldots$ durch das Kegelschnittbüschel $(A_6 \ldots A_9)$ und projectivische Strahlenbüschel $(B), (B_1), \ldots$ erzeugen, deren Scheitel sämmtlich auf der Geraden $A_4 A_5$ liegen. Die sämmtlichen Büschel $(B), (B_1), \ldots$ sind in projectivischer Beziehung und in perspectivischer Lage, weil diejenigen ihrer Strahlen, welche sich in $A_1 A_2 A_3$ schneiden, einander entsprechen. Durch die sechs Punkte $A_4 \ldots A_9$

legen wir eine Curve dritter Ordnung K^3, die wir uns auch durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt denken wollen. Dieselbe können wir dann auch erzeugen durch das Kegelschnittbüschel $(A_6 \dots A_9)$ und ein projectivisches Strahlenbüschel (K), dessen Scheitel K auch auf $A_4 A_5$ liegen muss. Dieses Strahlenbüschel ist auch in perspectivischer Lage mit allen Büscheln (B), (B_1), ... und erzeugt mit ihnen die Geraden $s s_1 \dots$, auf denen in je drei Punkten K^3 von $\varkappa^3 \varkappa_1^3 \dots$ geschnitten wird. Es möge nun g von s in G geschnitten werden, so sind BG und KG homologe Strahlen der Büschel (B) und (K). Da aber auch BG, B_1G, ... homologe Strahlen der Büschel (B), (B_1), ... sind, so sind auch B_1G, ... und KG homologe Strahlen und daher schneiden sich $s s_1 \dots$ in G.

22. **Haben zwei projectivische Büschel von Curven dritter Ordnung sechs Grundpunkte, die auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegen, gemeinsam, und entsprechen dabei die Curven einander, von denen $\mathfrak{K}^2$ ein Bestandtheil ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Curven auf einer Curve vierter Ordnung.**

Es seien $ABCDEF$ die sechs gemeinschaftlichen Grundpunkte der projectivischen Büschel $(C^3 C_1^3 \dots)$ und $(K^3 K_1^3 \dots)$ und liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$, dann liegen die übrigen drei Grundpunkte $CC'C''$ und $KK'K''$ je auf einer Geraden c und k. Jede der Curven des ersten Büschels wird von allen Curven des zweiten Büschels in solchen Geraden geschnitten, dass sie sämmtlich sich in Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \dots$ von k schneiden, und jede der Curven des zweiten Büschels wird von allen des ersten in solchen Geraden geschnitten, die sich sämmtlich in Punkten $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 \dots$ von c treffen. Die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, ... sind also die Schnittlinien von K^3 und C^3, K_1^3 und C_1^3, ...; die Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ sind projectivisch auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 \dots$ bezogen und liegen perspectivisch, daher schneiden sich diese Geraden in einem Punkte P. Wir können jeder dieser Geraden die Curven zuordnen, die sich auf ihr schneiden, und erhalten dadurch zwischen den Strahlen von (P) und den Curven eines jeden der Büschel $(C^3 \dots)$ und $(K^3 \dots)$ projectivische Beziehungen. Da aber das Strahlenbüschel (P) mit jedem der projectivischen Curvenbüschel dieselbe Curve vierter Ordnung erzeugt, so erzeugen auch die projectivischen Curvenbüschel dieselbe Curve vierter Ordnung, eigentlich eine Curve sechster Ordnung, die aber aus dieser Curve vierter Ordnung und dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ besteht.

23. **Wenn eine Curve K^4 der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente eines Büschels erster Ordnung $M(g_0 g_1 g_2 \dots)$ und eines projectivischen Büschels dritter Ordnung $(A_1 \dots A_9)\{\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \dots\}$ ist, von dessen Grundpunkten sechs inem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegen, so treffen alle Cur-itter Ordnung, welche durch diese sechs Punkte**

und durch je drei Schnittpunkte homologer Elemente gelegt sind, die Curve K^4 noch in je drei Punkten einer Geraden. Alle diese Geraden schneiden sich in einem festen Punkte S von K^4.

Diejenigen sechs Grundpunkte, welche auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegen, seien $A_1 \dots A_6$ und die Schnittpunkte homologer Elemente seien $B_0 C_0 D_0$, $B_1 C_1 D_1$, $B_2 C_2 D_2$, ... Man lege durch die Punkte

$$A_1 \dots A_6 B_0 C_0 D_0 B_2 \text{ und } A_1 \dots A_6 B_1 C_1 D_1 B_2$$

die Curven

$$\lambda_0^3 \text{ und } \lambda_1^3,$$

die sich noch in CD schneiden mögen. Von den Curven des Büschels $(A_1 \dots A_6 B_2 CD)$ geht eine, λ_2^3, durch C_2 und daher auch durch D_2. Zwischen den Büscheln (M), $(A_1 \dots A_9)$ und $(A_1 \dots A_6 B_2 CD)$ ist projectivische Beziehung hergestellt, wenn $g_0 g_1 g_2$, $\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3$ und $\lambda_0^3 \lambda_1^3 \lambda_2^3$ einander zugeordnet werden. — Alle Curven des ersten Büschels werden von λ_0^3 in je drei Punkten einer Geraden geschnitten und alle diese Geraden treffen sich in einem Punkte E_0 der Geraden $A_7 A_8 A_9$; wenn λ_0^3 das zweite Büschel durchläuft, so durchläuft E_0 eine zu ihm projectivische Punktreihe auf $A_7 A_8$. Die Curven des zweiten Büschels werden von $\varkappa_0^3$, jede in drei Punkten einer Geraden geschnitten und alle diese Geraden treffen sich in einem Punkte F_0 von CD. Wenn $\varkappa_0^3$ das erste Büschel durchläuft, so durchläuft F_0 auf CD eine jenem projectivische Punktreihe und daher ist

$$(E_0 \dots) \barwedge (F_0 \dots).$$

Die Geraden $E_0 F_0$, ... müssen sich in einem Punkte schneiden, da der Schnittpunkt von $A_7 A_8$ und CD sich selbst entspricht und da sich je zwei homologe Curven der Büschel $(\varkappa_0^3 \dots)$ und $(\lambda_0^3 \dots)$ in je drei Punkten dieser Geraden schneiden, so ist ihr Schnittpunkt der Punkt M. Legt man also durch $A_1 \dots A_6$, ferner durch $B_0 C_0 D_0$, $B_1 C_1 D_1$, ... und einen festen Punkt B von K^4 Curven dritter Ordnung, so schneiden sie sich noch in zwei Punkten EF von K^4, welche mit dem festen Punkte in einer Geraden b liegen.

Die Gerade b schneide K^4 noch in S. Wir beziehen die Büschel dritter Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 B_0 C_0 D_0) \text{ und } (A_1 \dots A_6 B_1 C_1 D_1)$$

projectivisch dadurch auf einander, dass wir je zwei Curven einander zuordnen, die sich noch in einem und daher noch in zwei anderen Punkten von K^4 schneiden. Je drei solcher Punkte liegen nach dem Obigen auf einer Geraden und alle diese Geraden müssen sich in einem Punkte von K^4, also in S, schneiden.

24. Wenn die homologen Elemente zweier projectivischen Büschel von Curven dritter Ordnung sich in je sechs Punkten eines Kegelsch[illegible]en, so liegen ihre

übrigen Schnittpunkte auf geraden Linien, die sich in einem Punkte treffen.

Die projectivischen Curvenbüschel seien $(A_1 A_2 \ldots A_9)\{\alpha^3 \alpha_1^3 \ldots\}$ und $(B_1 B_2 \ldots B_9)\{\beta^3 \beta_1^3 \ldots\}$; je zwei homologe Curven schneiden sich in sechs Punkten $CDEFGH$, $C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$, ... auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ und ausserdem in je drei Punkten JKL, $J_1 K_1 L_1$, ..., die auf geraden Linien g, g_1, ... liegen. Es lässt sich zeigen, dass alle diese Geraden sich in einem Punkte schneiden. Zunächst weisen wir nach, dass keine zwei von ihnen sich in einem Punkte von $\mathfrak{K}^2$ schneiden können; denn thäten dies irgend zwei von ihnen, etwa g_m und g_n, und läge ihr Schnittpunkt O auf $\mathfrak{K}^2$, so bildeten sowohl α^3_m und β^3_m, als α^3_n und β^3_n neue Curvenbüschel, zu denen $(\mathfrak{K}^2, g_m)$ und $(\mathfrak{K}^2, g_n)$ gehörten. Die geraden Polaren von O bezüglich der Curven der Büschel $(\alpha^3 \ldots)$ und $(\beta^3 \ldots)$ schneiden sich in zwei Punkten A und B und da O ein Doppelpunkt einer Curve sowohl im Büschel $(\alpha^3_m \beta^3_m)$ als $(\alpha^3_n \beta^3_n)$ ist, so muss seine gerade Polare für alle Curven beider Büschel mit AB zusammenfallen und O müsste auch ein Doppelpunkt einer Curve sowohl des Büschels $(\alpha^3 \ldots)$ als $(\beta^3 \ldots)$ sein, was nicht vorausgesetzt ist. Daher können sich in keinem Punkte von $\mathfrak{K}^2$ zwei der Geraden $g g_1 \ldots$ schneiden und sie müssen $\mathfrak{K}^2$ in Punktpaaren MN, $M_1 N_1$, ... schneiden, welche in projectivischer Beziehung zu den Curven $\alpha^3 \alpha_1^3 \ldots$ und $\beta^3 \beta_1^3 \ldots$ stehen. Denn erstlich entspricht jedem Paare homologer Curven $(\alpha^3 \beta^3)$ ein Punktpaar MN und umgekehrt. Ja, es entspricht sogar jedem Punkte dieses Paares dasselbe Curvenpaar $(\alpha^3 \beta^3)$, weil es z. B. durch M nur eine einzige Gerade geben kann, auf der sich homologe Curven schneiden. Da also

$$(\alpha^3 \alpha_1^3 \ldots) \barwedge (M M_1 \ldots) \barwedge (N N_1 \ldots)$$

ist, so muss auch

$$(M M_1 \ldots N N_1 \ldots) \barwedge (N N_1 \ldots M M_1 \ldots)$$

sein und es haben diese Punktreihen involutorische Lage, woraus weiter folgt, dass alle Geraden $g g_1 \ldots$ sich in einem Punkte P schneiden; da ferner

$$(\alpha^3 \alpha_1^3 \ldots) \barwedge (\beta^3 \beta_1^3 \ldots) \barwedge P(g g_1 \ldots)$$

ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Elemente auf einer Curve vierter Ordnung K^4, welche durch $A_1 \ldots A_9 B_1 \ldots B_9 P$ geht.

25. Eine Curve K^4 vierter Ordnung, welche der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente zweier Büschel erster und dritter Ordnung ist, kann auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden.

Es sei K^4 der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente der Büschel $S(s_0 s_1 s_2 \ldots)$ und $(A_1 \ldots A_9)\{\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \ldots\}$. Die homologen Elemente s_p und $\varkappa^3_p$ schneiden sich in $B_p C_p D_p$. Ein beliebiger Kegelschnitt P^2 treffe $\varkappa^3_p$ in $P_1 \ldots P_6$. Durch die neun Punkte $B_p C_p D_p P_1 \ldots P_6$ sei X^3 eine beliebige Curve dritter Ordnung. Diese wird von $\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \ldots$ in

nung x_1^3, welche durch die zwölf Punkte $U_0 V_0 W_0 B_1 C_1 D_1 Z_1 \dots Z_6$ geht. Wir beziehen die Curvenbüschel dritter Ordnung

$$(B_0 C_0 D_0 Z_1 \dots Z_6) \text{ und } (B_1 C_1 D_1 Z_1 \dots Z_6)$$

projectivisch dadurch aufeinander, dass wir je zwei Curven einander zuordnen, die sich noch in einem und daher nach dem vorigen Satze noch in zwei anderen Punkten von K^4 schneiden. In diesen Büscheln entsprechen sich diejenigen Curven, welche in den Kegelschnitt Z^2, auf dem $Z_1 \dots Z_6$ liegen, und in eine der Geraden $B_0 C_0 D_0$ oder $B_1 C_1 D_1$ zerfallen. Sie erzeugen daher eine Curve sechster Ordnung, die aber in Z^2 und K^4 zerfällt. Je zwei homologe Curven schneiden sich aber in drei Punkten einer Geraden und alle diese Geraden müssen sich in einem Punkte von K^4, also in X treffen. Wendet man nun den vorigen Satz an, so folgt:

26. Legt man durch einen beliebigen Punkt X von K^4 Strahlen $x_0 x_1 x_2 \dots$, welche K^4 in $U_0 V_0 W_0$, $U_1 V_1 W_1$, $U_2 V_2 W_2$, ... schneiden, ferner durch je drei zusammengehörige Schnittpunkte und irgend sechs feste Punkte von K^4 Curven dritter Ordnung, so schneiden sich diese noch in drei anderen Punkten von K^4.

27. Curvennetz dritter Ordnung.

Die drei Curven dritter Ordnung $K_0 K_1 K_2$, welche nicht zu einem Büschel gehören sollen, bilden drei Büschel $(K_0 K_1)$, $(K_1 K_2)$, $(K_2 K_0)$. Wir beziehen die beiden ersten projectivisch so auf einander, dass K_1 sich selbst, K_0 der Curve K_2 und irgend eine Curve K'_2 des ersten einer K'_0 des zweiten entspricht, so schneiden sich die homologen Curven dieser Büschel auf einer Curve sechster Ordnung, die in K_1 und eine andere Curve dritter Ordnung $\mathfrak{K}_1$ zerfällt, woraus also folgt:

Die Schnittpunkte der Curven K_0 und K_2 liegen mit den Schnittpunkten zweier beliebigen Curven der beiden Büschel $(K_0 K_1)$ und $(K_1 K_2)$ auf einer Curve dritter Ordnung.

Bringt man jede Curve von $(K_0 K_1)$ mit jeder von $(K_1 K_2)$ zum Durchschnitt und legt durch die Schnittpunkte die durchgehende Curve von $(K_0 K_2)$, so erhält man alle Curven dieses Büschels. Sind $K'_{01} K''_{01}$ zwei Curven des ersten Büschels, $K'_{12} K''_{12}$ zwei des zweiten, so liegen die Schnittpunkte von K'_{01} und K'_{12} mit denen von K''_{01} und K''_{12} auf einer Curve dritter Ordnung. Halten wir K'_{01} und K'_{12} fest und lassen K''_{01} und K''_{12} die Büschel $(K_0 K_1)$ und $(K_1 K_2)$ durchlaufen, so erhalten wir alle Curven des Büschels $(K'_{01} K'_{12})$. Auf diese Art erhalten wir alle Curven aller Büschel, deren Grundpunkte die Schnittpunkte von irgend zwei Curven der Büschel $(K_0 K_1)$ und $(K_1 K_2)$ sind.

Verwenden wir die Büschel $(K_1 K_2)$ und $(K_2 K_0)$ oder $(K_2 K_0)$ und $(K_0 K_1)$ zur Herstellung neuer Curven in der angegebenen Art, so lässt sich zeigen, dass ausser den schon erhaltenen keine neuen Curven auftreten. Denn nehmen wir eine Curve K_{20} aus $(K_2 K_0)$ und eine beliebige

$\varkappa$ aus $(K_{20}K_{01})$ und beziehen (K_0K_2) und (K_0K_1) projectivisch auf einander, indem wir K_0 sich selbst, K_{01} und K_{20}, und zwei Curven einander entsprechen lassen, welche sich in einem Punkte von $\varkappa$ schneiden, so erzeugen diese eine Curve dritter Ordnung, welche mit $\varkappa$ zehn gemeinschaftliche Punkte hat und also mit ihr zusammenfällt. Wenn K_2 und $\varkappa$ sich in P schneiden und es ist $K_{01}^{(p)}$ diejenige Curve von (K_0K_1), welche durch P geht, so folgt, dass $\varkappa$ auch eine Curve des Büschels $(K_2K_{01}^{(p)})$ ist. Dieses Büschel erhalten wir aber auch aus den Büscheln (K_0K_1) und (K_1K_2), in denen wir die projectivische Beziehung nur so feststellen dürfen, dass K_1 sich selbst, $K_{01}^{(p)}$ der Curve K_2 entspricht. Somit erhalten wir alle Curven des Netzes $[K_0K_1K_2]$, wenn wir alle Curven der Büschel uns vorstellen, welche eine veränderliche Curve $K_{01}^{(p)}$ des Büschels (K_0K_1) mit einer veränderlichen $K_{12}^{(q)}$ des Büschels (K_1K_2) oder jede dieser veränderlichen Curven mit einer veränderlichen $K_{20}^{(r)}$ des Büschels (K_2K_0) bestimmt. Daraus aber folgt:

Je zwei Büschel des Netzes haben eine Curve gemein.

Man leitet aus diesem Satze leicht einige Haupteigenschaften des Netzes ab, so:

a) Alle Curven des Netzes, welche durch einen Punkt gehen, bilden ein Büschel.

b) Schneiden Curven eines Büschels dritter Ordnung eine beliebige Curve dritter Ordnung und man legt durch die einzelnen Gruppen von Schnittpunkten und einen beliebigen Punkt andere Curven dritter Ordnung, so bilden auch diese ein Büschel.

Haben alle Curven eines Büschels sechs Punkte eines Kegelschnittes K^2 gemeinsam, so liegen die anderen drei Grundpunkte auf einer Geraden g. Legt man durch die ersten sechs Grundpunkte eine beliebige Curve dritter Ordnung, so constituirt sie mit dem Büschel ein Netz. Sie schneidet jede Curve des Büschels in drei Punkten einer Geraden. Jede derselben bildet mit K^2 eine Curve des Netzes. Die eine von ihnen, l, schneidet g in P; alle durch P gehenden Curven des Netzes bilden ein Büschel. Zwei dieser Curven sind (K^2g) und (K^2l), also bestehen alle übrigen auch aus K^2 und einer Geraden. Hiermit ist der Satz 21) von Neuem abgeleitet.

Ebenso folgt:

c) Haben die Curven eines Büschels dritter Ordnung drei Grundpunkte $A_1A_2A_3$ auf einer Geraden und legt man durch sie eine beliebige Curve dritter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in sechs Punkten eines Kegelschnittes getroffen. Alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel, zu welchem auch der Kegelschnitt

gehört, auf dem die übrigen sechs Grundpunkte des Büschels dritter Ordnung liegen.

28. **Sind $(\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \ldots)$ und $(\lambda_0^3 \lambda_1^3 \ldots)$ projectivische Büschel dritter Ordnung, so bestimmen die Schnittpunkte homologer Elemente neue Büschel dritter Ordnung von der Eigenschaft, dass sich ihre Curven unendlich oft so zu neuen Büscheln ordnen, dass in jedem derselben aus jedem der ersten Büschel eine Curve vorkommt.**

Durch die Schnittpunkte $P_1 \ldots P_9$ irgend zweier homologen Curven $\varkappa^3_p$ und λ^3_p lege man zwei beliebige Curven dritter Ordnung M^3 und X^3. Die Büschel $(M^3 \varkappa_0^3)$ und $(M^3 \lambda_0^3)$ scheiden X^3 in denselben Punktgruppen, wie $(\varkappa_0^3 \varkappa_1^3)$ und $(\lambda_0^3 \lambda_1^3)$. Ordnen wir je zwei Curven, die sich in denselben neun Punkten von X^3 schneiden, einander zu, so ist

$$(\varkappa_0^3 M^3) \,\overline{\wedge}\, (\varkappa_0^3 \varkappa_1^3), \quad (\lambda_0^3 M^3) \,\overline{\wedge}\, (\lambda_0^3 \lambda_1^3)$$

und also

$$(\varkappa_0^3 M^3) \,\overline{\wedge}\, (\lambda_0^3 M^3).$$

Da in den letzten Büscheln M^3 sich selbst entspricht, so erzeugen sie eine Curve N^3 dritter Ordnung, welche X^3 in den neun Punkten $Q_1 \ldots Q_9$ schneidet, in denen diese Curve von der Curve K^6 geschnitten wird, welche von den Büscheln $(\varkappa_0^3 \varkappa_1^3)$ und $(\lambda_0^3 \lambda_1^3)$ erzeugt wird. Diejenigen Curven der Büschel $(\varkappa_0^3 M^3)$ und $(\lambda_0^3 M^3)$, welche den Curven $\varkappa_1^3$ und λ_1^3 der Büschel $(\varkappa_0^3 \varkappa_1^3)$ und $(\lambda_0^3 \lambda_1^3)$ entsprechen, seien K_1^3 und L_1^3. Die Büschel $(\varkappa_0^3 \lambda_0^3)$ und $(K_1^3 L_1^3)$ kann man projectivisch so auf einander beziehen, dass sie die Curve $(M^3 N^3)$ erzeugen, wenn man $\varkappa_0^3$ und K_1^3, λ_0^3 und L_1^3 einander und N^3 sich selbst entsprechen lässt. Da $\varkappa_1^3$ und K_1^3 sich in neun Punkten von X^3 und ebenso λ_1^3 und L_1^3 sich auch in neun Punkten von X^3 schneiden, so treffen die Curven der Büschel $(K_1^3 L_1^3)$ die Curve X^3 in denselben Punktgruppen. Beziehen wir nun die Büschel $(\varkappa_0^3 \lambda_0^3)$ und $(\varkappa_1^3 \lambda_1^3)$ projectivisch so auf einander, dass $\varkappa_0^3$ und $\varkappa_1^3$, λ_0^3 und λ_1^3, und die beiden Curven einander entsprechen, welche sich in P_1 treffen, so erzeugen sie eine Curve K_1^6 sechster Ordnung, welche X^3 in denselben Punkten schneiden muss, wie $(M^3 N^3)$ und also K^6. Auf dieselbe Weise folgern wir, dass K^6 und K_1^6 sich in zwölf Punkten jeder Curve des Büschels $(\varkappa^3_p \lambda^3_p)$ schneiden und daher zusammenfallen müssen. Also lässt sich K^6 auch durch die Büschel $(\varkappa_0^3 \lambda_0^3)$, $(\varkappa_1^3 \lambda_1^3)$, $(\varkappa_2^3 \lambda_2^3)$, ... erzeugen und durch die neun Punkte, in denen eine Curve des ersten Büschels K^6 schneidet, geht aus jedem der anderen Büschel eine Curve.

Hieraus folgt:

a) **Schneiden die Curven $\varkappa_0^3 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \ldots$ eines Büschels dritter Ordnung einen Kegelschnitt K^2 und legt man durch zwei Schnittpunktsgruppen zwei beliebige Curven dritter Ordnung λ_0^3 [illegible] so treffen die Curven des Büschels**

$(\lambda_0^3 \lambda_1^3)$ den Kegelschnitt K^2 in denselben Schnittpunktsgruppen.

Die Curven κ_0^3 und λ_0^3 schneiden sich noch in drei Punkten einer Geraden g_0 und ebenso κ_1^3 und λ_1^3 in drei Punkten einer Geraden g_1. Es bilden also $\kappa_0^3, \lambda_0^3, (K^2 g_0)$ ein Büschel und $\kappa_1^3, \lambda_1^3, (K^2 g_1)$ ein anderes Büschel. Ordnen wir κ_0^3 und κ_1^3, λ_0^3 und λ_1^3, $(K^2 g_0)$ und $(K^2 g_1)$ einander zu, so sind die Büschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen ausser K^2 eine Curve vierter Ordnung K^4. Diese Curve kann nach dem obigen Satze auch durch die Büschel $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \ldots)$ und $(\lambda_0^3 \lambda_1^3 \ldots)$ erzeugt werden, so dass sich also homologe Curven dieser Büschel in je sechs Punkten von K^2 schneiden.

b) Legt man durch zwei Grundpunkte eines Büschels dritter Ordnung einen Kegelschnitt und durch je vier Punkte, in denen er von einer Curve des Büschels geschnitten wird, und durch irgend einen festen Punkt Kegelschnitte, so bilden diese ein Büschel.

c) Ist eine Curve K^5 fünfter Ordnung durch ein Büschel dritter Ordnung $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \ldots)$ und ein projectivisches Büschel zweiter Ordnung $(\lambda_0^2 \lambda_1^2 \ldots)$ erzeugt und man legt durch die Schnittpunkte von

$$\kappa_0^3 \lambda_0^2, \ \kappa_1^3 \lambda_1^2, \ \kappa_2^3 \lambda_2^2, \ \ldots$$

und drei beliebige Punkte von K^5 Curven dritter Ordnung, so treffen sie sich noch in sechs Punkten von K^5.

d) Ist eine Curve K^4 vierter Ordnung durch ein Büschel dritter Ordnung $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \ldots)$ und ein projectivisches Büschel erster Ordnung $(\lambda_0 \lambda_1 \ldots)$ erzeugt und man legt durch die Schnittpunkte von

$$\kappa_0^3 \lambda_0, \ \kappa_1^3 \lambda_1, \ \kappa_2^3 \lambda_2, \ \ldots$$

und sechs beliebige Punkte von K^4 Curven dritter Ordnung, so treffen sie sich noch in drei Punkten von K^4.

29. Haben zwei projectivische Büschel dritter Ordnung drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ einer Geraden g gemein und entsprechen sich diejenigen Curven, welche g als einen Bestandtheil haben, so treffen sich alle Kegelschnitte, auf denen sich je zwei homologe Curven in sechs Punkten schneiden, in denselben vier Punkten.

Die projectivischen Büschel $\kappa_0^3 \kappa_1^3 \ldots$ und $\lambda_0^3 \lambda_1^3 \ldots$ haben ausser $A_1 A_2 A_3$ noch die Grundpunkte $A_4 \ldots A_9$ und $B_4 \ldots B_9$, von denen die ersten auf einem Kegelschnitte κ^2, die anderen auf einem Kegelschnitte λ^2 liegen. Dann sind $(\kappa^2 g)$ und $(\lambda^2 g)$ entsprechende Curven. Die Curve κ_0^3 wird von allen Curven des Büschels $(\lambda_0^3 \ldots)$ in je sechs Punkten geschnitten [illegible] stets auf einem Kegelschnitte liegen, und alle diese Kegel-

schnitte bilden nach 27 *c)* ein Büschel, dessen Basis (K_0) auf λ^2 liegt. Wenn $\varkappa_0^3$ das Büschel $(\varkappa_0^3 \ldots)$ durchläuft, so durchlaufen die Basen (K_1), $(K_2), \ldots$ die Quadrupel einer biquadratischen Involution, zu welcher auch die vier Schnittpunkte von $\varkappa^2$ und λ^2 gehören. Die Curve λ_0^3 wird von allen Curven des Büschels $(\varkappa_0^3 \ldots)$ in je sechs Punkten eines Kegelschnittes geschnitten und alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel, dessen Basis (L_0) auf $\varkappa^2$ liegt. Wir lassen λ_0^3 das Büschel $(\lambda_0^3 \lambda_1^3 \ldots)$ durchlaufen, dann durchlaufen die Basen (L_1), (L_2), ... auch die Quadrupel einer zur ersten projectivischen biquadratischen Involution. Je zwei entsprechende Quadrupel liegen auf einem Kegelschnitte und alle diese Kegelschnitte müssen, wie aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes folgt, ein Büschel bilden.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich 28 *c)* auch auf folgende Art beweisen.

Die Grundpunkte beider Büschel seien $A_1 \ldots A_9$ und $B_1 \ldots B_4$, und die Schnittpunkte homologer Curven seien

$$C_0 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0,\ C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1,\ C_2 D_2 E_2 F_2 G_2 H_2,\ \ldots.$$

Die Gerade $A_1 A_2$ schneide die erzeugte Curve K^5 noch in $C_m C_n C_p$.

Man lege durch $A_1 A_2 D_m$ und die beiden ersten Gruppen zwei Curven dritter Ordnung λ_0^3 und λ_1^3, welche die Curven $\varkappa_0^3$ und $\varkappa_1^3$ noch in den Punkten K_0 und K_1 der Geraden $A_1 A_2$ schneiden müssen. Die Curven λ_0^3 und λ_1^3 constituiren ein Büschel, von welchem eine Curve, λ^3_m, durch den Punkt C_m geht, welchen auch $\varkappa^3_m$ trifft. Ordnen wir nun die Curven $\varkappa_0^3$ und λ_0^3, $\varkappa_1^3$ und λ_1^3, $\varkappa^3_m$ und λ^3_m einander zu, so sind die Büschel $(\varkappa^3 \ldots)$ und $(\lambda^3 \ldots)$ projectivisch auf einander bezogen. Je zwei homologe Curven schneiden sich auf $A_1 A_2$ und daher noch in sechs Punkten eines Kegelschnittes. Diese sämmtlichen Kegelschnitte müssen sich in $B_1 \ldots B_4$ treffen, da zwei von ihnen λ_0^2 und λ_1^2 sind. Die Curven $\varkappa^3_m$ und λ^3_m müssen sich auf dem Kegelschnitte λ^2_m schneiden, da derjenige Kegelschnitt, auf welchem die Schnittpunkte dieser Curven liegen, durch $B_1 B_2 B_3 B_4$ und D_m gehen muss. Da nun die Kegelschnitte, auf denen sich je zwei homologe Curven der Büschel $(\varkappa^3 \ldots)$ und $(\lambda^3 \ldots)$ schneiden, ein zu beiden und daher auch zum Büschel $(\lambda^2 \ldots)$ projectivisches Büschel bilden, und da dreimal homologe Kegelschnitte, $\lambda_0^2 \lambda_1^2 \lambda^2_m$, zusammenfallen, so fallen alle homologen Kegelschnitte zusammen und irgend zwei homologe Curven $\varkappa^3_x$ und λ^3_x schneiden sich in sechs Punkten von λ^2_x. Daher kann K^5 durch die projectivischen Büschel $(\lambda^3 \ldots)$ und $(\lambda^2 \ldots)$ erzeugt werden. Im ersteren ist D_m ein beliebiger Grundpunkt. Da in gleicher Weise sich zeigen lässt, dass man statt A_1 und A_2 zwei beliebige Punkte von K^5 als Grundpunkte substituiren kann, so ist der Satz bewiesen.

30. I. Gegeben seien die Punkte $A_1 \ldots A_7 B_1 \ldots B_5 S$; man soll zwei Punkte XY finden, so dass die Büschel dritter und erster Ordnung

$$(A_1 \dots A_7 X Y)\{B_1 \dots B_5\} \text{ und } S(B_1 \dots B_5)$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

Es seien B'_1 und B'_2 die neunten Grundpunkte der Büschel dritter Ordnung $(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1)$ und $(A_1 \dots A_7 B_2 B'_2)$. Man ordne die durch $B_2 B_3 B_4$ gehenden Curven des ersten Büschels den Strahlen SB_2, SB_3, SB_4 zu und construire diejenige Curve des Büschels dritter Ordnung, welche dem Strahl SB_1 entspricht; dann ist

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1)\{B_1 B_2 B_3 B_4\} \barwedge S(B_1 B_2 B_3 B_4),$$

ebenso

$$(A_1 \dots A_7 B_2 B'_2)\{B_1 B_2 B_3 B_4\} \barwedge S(B_1 B_2 B_3 B_4),$$

also auch

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1)\{B_1 \dots B_4\} \barwedge (A_1 \dots A_7 B_2 B'_2)\{B_1 \dots B_4\}.$$

Diese Büschel erzeugen eine Curve K^6 sechster Ordnung, welche $A_1 \dots A_7$ zu Doppelpunkten hat.

Legt man durch $A_1 \dots A_7$ und die Schnittpunkte zweier homologen Curven irgend eine Curve dritter Ordnung, so schneidet sie K^6 in einem Punktpaare XY, so dass

$$(A_1 \dots A_7 X Y)\{B_1 \dots B_4\} \barwedge S(B_1 \dots B_4).$$

Es kann auf K^6 nur ein Punktpaar $X_0 Y_0$ geben, so dass

$$(A_1 \dots A_7 X_0 Y_0)\{B_1 \dots B_5\} \barwedge S(B_1 \dots B_5),$$

wenn B_5 ein ausserhalb K^6 liegender Punkt ist; denn gäbe es noch ein Punktpaar $X_1 Y_1$, für welches

$$(A_1 \dots A_7 X_1 Y_1)\{B_1 \dots B_5\} \barwedge S(B_1 \dots B_5),$$

so würden die projectivischen Büschel

$$(A_1 \dots A_7 X_0 Y_0) \text{ und } (A_1 \dots A_7 X_1 Y_1)$$

die K^6 erzeugen, auf welcher dann auch B_5 liegen müsste.

Um das Punktpaar $X_0 Y_0$ zu erhalten, bestimme man eine Curve K_1^6 durch die projectivischen Büschel

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1)\{B_1 B_2 B_3 B_5\} \text{ und } (A_1 \dots A_7 B_2 B'_2)\{B_1 B_2 B_3 B_5\}.$$

Die beiden Curven haben gemeinsam die sieben Doppelpunkte $A_1 \dots A_7$ und die Punkte $B_1 B'_1 B_2 B'_2 B_3 B'_3$, wenn B'_3 der neunte Schnittpunkt der durch B_3 gehenden Curven dritter Ordnung ist. Die beiden letzten Schnittpunkte sind die verlangten Punkte $X_0 Y_0$.

II. Gegeben sind die 13 Punkte $A_1 \dots A_6 B_1 \dots B_6 S$. Man soll drei Punkte XYZ finden, so dass die projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 XYZ)\{B_1 \dots B_6\} \text{ und } S(B_1 \dots B_6)$$

in projectivischer Beziehung sind.

Nach der vorigen Aufgabe bestimmen wir Punkte $B'_1 B''_1$ und $B'_2 B''_2$, so dass

$$(A_1 \dots A_6 B_1 B'_1 B''_1)\{B_2 B_3 B_4 B_5 B_6\} \barwedge S(B_2 B_3 B_4 B_5 B_6),$$
$$(A_1 \dots A_6 B_2 B'_2 B''_2)\{B_1 B_3 B_4 B_5 B_6\} \barwedge S(B_1 B_3 B_4 B_5 B_6)$$

ist und bestimmen in beiden Büscheln dritter Ordnung diejenigen Curven, welche den Strahlen SB_1, resp. SB_2 entsprechen. Dann ist

$$(A_1 \dots A_6 B_1 B'_1 B''_1) \{B_1 \dots B_6\} \barwedge (A_1 \dots A_6 B_2 B'_2 B''_2) \{B_1 \dots B_6\},$$

da beide in projectivischer Beziehung zu $S(B_1 \dots B_6)$ stehen. Beide Büschel erzeugen eine Curve sechster Ordnung K^6. Legt man durch irgend drei Schnittpunkte zweier homologen Curven und $A_1 \dots A_6$ eine Curve dritter Ordnung, welche K^6 noch in XYZ schneidet, so muss

$$(A_1 \dots A_6 XYZ) \{B_1 \dots B_6\} \barwedge S(B_1 \dots B_6)$$

sein.

Lässt man das Tripel XYZ die Curve K^6 durchlaufen, so erzeugen die beiden Büschel dritter und erster Ordnung Curven vierter Ordnung, die alle durch die 13 Punkte $A_1 \dots A_6 B_1 \dots B_6 S$ gehen. Von ihnen geht nur eine einzige durch einen Punkt B_7. Denn gäbe es zwei Gruppen $X_1 Y_1 Z_1$ und $X_2 Y_2 Z_2$ von der Beschaffenheit, dass

$$(A_1 \dots A_6 X_1 Y_1 Z_1) \{B_1 \dots B_7\} \barwedge S(B_1 \dots B_7),$$
$$(A_1 \dots A_6 X_2 Y_2 Z_2) \{B_1 \dots B_7\} \barwedge S(B_1 \dots B_7),$$

so müssten die beiden projectivischen Büschel eine Curve sechster Ordnung erzeugen, welche durch B_7 geht. Da aber die erzeugte Curve K^6 ist, so ist dies unmöglich, wenn B_7 ausserhalb gewählt ist. Also:

III. Es giebt nur eine einzige Gruppe XYZ von der Beschaffenheit, dass

$$(A_1 \dots A_6 XYZ) \{B_1 \dots B_7\} \barwedge S(B_1 \dots B_7)$$

ist.

Hiermit ist die Aufgabe gelöst:

IV. Durch 14 gegebene Punkte vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter Ordnung und erster Ordnung eine Curve vierter Ordnung zu legen.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe findet man in „*Annali di Matematica*" *Serie II, Tomo II*, in der Abhandlung Siebeck's: „*De triangulo chordale quatuor sectionum conicarum.*"

Aus dieser Aufgabe ergiebt sich in Verbindung mit 26 der Satz:

31. Durch 14 Punkte lässt sich vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung nur eine Curve vierter Ordnung legen.

Im Vorigen ergab sich, dass sich durch die 13 Punkte $A_1 \dots A_6 B_1 \dots B_6 S$ unendlich viele Curven vierter Ordnung legen lassen. Sollten zwei dieser Curven noch einen Schnittpunkt B gemeinsam haben, so folgt unmittelbar aus ihrer Erzeugung, dass B sämmtlichen Curven gemeinsam ist und auf K^6 liegt. Man findet, wie Kortum a. a. O. gezeigt hat, dass die Anzahl der Schnittpunkte zweier dieser Curven ausser den gegebenen 13 noch 3 ist, und hat den Satz:

32. Alle Curven vierter Ordnung, welche vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung durch 13 Punkte gelegt werden können, schneiden sich noch in drei Punkten.

Wenn man erwägt, dass man durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung Curven vierter Ordnung herstellen kann, die in eine Curve dritter Ordnung und eine solche erster Ordnung oder in zwei Curven zweiter Ordnung zerfallen, von denen jede wieder aus zwei Geraden bestehen kann, so folgt:

33. *a)* Schneiden sich zwei Curven vierter Ordnung in vier Punkten einer Geraden, so liegen die übrigen Schnittpunkte auf einer Curve dritter Ordnung.

b) Schneiden sich zwei Curven vierter Ordnung in acht Punkten eines Kegelschnittes, so liegen die übrigen Schnittpunkte auch auf einem Kegelschnitte.

Es sei K^4 eine Curve vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist; ferner seien $ABCD$ vier beliebige Punkte von K^4.

Die Geraden AB und CD treffen K^4 noch in EF und GH; die Geraden EG und FH treffen K^4 noch in $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$. Legt man dann durch $A_1 B_1 C_1 D_1$ einen Kegelschnitt λ_0^2, welcher K^4 noch in $U_0 X_0 Y_0 Z_0$ schneidet, so liegen nach 32 die acht Punkte $ABCD\, U_0 X_0 Y_0 Z_0$ auf einem Kegelschnitt $\varkappa_0^2$. Durchläuft λ_0^2 alle Kegelschnitte des Büschels $(A_1 B_1 C_1 D_1)$, so durchläuft $\varkappa_0^2$ alle Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$. Also:

34. Eine Curve K^4 vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Die Grundpunkte des einen und ein Grundpunkt des andern sind beliebig.

In der Abhandlung „Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades“ hat Kortum gezeigt, wie sich vermittelst zweier projectivischen Büschel zweiter Ordnung durch 14 Punkte $A_1 \dots A_{14}$ eine Curve vierter Ordnung legen lässt. Nehmen wir $A_1 \dots A_4$ zu Grundpunkten des einen Büschels und A_5 als einen Grundpunkt des zweiten, so giebt es nur drei Punkte XYZ von der Beschaffenheit, dass

$$(A_1 \dots A_4)\{A_6 \dots A_{14}\} \barwedge (A_5 XYZ)\{A_6 \dots A_{14}\}.$$

Da nach dem vorigen Satze diese drei Punkte XYZ auch auf der Curve K^4 liegen müssen, welche vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist, so folgt unmittelbar:

35. *a)* Die Curve K^4, welche vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung durch 14 gelegt werden kann, ist identisch mit der

Curve vierter Ordnung, welche durch dieselben 14 Punkte vermittelst zweier projectivischen Kegelschnittbüschel gelegt werden kann.

b) Jede Curve vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei solcher Büschel erzeugt werden.

---

36. Büschel vierter Ordnung.

Es seien $A_1 \dots A_{16}$ die Grundpunkte eines Büschels vierter Ordnung, dessen Curven $\varkappa_0^4 \varkappa_1^4 \dots$ sein mögen. Wir denken uns diese Curven erzeugt durch ein Büschel erster Ordnung (A_{16}) und projectivische Büschel dritter Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 X_0 Y_0 Z_0),\ (A_1 \dots A_6 X_1 Y_1 Z_1),\ \dots,$$

so liegen alle Punkte $X_0 Y_0 Z_0 X_1 Y_1 Z_1 \dots$ auf einer Curve sechster Ordnung, die $A_1 \dots A_6$ zu Doppelpunkten hat. Eine Gerade g werde von $\varkappa_0^4$, $\varkappa_1^4$, ... in $B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_1 C_1 D_1 E_1$, ... und von K^6 in $P_1 \dots P_6$ geschnitten.

Durch $B_0 C_0 D_0 E_0$ und $B_1 C_1 D_1 E_1$ legen wir zwei Curven λ_0^4 und λ_1^4 vierter Ordnung, die sich in 16 Punkten schneiden, welche man als Grundpunkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung $\lambda_2^4 \lambda_3^4 \dots$ ansehen kann. — Wir legen durch die Gruppen, in welchen g durch die Curven der Büschel

$$(A_1 \dots A_6 X_0 Y_0 Z_0),\ (A_1 \dots A_6 X_1 Y_1 Z_1),\ \dots$$

geschnitten wird, und durch irgend drei feste Punkte ABC Curven dritter Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppelpunkt $\varDelta$ haben, so bilden diese unendlich viele Büschel dritter Ordnung (vergl. 13)

$$(\varDelta \varDelta ABCX'_0 Y'_0),\ (\varDelta \varDelta ABCX'_1 Y'_1),\ \dots,$$

die wir projectivisch auf das Strahlenbüschel $(\varDelta)$ dadurch beziehen können, dass wir dieses vermittelst der Geraden g perspectivisch auf (A_{16}) beziehen. Diese Büschel erzeugen Curven vierter Ordnung, welche ABC zu Grundpunkten und $\varDelta$ als dreifachen Punkt haben.

Die beiden Büschel

$$(\varDelta \varDelta ABCX'_0 Y'_0) \text{ und } (\varDelta \varDelta ABCX'_1 Y'_1)$$

sind vermittelst des Büschels $(\varDelta)$ projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Curve C^6 sechster Ordnung, welche $\varDelta$ zum vierfachen Punkte hat. Legt man durch die Schnittpunkte irgend zweier homologen Curven der beiden Büschel und durch ABC irgend eine Curve dritter Ordnung, die $\varDelta$ zum Doppelpunkt hat und C^6 noch in $X''_0 Y''_0$ schneidet, so gehen die Curven des Büschels $(\varDelta \varDelta ABCX''_0 Y''_0)$ durch die Schnittpunkte der hom[illegible]origen Büschel und schneiden

g in einer kubischen Involution, welche mit den Involutionen, die durch die ersten Büschel auf g ausgeschnitten werden, in projectivischer Beziehung steht und mit ihnen dieselben Doppelpunkte $P_1 \dots P_6$ hat. Sie muss mit einer der Involutionen zusammenfallen, die durch eines der Büschel $(\varDelta\varDelta ABCX'_2Y'_2)$, ... auf g gebildet werden. Denn schneidet die durch P_1 gehende Curve des Büschels $(\varDelta\varDelta ABCX''_0Y''_0)$ g noch in Q_1R_1, so muss es unter den unendlich vielen Curven der Büschel $(\varDelta\varDelta ABCX'_2Y'_2)$, ..., welche durch P_1 gehen, eine geben, die durch Q_1 geht. Sie gehöre dem Büschel $(\varDelta\varDelta ABCX'_2Y'_2)$ an. Da sich also in sieben Punkten $P_1 \dots P_6 Q_1$ von g homologe Curven der projectivischen Büschel, $(\varDelta\varDelta ABCX''_0Y''_0)$ und $(\varDelta\varDelta ABCX'_2Y'_2)$ treffen, so treffen sich je zwei homologe Curven in je drei Punkten von g, d. h. je zwei solche Curven fallen zusammen und alle Punkte

$$X'_2Y'_2X'_3Y'_3 \dots$$

liegen auf C^6. — Daher bilden alle Curven vierter Ordnung $K_0^4K_1^4\dots$, welche durch $(\varDelta)$ und die Büschel $(\varDelta\varDelta ABCX'_0Y'_0)$, $(\varDelta\varDelta ABCX'_1Y'_1)$, $(\varDelta\varDelta ABCX'_2Y'_2)$, ... erzeugt werden, ein Büschel; sie schneiden g in den Gruppen $A_0B_0C_0D_0$, ..., in denen diese Gerade von den Curven $\varkappa_0^4\varkappa_1^4\varkappa_2^4\dots$ geschnitten wird. Auf dieselbe Weise können wir ein Büschel von Curven $L_0^4L_1^4L_2^4\dots$ vierter Ordnung herstellen, dessen Curven $\varDelta$ zum dreifachen Punkte, ABC als Grundpunkte haben und g in denselben Gruppen schneiden, in denen diese Gerade von $\lambda_0^4\lambda_1^4\lambda_2^4\dots$ geschnitten wird.

Vermittelst einer Steiner'schen Verwandtschaft mit den Hauptpunkten $AB\varDelta$ verwandeln wir erstens

$$K_0^4K_1^4K_2^4\dots \text{ und } L_0^4L_1^4L_2^4\dots \text{ in } K_0^3K_1^3K_2^3\dots \text{ und } L_0^3L_1^3L_2^3\dots,$$

Curven dritter Ordnung zweier Büschel, die $\varDelta$ zum gemeinsamen Doppelpunkt haben, aber nicht durch A und B gehen, und zweitens g in einen Kegelschnitt γ^2, welcher durch $\varDelta$ geht und von den Curven

$$K_0^3K_1^3K_2^3\dots \text{ und } L_0^3L_1^3L_2^3\dots$$

in den Punktquadrupeln

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2,\ \dots$$

und

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{A}'_2\mathfrak{B}'_2\mathfrak{C}'_2\mathfrak{D}'_2,\ \dots$$

geschnitten wird. Nach 28 *b)* müssen

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2, \dots \text{ mit } \mathfrak{A}'_2\mathfrak{B}'_2\mathfrak{C}'_2\mathfrak{D}'_2, \dots$$

zusammenfallen und daher schneiden sich die Curven der Büschel

$$\varkappa_0^4\varkappa_1^4\varkappa_2^4\dots \text{ und } \lambda_0^4\lambda_1^4\lambda_2^4\dots$$

paarweise in je vier Punkten von g, d. h.:

Wird eine Gerade g von den Curven eines Büschels vierter Ordnung geschnitten und man legt durch die Schnittpunkte zweier dieser Curven mit g zwei andere Curven λ_0^4

Curve vierter Ordnung, welche durch dieselben 14 Punkte vermittelst zweier projectivischen Kegelschnittbüschel gelegt werden kann.

b) Jede Curve vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei solcher Büschel erzeugt werden.

---

36. Büschel vierter Ordnung.

Es seien $A_1 \dots A_{16}$ die Grundpunkte eines Büschels vierter Ordnung, dessen Curven $\varkappa_0^4 \varkappa_1^4 \dots$ sein mögen. Wir denken uns diese Curven erzeugt durch ein Büschel erster Ordnung (A_{16}) und projectivische Büschel dritter Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 X_0 Y_0 Z_0),\ (A_1 \dots A_6 X_1 Y_1 Z_1),\ \dots,$$

so liegen alle Punkte $X_0 Y_0 Z_0 X_1 Y_1 Z_1 \dots$ auf einer Curve sechster Ordnung, die $A_1 \dots A_6$ zu Doppelpunkten hat. Eine Gerade g werde von $\varkappa_0^4, \varkappa_1^4, \dots$ in $B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_1 C_1 D_1 E_1$, ... und von K^6 in $P_1 \dots P_6$ geschnitten.

Durch $B_0 C_0 D_0 E_0$ und $B_1 C_1 D_1 E_1$ legen wir zwei Curven λ_0^4 und λ_1^4 vierter Ordnung, die sich in 16 Punkten schneiden, welche man als Grundpunkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung $\lambda_2^4 \lambda_3^4 \dots$ ansehen kann. — Wir legen durch die Gruppen, in welchen g durch die Curven der Büschel

$$(A_1 \dots A_6 X_0 Y_0 Z_0),\ (A_1 \dots A_6 X_1 Y_1 Z_1),\ \dots$$

geschnitten wird, und durch irgend drei feste Punkte ABC Curven dritter Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppelpunkt $\varDelta$ haben, so bilden diese unendlich viele Büschel dritter Ordnung (vergl. 13)

$$(\varDelta \varDelta ABCX'_0 Y'_0),\ (\varDelta \varDelta ABCX'_1 Y'_1),\ \dots,$$

die wir projectivisch auf das Strahlenbüschel $(\varDelta)$ dadurch beziehen können, dass wir dieses vermittelst der Geraden g perspectivisch auf (A_{16}) beziehen. Diese Büschel erzeugen Curven vierter Ordnung, welche ABC zu Grundpunkten und $\varDelta$ als dreifachen Punkt haben.

Die beiden Büschel

$$(\varDelta \varDelta ABCX'_0 Y'_0) \text{ und } (\varDelta \varDelta ABCX'_1 Y'_1)$$

sind vermittelst des Büschels $(\varDelta)$ projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Curve C^6 sechster Ordnung, welche $\varDelta$ zum vierfachen Punkte hat. Legt man durch die Schnittpunkte irgend zweier homologen Curven der beiden Büschel und durch ABC irgend eine Curve dritter Ordnung, die $\varDelta$ zum Doppelpunkt hat und C^6 noch in $X''_0 Y''_0$ schneidet, so gehen die Curven des Büschels $(\varDelta \varDelta ABCX''_0 Y''_0)$ durch die Schnittpunkte der homologen Curven der vorigen Büschel und schneiden

schels in einer Geraden geschnitten. Alle diese Geraden schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der Geraden liegt, auf welcher die übrigen vier Grundpunkte des Büschels liegen.

Wenn ferner die Curven des Netzes vierter Ordnung acht Punkte eines Kegelschnittes C^2 gemein haben, so giebt es im Netz unendlich viele Curven, welche aus C^2 und einem Kegelschnitt bestehen. Schneiden sich zwei dieser Kegelschnitte in P, so gehen wegen *b)* unendlich viele derselben durch P und bilden ein Büschel. Hieraus folgt:

b'') Haben die Curven eines Büschels vierter Ordnung acht Grundpunkte eines Kegelschnittes C^2 gemein und man legt durch diese eine beliebige Curve vierter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in acht Punkten eines Kegelschnittes getroffen. Alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel, zu welchem auch der Kegelschnitt gehört, auf welchem die anderen acht Grundpunkte liegen.

In gleicher Weise folgt:

b''') Haben die Curven eines Büschels vierter Ordnung vier Grundpunkte auf einer Geraden und man legt durch diese irgend eine Curve vierter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in zwölf Punkten einer Curve dritter Ordnung geschnitten. Alle diese Curven dritter Ordnung bilden ein Büschel, zu welchem auch diejenige Curve gehört, auf welcher die zwölf übrigen Grundpunkte liegen.

39. Sind $(\varkappa_0{}^4 \varkappa_1{}^4 \ldots)$ und $(\lambda_0{}^4 \lambda_1{}^4 \ldots)$ projectivische Büschel vierter Ordnung, so bestimmen die Schnittpunkte homologer Elemente neue Büschel vierter Ordnung von der Eigenschaft, dass sich ihre Curven unendlich oft so zu neuen Büscheln ordnen, dass in jedem derselben aus jedem der ersten Büschel eine Curve vorkommt.

Beweis wie in 28.

Folgerungen. (Vergl. 28 *a)* etc.)

a) Schneiden die Curven eines Büschels vierter Ordnung eine Curve dritter Ordnung und man legt durch die Schnittpunktsgruppen und zwei feste Punkte andere Curven dritter Ordnung, so bilden diese ein Büschel.

b) Schneiden sich je zwei homologe Curven zweier projectivischen Büschel vierter Ordnung in zwölf Punkten derselben Curve dritter Ordnung, so treffen sich die Geraden, auf denen sie sich ausserdem schneiden, *in einem* Punkte.

Folgt aus 39.

c) Schneiden die Curven eines Büschels vierter Ordnung einen Kegelschnitt und man legt durch die Schnittpunktsgruppen und sechs feste Punkte andere Curven vierter Ordnung, so bilden diese auch ein Büschel.

d) Schneiden sich je zwei homologe Curven zweier projectivischen Büschel vierter Ordnung in acht Punkten desselben Kegelschnittes, so treffen sich die Kegelschnitte, auf denen sie sich ausserdem schneiden, in denselben vier Punkten.

e) Legt man durch vier Grundpunkte eines Büschels vierter Ordnung einen Kegelschnitt K^2 und durch die Schnittpunktsgruppen und einen festen Punkt A Kegelschnitte, so bilden diese ein Büschel.

Dies folgt unmittelbar aus *b)*, wenn man jeden der letzten Kegelschnitte in Verbindung mit einem festen, durch die vier genannten Grundpunkte gelegten Kegelschnitt als eine Curve vierter Ordnung betrachtet.

40. *a)* Haben zwei projectivische Büschel vierter Ordnung zwölf Grundpunkte, die auf einer Curve K^3 dritter Ordnung liegen, gemein und entsprechen sich dabei diejenigen Curven, von denen K^3 ein Bestandtheil ist, so ist der Ort der Schnittpunkte homologer Curven eine Curve K^5 fünfter Ordnung. Je zwei homologe Curven schneiden sich in vier Punkten einer Geraden und alle diese Geraden treffen sich in einem Punkte von K^5.

Der Beweis wird, wie in 22, mit Hilfe von 37 und 38*b')* geführt.

b und *c)* Analoge Sätze, wenn die projectivischen Büschel vierter Ordnung acht Grundpunkte eines Kegelschnittes oder vier einer Geraden gemein haben.

Ersetzt man in 37 und 39 das eine Büschel vierter Ordnung durch ein Büschel erster Ordnung und eine Curve dritter Ordnung, so folgt:

41. Zwei projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugen eine Curve fünfter Ordnung.

42. Ist eine Curve K^5 fünfter Ordnung durch ein Büschel vierter Ordnung und ein projectivisches Büschel (S) erster Ordnung erzeugt und legt man durch die Schnittpunktsgruppen der Strahlen von (S) mit K^5 und durch zehn feste Punkte von K^5 Curven vierter Ordnung, so bilden diese ein Büschel, dessen übrige Grundpunkte auf K^5 liegen.

Der letzte Satz lässt sich auch auf folgende Art beweisen. Es sei K^5 durch die projectivischen Büschel $(\varkappa_0^4 \varkappa_1^4 \varkappa_2^4 \ldots)$ und $S(g_0 g_1 g_2 \ldots)$ erzeugt. Die Grundpunkte des ersteren seien $A_1 \ldots A_{16}$; je zwei homologe Curven schneiden sich in $B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_1 C_1 D_1 E_1$, $B_2 C_2 D_2 E_2$, ... Durch $A_1 \ldots A_9$ ist eine Curve A^3 dritter Ordnung bestimmt; es sei C_x ein Schnittpunkt dieser Curve mit K^5. Dann legen wir durch $B_0 C_0 D_0 E_0$, resp. $B_1 C_1 D_1 E_1$ und die zehn Punkte $A_1 \ldots A_9 C_x$ zwei Curven λ_0^4 und λ_1^4 vierter Ordnung. Diese bestimmen ein Büschel, von welchem eine Curve λ^4_x durch B_2 geht. Da λ_0^4 und $\varkappa_0^4$, sowie λ_1^4 und $\varkappa_1^4$ sich in je vier Punkten einer Geraden schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auf A^3. Deshalb müssen nach 39*a)* sich auch λ^4_x und $\varkappa^4_x$ und überhaupt die Curven der Büschel $(\varkappa^4 \ldots)$ und $(\lambda^4 \ldots)$ paarweise auf A^3 schneiden. Dadurch aber sind diese Büschel projectivisch so auf einander bezogen, dass sie eine Curve fünfter Ordnung erzeugen. Die Schnittpunkte homologer Curven liegen auf Geraden, die ein zu beiden Curvenbüscheln projectivisches Strahlenbüschel bilden (vergl. 39*b)*), in welchem den Strahlen $g_0 g_1 g_x$ die Curven $\varkappa_0^4 \varkappa_1^4 \varkappa^4_x$ und $\lambda_0^4 \lambda_1^4 \lambda^4_x$ entsprechen. Daher müssen sich irgend zwei entsprechende Curven $\varkappa^4_m$ und λ^4_m auf dem Strahle g_m schneiden, welcher der Curve $\varkappa^4_m$ in der ursprünglichen Projectivität der Büschel $(\varkappa^4 \ldots)$ und (S) entspricht, d. h. die Curve K^5 kann auch durch die projectivischen Büschel $(\lambda^4 \ldots)$ und (S) erzeugt werden. Von den Grundpunkten des ersten ist C_x beliebig auf K^5 gewählt. Auf dieselbe Art kann man noch $A_1 \ldots A_9$ durch neun beliebige Punkte von K^5 ersetzen.

43. Ist X ein beliebiger Punkt von K^5 und legt man durch die Schnittpunktsgruppen der Strahlen von (X) mit K^5 und durch zehn feste Punkte von K^5 Curven vierter Ordnung, so treffen sich dieselben noch in vier Punkten von K^5.

Beweis wie in 26.

Mit Hilfe dieses Satzes und einer Steiner'schen Verwandtschaft lässt sich der Satz 35*b)* (die Umkehrung von 1) beweisen.

Die projectivischen Kegelschnittbüschel

$$(ABCD)\{\varkappa_0^2 \ldots\} \text{ und } (EFGH)\{\lambda_0^2 \ldots\}$$

erzeugen die Curve K^4. Man nehme ABC zu Hauptpunkten einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entsprechen den Kegelschnittbüscheln zwei projectivische Büschel erster und vierter Ordnung

$$\mathfrak{L}(k_0 \ldots) \text{ und } (A^2 B^2 C^2 \mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H})\{l_0^4 \ldots\},$$

welche eine Curve $\mathfrak{K}^5$ mit den drei Doppelpunkten ABC erzeugen. Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{K}^5$ lege man eine Gerade und durch deren vier Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}^5$ und einen festen Punkt $\mathfrak{M}$ eine Curve $\mathfrak{K}^4$ vierter Ordnung, welche ABC zu Doppelpunkten hat und jene noch in $\mathfrak{N}\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ trifft. Dann lässt sich $\mathfrak{K}^5$ durch die projectivischen Büschel

$$(\mathfrak{S}) \text{ und } (A^2 B^2 C^2 \mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{O}\mathfrak{N}),$$

also K^4 durch die verwandten

$$(ABCS) \text{ und } (MNQR)$$

zweiter Ordnung erzeugen. Auf gleiche Art gelangt man, wenn $S'S''S'''$ drei ganz beliebige Punkte von K^4 sind, zu zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln

$$(SS'S''S''') \text{ und } (M'N'P'Q'),$$

die K^4 erzeugen und bei denen $SS'S''S'''M'$ beliebig sind.

14. *a)* Aufgabe. Gegeben seien die Punkte $A_1 \dots A_{12} B_1 \dots B_5 S$; man soll vier Punkte $X_1 \dots X_4$ finden, so dass das Büschel vierter Ordnung $(A_1 \dots A_{12} X_1 \dots X_4)\{B_1 \dots B_5\} \barwedge S(B_1 \dots B_5)$.

Durch $SB_1 B_2 B_3 B_4$ ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$ bestimmt; wir nehmen $A_1 \dots A_{12} B_1$ und $A_1 \dots A_{12} B_2$ zu Grundpunkten zweier Büschel vierter Ordnung, deren übrige Grundpunkte $B'_1 B''_1 B'''_1$ und $B'_2 B''_2 B'''_2$ sein mögen, und ordnen die durch $B_2 B_3 B_4$, resp. $B_1 B_3 B_4$ gehenden Curven derselben den Strahlen SB_2, SB_3, SB_4, resp. SB_1, SB_3, SB_4 zu. Darauf bestimmen wir die Curven jener Büschel, welche den Strahlen SB_1, resp. SB_2 entsprechen. Dann ist

$$(A_1 \dots A_{12} B_1 B'_1 B''_1 B'''_1)\{B_1 B_2 B_3 B_4\} \barwedge (A_1 \dots A_{12} B_2 B'_2 B''_2 B'''_2)\{B_1 B_2 B_3 B_4\}$$
$$\barwedge S(B_1 B_2 B_3 B_4).$$

Der Ort der Schnittpunkte der homologen Curven der beiden Büschel vierter Ordnung ist eine Curve K^8 achter Ordnung, welche $A_1 \dots A_{12}$ zu Doppelpunkten hat und durch $B_1 B_2 B_3 B_4 B'_1 B''_1 B'''_1 B'_2 B''_2 B'''_2$ geht. In gleicher Weise finden wir eine Curve K_1^8 achter Ordnung als Ort der Schnittpunkte homologer Curven der projectivischen Büschel vierter Ordnung

$$(A_1 \dots A_{12} B_1 B'_1 B''_1 B'''_1)\{B_1 B_2 B_3 B_5\}$$

und

$$(A_1 \dots A_{12} B_2 B'_2 B''_2 B'''_2)\{B_1 B_2 B_3 B_5\},$$

die beide zum Büschel $S(B_1 B_2 B_3 B_5)$ in projectivischer Beziehung stehen. Die Curven K^8 und K_1^8 haben die zwölf Punkte $A_1 \dots A_{12}$ zu Doppelpunkten und schneiden sich ausserdem in $B_1 B'_1 B''_1 B'''_1$, $B_2 B'_2 B''_2 B'''_2$, $B_3 B'_3 B''_3 B'''_3$, wenn die letzten drei Punkte die Schnittpunkte der durch B_3 gehenden Curven sind. Dies sind im Ganzen 60 Schnittpunkte; die übrigen vier Schnittpunkte sind die gesuchten Punkte $X_1 X_2 X_3 X_4$.

b) Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $A_1 \dots A_{11} B_1 \dots B_7 S$; man soll fünf Punkte $X_1 \dots X_5$ finden, so dass das Büschel vierter Ordnung $(A_1 \dots A_{11} X_1 \dots X_5)\{B_1 \dots B_7\} \barwedge S(B_1 \dots B_7)$ ist.

Nach der vorigen Aufgabe findet man

$$(A_1 \dots A_{11} B_1 B'_1 B''_1 B'''_1 B''''_1)\{B_2 B_3 B_4 B_5 B_6\} \barwedge S(B_2 B_3 B_4 B_5 B_6),$$
$$(A_1 \dots A_{11} B_2 B'_2 B''_2 B'''_2 B''''_2)\{B_1 B_3 B_4 B_5 B_6\} \barwedge S(B_1 B_3 B_4 B_5 B_6).$$

Man bestimme die beiden Curven, welche den Strahlen SB_1, resp. SB_2 entsprechen, und hat dann

$(A_1 \dots A_{11} B_1 \dots B''''_1) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6\} \barwedge (A_1 \dots A_{11} B_2 \dots B''''_2) \{B_1 \dots B_6\}.$

Beide Büschel erzeugen eine Curve achter Ordnung, auf welcher $X_1 \dots X_5$ liegen müssen. Die durch B_1 gehenden Curven schneiden sich in vier Punkten $P_1 Q_1 R_1 S_1$, welche mit $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$ in einer Curve vierter Ordnung liegen müssen, und die durch B_2 gehenden Curven schneiden sich in $P_2 Q_2 R_2 S_2$, die gleichfalls mit $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$ auf einer Curve vierter Ordnung liegen müssen. In gleicher Weise findet man zwei Büschel vierter Ordnung

$$(A_1 \dots A_{11} B_1 \beta'_1 \beta''_1 \beta'''_1 \beta''''_1) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_7\}$$
$$\barwedge (A_1 \dots A_{11} B_2 \beta'_2 \beta''_2 \beta'''_2 \beta''''_2) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_7\}.$$

Diese erzeugen auch eine Curve K_1^8, auf welcher $X_1 \dots X_5$ liegen müssen. Die durch B_1, resp. B_2 gehenden Curven mögen sich schneiden in $P'_1 Q'_1 R'_1 S'_1$, resp. $P'_2 Q'_2 R'_2 S'_2$, dann müssen diese Punkte auf solchen Curven vierter Ordnung liegen, welche durch $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$ gehen. Daher findet man die gesuchten Punkte $X_1 \dots X_5$ als Schnittpunkte zweier Curven vierter Ordnung, welche durch die Punkte

$$A_1 \dots A_{11} P_1 Q_1 R_1 S_1 P'_1 Q'_1 R'_1 S'_1 \text{ und } A_1 \dots A_{11} P_2 Q_2 R_2 S_2 P'_2 Q'_2 R'_2 S'_2$$

bestimmt sind.

Man vergl. über diese Auflösung: „Kortum, Aufgaben dritten und vierten Grades“.

c) Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $A_1 \dots A_{10} B_1 \dots B_9 S$; man soll sechs Punkte $X_1 \dots X_6$ finden, so dass die Büschel vierter und erster Ordnung

$$(A_1 \dots A_{10} X_1 \dots X_6) \{B_1 \dots B_9\} \text{ und } S(B_1 \dots B_9)$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

Mittelst der vorigen Aufgabe findet man

$$(A_1 \dots A_{10} B_1 B'_1 \dots B_1^{(5)}) \{ B_2 \dots B_7 B_8\} \barwedge S(B_2 \dots B_7 B_8),$$
$$(A_1 \dots A_{10} B_2 B'_2 \dots B_2^{(5)}) \{B_1 B_3 \dots B_7 B_8\} \barwedge S(B_1 B_3 \dots B_7 B_8).$$

Man suche in beiden Büscheln die den Strahlen SB_1, resp. SB_2 entsprechenden Curven und erhält dadurch zwei dem Büschel $S(B_1 \dots B_8)$ und daher sich selbst projectivische Büschel vierter Ordnung, welche eine Curve K^8 mit den Doppelpunkten $A_1 \dots A_{10}$ erzeugen, auf der $X_1 \dots X_6$ liegen. — Legt man durch die Schnittpunkte zweier homologen Curven und durch $A_1 \dots A_{10}$ irgend eine Curve vierter Ordnung, so bestimmen ihre Schnittpunkte mit K^8 und die Punkte $A_1 \dots A_{10}$ die Grundpunkte eines zum Büschel (S) projectivischen Büschels vierter Ordnung, welches mit diesem eine Curve fünfter Ordnung durch die 19 Punkte

$$A_1 \dots A_{10} B_1 \dots B_8 S$$

erzeugt. Die auf diese Art erhaltenen Curven fünfter Ordnung, welche durch dieselben 19 Punkte gehen, schneiden K^8 in denselben Punkten. Oder: Durch die Schnittpunkte

zweier Curven fünfter Ordnung lassen sich unendlich viele solcher Curven legen.

Die durch B_1 und B_2 gehenden Curven der Büschel vierter Ordnung, welche K^8 erzeugen, schneiden sich noch in $P_1Q_1R_1S_1T_1$ und $P_2Q_2R_2S_2T_2$.

In gleicher Weise suche man

$$(A_1 \dots A_{10} B_1 \beta'_1 \dots \beta_1^{(5)}) \{ B_2 \dots B_7 B_9\} \overline{\wedge} S(B_2 \dots B_7 B_9),$$
$$(A_1 \dots A_{10} B_2 \beta'_2 \dots \beta_2^{(5)}) \{B_1 B_3 \dots B_7 B_9\} \overline{\wedge} S(B_1 B_3 \dots B_7 B_9),$$

ferner die den Strahlen SB_1 und SB_2 entsprechenden Curven, so wird

$$(A_1 \dots \beta_1^{(5)}) \{B_1 \dots B_7 B_9\} \overline{\wedge} (A_1 \dots \beta_2^{(5)}) \{B_1 \dots B_7 B_9\}.$$

Beide Büschel erzeugen eine Curve K_1^8, auf der $X_1 \dots X_6$ liegen. Die durch B_1 und B_2 gehenden Curven treffen sich noch in $P'_1Q'_1R'_1S'_1T'_1$ und $P'_2Q'_2R'_2S'_2T'_2$. Man findet dann die gesuchten Punkte $X_1 \dots X_6$ als Durchschnitte zweier Curven vierter Ordnung, welche durch die Punkte

$$A_1 \dots A_{10} P_1 Q_1 R_1 S_1 T_1 P'_1 Q'_1 R'_1 S'_1 T'_1$$

und

$$A_1 \dots A_{10} P_2 Q_2 R_2 S_2 T_2 P'_2 Q'_2 R'_2 S'_2 T'_2$$

hindurchgehen.

Hieraus folgt in Verbindung mit 43:

45. *a)* Durch 20 Punkte lässt sich vermittelst zweier Büschel erster und vierter Ordnung nur eine Curve fünfter Ordnung legen.

b) Von den unendlich vielen Curven fünfter Ordnung, welche durch 19 Punkte gehen, geht nur eine durch einen zwanzigsten.

46. *a)* Aufgabe. Gegeben seien die Punkte $A_1 \dots A_7 B_1 \dots B_5 S_1 \dots S_4$; man soll zwei Punkte $X_1 X_2$ finden, so dass die Büschel dritter und zweiter Ordnung

$$(A_1 \dots A_7 X_1 X_2) \{B_1 \dots B_5\} \text{ und } (S_1 \dots S_4) \{B_2 \dots B_5\}$$

sich in projectivischer Beziehung befinden.

b) Aufgabe. Gegeben seien die Punkte $A_1 \dots A_6 B_1 \dots B_7 S_1 \dots S_4$; man soll drei Punkte $X_1 X_2 X_3$ finden, so dass die Büschel dritter und zweiter Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 X_1 X_2 X_3) \{B_1 \dots B_7\} \text{ und } (S_1 \dots S_4) \{B_1 \dots B_7\}$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

c) Aufgabe. Gegeben seien die Punkte $A_1 \dots A_5 B_1 \dots B_9 S_1 \dots S_4$; man soll vier Punkte $X_1 X_2 X_3 X_4$ finden, so dass die Büschel dritter und zweiter Ordnung

$$(A_1 \dots A_5 X_1 \dots X_4) \{B_1 \dots B_9\} \text{ und } (S_1 \dots S_4) \{B_1 \dots B_9\}$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

d) Aufgabe. Gegeben seien die Punkte $A_1 \dots A_4 B_1 \dots B_{11} S_1 \dots S_4$; man soll $X_1 \dots X_5$ so bestimmen, dass

$(A_1 \ldots A_4 X_1 \ldots X_5)\{B_1 \ldots B_{11}\} \overline{\wedge} (S_1 \ldots S_4)\{B_1 \ldots B_{11}\}$.

e) Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $A_1 A_2 A_3 B_1 \ldots B_{13} S_1 \ldots S_4$; man soll die sechs Punkte $X_1 \ldots X_6$ so bestimmen, dass

$(A_1 A_2 A_3 X_1 \ldots X_6)\{B_1 \ldots B_{13}\} \overline{\wedge} (S_1 \ldots S_4)\{B_1 \ldots B_{13}\}$.

Man löst die letzten fünf Aufgaben wie die vorhergehenden.

47. Die durch projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugten Curven fünfter Ordnung können zerfallen in eine Curve erster und vierter Ordnung oder zweiter und dritter Ordnung.

Ist K^5 eine Curve fünfter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugt ist, so lege man durch vier beliebige Punkte $ABCD$ zwei Kegelschnitte $\varkappa^2$ und λ^2, welche K^5 noch in $A_1 \ldots A_6$ und $B_1 \ldots B_6$ schneiden. Durch $A_1 \ldots A_6$ und drei Punkte $C_1 C_2 C_3$ von K^5 lege man eine Curve λ^3 dritter Ordnung und betrachte $(\lambda^2 \lambda^3)$ auch als eine Curve fünfter Ordnung, so lassen sich durch die Schnittpunkte von K^5 und $(\lambda^2 \lambda^3)$ nach dem Satze in 44 *c)* unendlich viele Curven fünfter Ordnung legen. Die eine derselben besteht aus $\varkappa^2$ und einer Curve $\varkappa^3$ dritter Ordnung, welche daher λ^3 ausser in $C_1 C_2 C_3$ noch in sechs Punkten $C_4 \ldots C_9$ schneiden muss. Lässt man Alles fest bis auf den Kegelschnitt λ^2, so ändert sich, während dieser das Büschel $(ABCD)$ durchläuft, auch $\varkappa^3$, welche Curve das Büschel $(C_1 \ldots C_9)$ durchläuft. Die Curven der Büschel $(\lambda^2 \ldots)$ und $(\varkappa^3 \ldots)$ schneiden sich daher stets auf K^5 und es folgt:

Ist eine Curve K^5 fünfter Ordnung durch zwei projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei Büschel zweiter und dritter Ordnung erzeugt werden. Von den Grundpunkten sind die des Büschels zweiter Ordnung und drei des Büschels dritter Ordnung beliebig auf der Curve zu wählen.

48. Eine Curve K^6 sei durch zwei projectivische Büschel fünfter und erster Ordnung erzeugt. Dann leiten wir mit Hilfe derselben Methoden den Satz ab:

a) Legt man durch einen Punkt S von K^6 einen variablen Strahl x, welcher K^6 in fünf Punkten schneidet, und durch diese und 15 feste Punkte von K^6 eine Curve X^5 fünfter Ordnung, so durchläuft dieselbe die Curven eines Büschels fünfter Ordnung, dessen sämmtliche Grundpunkte auf K^6 liegen.

b) Jeder Kegelschnitt K^2 wird von K^6 in zwölf Punkten geschnitten.

Fünf Schnittpunkte seien $A_1 \ldots A_4 B$. Man erzeuge K^6 durch die projectivischen Büschel fünfter und erster Ordnung $(A_1 \ldots A_4 \ldots)$ und (B). Jede Curve des ersten schneidet K^2 in sechs Punkten. Durch diese und drei feste Punkte legen wir Curven dritter Ordnung, die ein Büschel

bilden und projectivisch auf (B) bezogen sind. Beide erzeugen eine Curve vierter Ordnung, welche K^2 in acht Punkten schneidet.

Hieraus folgt, wie in 47:

c) Die Curve K^6 kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel zweiter und vierter Ordnung erzeugt werden.

d) Die Curve K^6 wird von einer beliebigen Curve dritter Ordnung K^3 in 18 Punkten geschnitten.

Es seien $ABCD$ vier Schnittpunkte von K^3 und K^6. Wir denken K^6 erzeugt durch ein Kegelschnittbüschel $(ABCD)$ und ein projectivisches Büschel vierter Ordnung. Die Kegelschnitte von $(ABCD)$ treffen K^3 in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien sich in einem Punkte E von K^3 schneiden und ein zu $(ABCD)$ projectivisches Büschel (E) bilden. Dieses erzeugt mit dem Büschel vierter Ordnung eine Curve fünfter Ordnung, welche K^3 in 15 Punkten schneidet, die bis auf E gleichzeitig Schnittpunkte von K^6 und K^3 sind.

Wie in 44) folgt:

e) Durch 26 Punkte lassen sich unendlich viele Curven sechster Ordnung mittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung legen. Durch die Schnittpunkte zweier von ihnen gehen alle übrigen.

f) Durch 27 Punkte lässt sich vermittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung nur eine Curve sechster Ordnung legen.

g) Alle Curven sechster Ordnung, welche durch 17 Punkte einer Curve K^3 dritter Ordnung gelegt werden können, treffen diese noch in einem festen 18. Punkte.

Man nehme ausserhalb K^3 beliebige neun Punkte, so bestimmen sie mit jenen 17 die Grundpunkte eines Büschels sechster Ordnung. Da zu den Curven desselben auch diejenige gehört, welche aus K^3 und der Curve X^3 besteht, welche durch die angenommenen neun Punkte gelegt werden kann, so ist der Satz bewiesen:

h) Wenn zwei Curven K^6 und K_1^6 sechster Ordnung, die mittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung erzeugt sind, sich in 18 Punkten einer Curve K^3 schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auch auf einer Curve dritter Ordnung.

Eine auf die genannte Art erzeugte Curve sechster Ordnung kann zerfallen in zwei Curven dritter Ordnung. Man betrachte K^3 und eine beliebige Curve X^3 dritter Ordnung als eine Curve sechster Ordnung, dann lassen sich durch die Schnittpunkte von K^6 und $(K^3 X^3)$ unendlich

viele Curven sechster Ordnung legen. Da es aber durch 18 Punkte ebensoviele Curven sechster Ordnung giebt, als Curven dritter Ordnung in einer Ebene (nämlich ∞^9), so muss unter ihnen auch K_1^6 vorkommen.

i) Die Curve K^6, welche durch zwei projectivische Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel dritter Ordnung erzeugt werden.

Wir nehmen auf K^6 sieben beliebige feste Punkte $A_1 \dots A_7$ und einen beliebigen achten A_8 variabel und betrachten $A_1 \dots A_8$ als Basis eines Büschels dritter Ordnung, dessen neunter Grundpunkt A_9 sein mag.

Wenn A_8 die Curve K^6 durchläuft, so durchläuft A_9 (vgl. Crelle's Journal Jahrg. 1873, „Bemerkung zu der Geiser'schen Abhandlung", von Milinowski) eine Curve $\mathfrak{K}$. Diese schneidet K^6. Dadurch erhält man zusammengehörige Punkte A_8 und A_9 und also auf K^6 die Basis eines Büschels dritter Ordnung.

Durch $A_1 \dots A_9$ legen wir zwei Curven K^3 und K_1^3 dritter Ordnung, welche K^6 noch in $B_1 \dots B_9$ und $C_1 \dots C_9$ schneiden. Dann lassen sich wegen *e)* und *g)* durch die 27 Punkte $A_1 \dots A_9 B_1 \dots B_9 C_1 \dots C_9$ unendlich viele Curven sechster Ordnung legen, die K^6 wegen *h)* noch in neun Punkten $X_1 \dots X_9$ schneiden, welche sowohl mit $B_1 \dots B_9$ auf einer B^3, als mit $C_1 \dots C_9$ auf einer Curve C^3 liegen. Daraus folgt, dass $X_1 \dots X_9$ Grundpunkte eines Büschels dritter Ordnung sind. Jede durch $X_1 \dots X_9$ gelegte Curve dritter Ordnung muss K^6 noch in solchen neun Punkten $Z_1 \dots Z_9$ schneiden, welche mit $A_1 \dots A_9$ auf einer Curve dritter Ordnung liegen.

Daher kann K^6 durch die Büschel dritter Ordnung $(A_1 \dots A_9)$ und $(X_1 \dots X_9)$ erzeugt werden.

Von den Grundpunkten sind $A_1 \dots A_7$ und einer der neun Punkte X beliebig.

49. Wenn wir die angewendeten Methoden weiter benutzen, so gelangen wir zu analogen Sätzen über Curven höherer Ordnungen und können schliesslich folgende ganz allgemeinen Sätze aufstellen:

a) Wenn eine Curve C^n n^{ter} Ordnung durch zwei projectivische Büschel erster und $(n-1)^{ter}$ Ordnung erzeugt ist und man legt durch einen beliebigen Punkt X von C^n einen variablen Strahl x, welcher C^n in $n-1$ Punkten schneidet, durch diese und $\frac{n(n-1)}{2}$ feste Punkte von C^n Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, so bilden diese ein Büschel, dessen Grundpunkte auf K^6 liegen.

b) Diese Curve K^6 kann auch auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel zweiter und $(n-2)^{ter}$

bilden und projectivisch auf (B) bezogen sind. Beide erzeugen eine Curve vierter Ordnung, welche K^2 in acht Punkten schneidet.

Hieraus folgt, wie in 47:

c) **Die Curve K^6 kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel zweiter und vierter Ordnung erzeugt werden.**

d) **Die Curve K^6 wird von einer beliebigen Curve dritter Ordnung K^3 in 18 Punkten geschnitten.**

Es seien $ABCD$ vier Schnittpunkte von K^3 und K^6. Wir denken K^6 erzeugt durch ein Kegelschnittbüschel $(ABCD)$ und ein projectivisches Büschel vierter Ordnung. Die Kegelschnitte von $(ABCD)$ treffen K^3 in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien sich in einem Punkte E von K^3 schneiden und ein zu $(ABCD)$ projectivisches Büschel (E) bilden. Dieses erzeugt mit dem Büschel vierter Ordnung eine Curve fünfter Ordnung, welche K^3 in 15 Punkten schneidet, die bis auf E gleichzeitig Schnittpunkte von K^6 und K^3 sind.

Wie in 44) folgt:

e) **Durch 26 Punkte lassen sich unendlich viele Curven sechster Ordnung mittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung legen. Durch die Schnittpunkte zweier von ihnen gehen alle übrigen.**

f) **Durch 27 Punkte lässt sich vermittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung nur eine Curve sechster Ordnung legen.**

g) **Alle Curven sechster Ordnung, welche durch 17 Punkte einer Curve K^3 dritter Ordnung gelegt werden können, treffen diese noch in einem festen 18. Punkte.**

Man nehme ausserhalb K^3 beliebige neun Punkte, so bestimmen sie mit jenen 17 die Grundpunkte eines Büschels sechster Ordnung. Da zu den Curven desselben auch diejenige gehört, welche aus K^3 und der Curve X^3 besteht, welche durch die angenommenen neun Punkte gelegt werden kann, so ist der Satz bewiesen:

h) **Wenn zwei Curven K^6 und K_1^6 sechster Ordnung, die mittelst projectivischer Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung erzeugt sind, sich in 18 Punkten einer Curve K^3 schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auch auf einer Curve dritter Ordnung.**

Eine auf die genannte Art erzeugte Curve sechster Ordnung kann zerfallen in zwei Curven dritter Ordnung. Man betrachte K^3 und eine beliebige Curve X^3 dritter Ordnung als eine Curve sechster Ordnung, dann lassen sich durch die Schnittpunkte von K^6 und (K^3X^3) unendlich

Ist α_d derjenige Strahl des Büschels (A), welcher durch den Doppelpunkt geht, so muss die ihm entsprechende Curve $\alpha^3{}_d$ ihn im Doppelpunkte berühren und daher geht auch die conische Polare $\alpha^2{}_d$ von A nach $\alpha^3{}_d$ durch den Doppelpunkt hindurch. Da sich also α_d und $\alpha^2{}_d$ im Doppelpunkte schneiden, so ist dieser ein Punkt von A^3.

52. **Besteht C^4 aus einer Curve C^3 dritter Ordnung und einer Geraden g, so zerfällt die erste Polare eines Punktes A von g in diese Gerade und einen Kegelschnitt.**

Die Curven α^3... haben in diesem Falle drei ihrer Grundpunkte auf g und die übrigen sechs, die auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegen müssen, auf C^3, und dem Strahl g von (A) entspricht im Büschel $(\alpha^3 \ldots)$ die Curve $(\mathfrak{K}^2, g)$. Weiter ist die conische Polare von A nach $(\mathfrak{K}^2, g)$ ein Geradenpaar (g', g). Da dieses im Kegelschnittbüschel $(\alpha^2 \ldots)$ dem Strahl g von (A) entspricht, so ist g ein Theil der ersten Polare von A.

53. **Besteht C^4 aus vier Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$, so zerfällt die erste Polare A^3 eines Punktes A von g_1 in g_1 und einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$.**

Das Büschel $(\alpha^3 \ldots)$ zerfällt in diesem Falle in ein Strahlenbüschel (B), dessen Scheitel auch auf g_1 liegen mag und jeder beliebige Punkt dieser Geraden sein kann, und in zwei feste Gerade g_3 und g_4. Es sind die Strahlenbüschel $A(\alpha \ldots)$ und $B(\beta \ldots)$ in projectivischer Beziehung und perspectivischer Lage, weil sie g_2 erzeugen. Jeder Strahl β bestimmt mit $g_3 g_4$ eine dreiseitige Curve und die conischen Polaren α^2 von A nach diesen sämmtlichen dreiseitigen Curven bilden ein Büschel, von dessen Grundpunkten zwei, M und N, auf AB liegen. Zieht man von A nach $(g_3 g_4)$, welchen Punkt wir Δ nennen wollen, die Gerade a und ist $g_3 g_4$ durch aa' harmonisch getrennt, so berühren alle α^2 die Gerade a' in Δ. Dem Strahl AB von (A) entspricht im Büschel $(\alpha^2 \ldots)$ das Geradenpaar (AB, a'), so dass also A^3 in AB und einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$ zerfallen muss, welcher durch die drei Schnittpunkte von $g_2 g_3 g_4$ geht.

Nehmen wir jetzt an, g_2 gehe durch Δ_{34}, so dass also die drei Ecken des Dreiseits $g_2 g_3 g_4$ in Δ_{34} vereinigt sind, so müssen alle Schnittpunkte von $\mathfrak{K}^2$ mit $g_2 g_3 g_4$ in Δ liegen und dies ist nur möglich, wenn $\mathfrak{A}^2$ in ein Geradenpaar zerfällt, dessen Scheitel in Δ_{34} liegt. In diesem Falle entspricht nämlich dem Strahl $A\Delta$ von (A) das Geradenpaar ΔM und ΔN, so dass $\mathfrak{A}^2$ in Δ_{34} einen Doppelpunkt hat und also ein Geradenpaar wird.

Wenn wir endlich noch annehmen, dass auch g_1 durch Δ geht, so folgt:

54. **Besteht C^4 aus vier sich in einem Punkte schneidenden Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$, so zerfällt die erste Polare A^3 eines Punktes A einer derselben in diese und zwei andere Geraden, die sich in Δ schneiden.**

Wenn eine Curve C^4 einen dreifachen Punkt Δ_3 hat, so kann man ~~sich dieselbe erzeugt~~ denken durch ein Strahlenbüschel $A(\alpha \ldots)$ und ein

projectivisches kubisch-involutorisches Strahlenbüschel (Δ_3). Die conischen Polaren von A nach den einzelnen Strahlengruppen des involutorischen Büschels bilden eine quadratische Strahleninvolution, welche zu (A) in projectivischer Beziehung steht und mit diesem Büschel die Curve A^3 erzeugt, die in Δ_3 einen Doppelpunkt hat. Also:

55. Hat eine Curve C^4 einen dreifachen Punkt, so hat die erste Polare A^3 eines Punktes A derselben jenen zum Doppelpunkte.

Dieselbe Curve C^4 können wir uns erzeugt denken durch ein Strahlenbüschel $\Delta_3(\alpha\ldots)$ und ein projectivisches Büschel von Curven dritter Ordnung $(\alpha^3\ldots)$, die Δ_3 zum gemeinschaftlichen Doppelpunkt haben. Den Tangenten $\tau\tau_1\tau_2$ von C^4 in Δ_3 entsprechen diejenigen Curven des Büschels $\tau^3\tau_1^3\tau_2^3$, welche C^4 in Δ_3 berühren. In dem Büschel conischer Polaren $(\alpha^2\ldots)$, welche aus den Paaren von Doppelpunktstangenten der Curven $\alpha^3\ldots$ bestehen, sind die Polaren $\tau^2\tau_1^2\tau_2^2$ von Δ_3 nach $\tau^3\tau_1^3\tau_2^3$ die drei Paare von Doppelpunktstangenten dieser Curven, von denen je der eine Theil C^4 berühren muss. Da sie den Geraden $\tau\tau_1\tau_2$ entsprechen, so folgt:

56. Die erste Polare des dreifachen Punktes Δ_3 besteht aus den drei Tangenten, die man in diesem Punkte an C^4 ziehen kann.

57. Sind A_0 und A_1 zwei beliebige Punkte von C^4, A_0^3 und A_1^3 ihre ersten Polaren, so fällt die conische Polare A^2_{01} von A_0 nach A_1^3 mit der conischen Polare A^2_{10} von A_1 nach A_0^3 zusammen.

Durch A_0 ziehen wir eine beliebige Gerade g_0, welche C^4 noch in $B_0C_0D_0$ schneidet, und verbinden A_1 mit A_0 und diesen Punkten durch die Geraden $a_0b_0c_0d_0$. Diese schneiden C^4 noch in acht Punkten, die auf einer Curve C^3 liegen, welche mit C^4 in A_1 eine vierpunktige Berührung hat. Wir betrachten $(a_0b_0c_0d_0)$ und (g_0C^3) als Curven vierter Ordnung, sie bilden mit C^4 ein Büschel, welches von jeder Geraden durch A_0 sowohl, wie durch A_1 in den Punktgruppen einer kubischen Involution geschnitten wird, weil A_0 und A_1 zu den Grundpunkten dieses Büschels gehören. Deshalb treffen die ersten Polaren von A_0 nach diesen drei Curven jede durch A_0 gelegte Gerade in drei Punktpaaren einer quadratischen Involution und bilden deshalb selbst ein Büschel. (Vergl. diese Zeitschrift Bd. XIX, 3, „Zur Theorie der kubischen und biquadratischen Involution".) Diese ersten Polaren nach C^4, $(a_0b_0c_0d_0)$ und (g_0C^3) seien A_0^3, π_0^3 und $(g_0C_0^2)$. Die Curve π_0^3 besteht aus drei in A_1 zusammenstossenden Geraden $(m_0n_0p_0)$ und die conische Polare A^2_{10} von A_1 nach A_0^3 muss mit der conischen Polaren von A_1 nach $(g_0C_0^2)$ zusammenfallen und deshalb durch die Schnittpunkte von g_0 und C_0^2 gehen. — Weiter muss die erste Polare C^4 mit der ersten Polare

von A_1 nach $(g_0 C^3)$ zusammenfallen, weil C^4 und $(g_0 C^3)$ sich auf den vier Geraden $a_0 b_0 c_0 d_0$ schneiden, und deshalb durch die Schnittpunkte von g_0 und C^3 gehen. Die conische Polare A^2_{01} von A_0 nach A_1^3 muss daher die conische Polare von A_0 nach $(g_0 C_0^2)$ in denselben beiden Punkten von g_0 treffen, so dass also A^2_{01} und A^2_{10} auf jeder durch A_0 gelegten Geraden zwei gemeinsame Punkte haben und daher zusammenfallen.

Dieser Beweis ist schon von Cremona gegeben und nur der Vollständigkeit wegen angeführt.

Wenn wir jedem Punkte von C^4 seine erste Polare zuordnen, so sind die Punkte von C^4 projectivisch auf ihre ersten Polaren bezogen. Schneidet nun eine Gerade g die Curve in $ABCD$ und sind $A^3 B^3 C^3 D^3$ ihre ersten Polaren, so ist

$$(ABCD) \overline{\wedge} (A^3 B^3 C^3 D^3).$$

Einem beliebigen Punkte P von g entspricht eine Curve P^3 des Büschels $(A^3 B^3 \ldots)$ Nennen wir $A^2 B^2 C^2 D^2 P^2$ die ersten Polaren eines beliebigen Punktes Q von C^4 nach $A^3 B^3 C^3 D^3 P^3$, so ist

$$(A^2 B^2 C^2 D^2 P^2) \overline{\wedge} (A^3 B^3 C^3 D^3 P^3).$$

Nach dem vorigen Satze sind $A^2 B^2 C^2 D^2$ auch die conischen Polaren von $ABCD$ nach der ersten Polare Q^3 von Q, also ist auch

$(A^2 B^2 C^2 D^2 Q^2) \overline{\wedge} (ABCDP)$, also auch $(A^2 B^2 C^2 D^2 Q^2) \overline{\wedge} (A^2 B^2 C^2 D^2 P^2)$. Mithin fallen Q^2 und P^2 zusammen.

Durch P ziehen wir eine andere Gerade g_0, welche C^4 in $A_0 B_0 C_0 D_0$ schneidet. Die ersten Polaren dieser Punkte $A_0^3 B_0^3 C_0^3 D_0^3$ bilden ein Büschel, in ihm sei P_0^3 diejenige Curve, so dass

$$(A_0 B_0 C_0 D_0 P) \overline{\wedge} (A_0^3 B_0^3 C_0^3 D_0^3 P_0^3).$$

Ganz wie oben folgt dann, dass die conische Polare Q^2 von P nach Q^3 mit der conischen Polare P_0^2 von Q nach P_0^3 zusammenfällt. Die Stelle von Q kann jeder Punkt von C^4 einnehmen. Daher haben P^3 und P_0^3 die Eigenschaft, dass die conischen Polaren eines jeden Punktes von C^4 nach diesen beiden Curven in einen Kegelschnitt zusammenfallen; deshalb müssen P^3 und P_0^3 auch zusammenfallen und die Büschel $(A^3 B^3 C^3 \ldots)$ und $(A_0^3 B_0^3 C_0^3 \ldots)$ haben die Curve P^3 gemeinsam, welche in jedem Büschel dem Schnittpunkt P von g und g_0 entspricht. Da g_0 eine beliebige Gerade durch P war, so folgt allgemein:

58. Eine variable Gerade g durch P schneide C^4 in $ABCD$; die ersten Polaren dieser Punkte, $A^3 B^3 C^3 D^3$, bilden ein Büschel, in welchem dem Punkte P eine bestimmte Curve P^3 entspricht, die also sämmtlichen Büscheln gemeinsam ist, welche durch die Drehung von g um P hervorgerufen werden. Wir nennen P^3 die erste Polare von P nach C^4.

59. *Die ersten Polaren aller Punkte nach C^4 bilden ein Netz.*

Es seien P_0 und P_1 zwei beliebige Punkte, P_0^3 und P_1^3 ihre ersten Polaren, P^2_{01} und P^2_{10} die conischen Polaren von P_0 nach P_1^3 und von P_1 nach P_0^3, so soll gezeigt werden, dass P^2_{01} und P^2_{10} zusammenfallen. Die Gerade $P_0 P_1$ schneide C^4 in $P_2 P_3 P_4 P_5$; die ersten Polaren dieser Punkte seien $P_2^3 P_3^3 P_4^3 P_5^3$, dann ist, wenn $P^2_{02} P^2_{03} P^2_{04} P^2_{05}$ die conischen Polaren von P_0 nach diesen Curven sind und P^2_{00} die conische Polare von P_0 nach P_0^3 ist,

$$(P_0^3 P_1^3 P_2^3 P_3^3 P_4^3 P_5^3) \barwedge (P^2_{00} P^2_{01} P^2_{02} P^2_{03} P^2_{04} P^2_{05}).$$

Ferner seien $P^2_{00} P^2_{10} P^2_{20} P^2_{30} P^2_{40} P^2_{50}$ die conischen Polaren von $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ nach P_0^3, so ist auch

$$(P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5) \barwedge (P^2_{00} P^2_{10} P^2_{20} P^2_{30} P^2_{40} P^2_{50}).$$

Da P^2_{02} mit P^2_{20}, P^2_{03} mit P^2_{30}, P^2_{04} mit P^2_{40}, P^2_{05} mit P^2_{50} zusammenfällt, weil $P_2 P_3 P_4 P_5$ Punkte von C^4 sind; da ferner

$$(P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5) \barwedge (P_0^3 P_1^3 P_2^3 P_3^3 P_4^3 P_5^3)$$

ist, so muss auch

$$(P^2_{00} P^2_{01} P^2_{02} P^2_{03} P^2_{04} P^2_{05}) \barwedge (P^2_{00} P^2_{10} P^2_{20} P^2_{30} P^2_{40} P^2_{50})$$

sein und P^2_{01} mit P^2_{10} zusammenfallen. Also:

62. Sind P_0 und P_1 zwei ganz beliebige Punkte, P_0^3 und P_1^3 ihre ersten Polaren, so fallen die conischen Polaren P^2_{01} von P_0 nach P_1^3 und P^2_{10} von P_1 nach P_0^3 in einen Kegelschnitt zusammen, welcher die gemischte conische Polare von P_0 und P_1 heisst.

Jeder Geraden g entspricht das Büschel der ersten Polaren ihrer Punkte; man nennt die neun Schnittpunkte dieser ersten Polaren die Pole von g und g die letzte oder gerade Polare eines jeden dieser neun Schnittpunkte bezüglich C^4.

Ein Punkt P_1 liege auf der letzten Polare p_{00} von P_0 nach seiner kubischen Polare P_0^3, dann muss P_0 auf der conischen Polare P^2_{10} von P_1 nach P_0^3 liegen. Diese fällt aber nach dem letzten Satze mit der conischen Polare P^2_{01} von P_0 nach der kubischen Polare P_1^3 von P_1 zusammen und daher liegt P_0 auf seiner conischen Polare P^2_{01} nach P_1^3, muss also der Berührungspunkt dieser beiden Curven sein, so dass also die kubische Polare von P_1 durch P_0 geht. Aendert sich P_1 auf p_{00}, so ändern sich auch seine kubischen Polaren, gehen aber sämmtlich durch P_0 und bilden daher ein Büschel, so dass also p_{00} die gerade Polare von P_0 nach C^4 ist. Nach der Voraussetzung ist aber p_{00} auch die gerade Polare von P_0 nach P_0^3 und daher folgt:

61. Die gerade Polare eines Punktes nach seiner kubischen Polare fällt mit seiner geraden Polare nach C^4 zusammen.

Jetzt soll angenommen werden, dass P_1 auf der conischen Polare P^2_{00} von P_0 nach P_0^3 liege, dann muss P_0 auf der geraden Polare von

P_1 nach P_0^3 oder, was dasselbe ist, auf der Polare auf
conischen Polare P^2_{10} nach P_0^3 liegen. Die coni
der conischen Polare P^2_{01} von P_0 nach P_1^3 zu
der Polare von P_1 nach P^2_{01}. Diese fällt
nach P^2_{11}, d. h. nach der conischen Polar
bischen Polare P_1^3 zusammen. in die gem
P_0 nach P_1^3 und daher liegt P_0 auf d
auf P^2_{11} selbst, und hieraus folgt:

62. **Liegt ein Punkt P_1 auf d andern P_0 nach seiner k auf der conischen Po kubischen Polare P_1^3.**

Man nennt die conische
kubischen Polare P_0^3 die co ... eine
Liegt ein Punkt P_1 ... Geraden zu Leitlinien
muss P_0 auf der conisch
Diese Curve fällt aber ... man durch Elimination von α
zusammen und da als
muss es auf P_1^3 sel ... $-x(1+\alpha)=0;$

63. **Liegt ein P_0, so lieg umgeke**

... $x^2-y^2)=0$

... der Geraden h ergiebt sich ganz

Denn lie
P^2_{01} oder ... in die Form
durch P ... $2z-p)y^2=0,$
gehen.
... die Doppelebenen der Involution
Is ... Fläche zusammenhängt.** Die z-Axe
ger P ... $\frac{p}{2}$ und $z=-\frac{p}{2}$ reelle Gerade der
der
Fe ... liegen auch ihre Cuspidalpunkte.
ge

... **hyperbolischen Paraboloid ge- ... Paaren gerader Linien von ... Punkte des Paraboloids von bei ... Paares gleichweit entfernt sind ... Linienpaare bildet eine Rege ... deren Erzeugenden auf de ... stehen. Je zwei Geraden ein- ... einander in Bezug auf das P**

... Bd. 2. S. 316.

XI.

Ueber das gleichseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlsystem.

Von

Dr. Arthur Schoenflies

in Berlin.

§ 1.

Der Ort aller Punkte des Raumes, welche von zwei windschiefen Geraden gleichweit entfernt sind, ist bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Sind nämlich

$$1)\quad \begin{aligned} z-a=0,\quad y-\alpha x=0,\\ z+a=0,\quad y+\alpha x=0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden g und h, so ist

$$az+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}xy=0$$

die Gleichung des betrachteten Ortes. Setzt man noch

$$2)\quad x=(y'+x')\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad y=(y'-x')\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad z=z'$$

und

$$3)\quad a\frac{1+\alpha^2}{\alpha}=p,$$

so verwandelt sich die Gleichung des Paraboloids, wenn wir die Striche bei den neuen Coordinaten wieder weglassen, in

$$4)\quad x^2-y^2=2pz.$$

Die Gleichungen der beiden Geraden g und h sind in dem neuen Coordinatensystem

$$5)\quad \begin{aligned} z-a=0,\quad y(1-\alpha)-x(1+\alpha)=0,\\ z+a=0,\quad y(1+\alpha)-x(1-\alpha)=0. \end{aligned}$$

Sie zeigen unmittelbar, dass die Polarebene eines jeden beliebigen Punktes P der Geraden g in Bezug auf das Paraboloid durch die Gerade h hindurchgeht. Daraus folgt:

Die Geraden g und h sind Polarlinien von einander in Bezug auf das Paraboloid.

Die Aufgabe, zu einem gegebenen gleichseitigen Paraboloid die Geraden g und h zu finden, lässt unendlich viele Lösungen zu. Zwischen den gesuchten Grössen a und α besteht nämlich nur die Gleichung 3), daher existiren unendlich viele Geradenpaare der betrachteten Art. Da diese Gleichung in a vom ersten, in α vom zweiten Grade ist, so folgt, dass durch jeden Punkt der z-Axe zwei Strahlen g, resp. h laufen, welche sämmtlich die unendlich ferne Gerade der xy-Ebene schneiden, in einem Punkte, welcher durch α bestimmt ist. Demnach zeigt die Gleichung 3), dass die Schnittpunkte der Geraden g, resp. h mit der z-Axe eine einfache Punktreihe bilden, während ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden eine Involution von Punkten erzeugen. Der Ort dieser Geraden ist daher, wie **Cremona** gezeigt hat,* eine Regelfläche dritter Ordnung, welche jene beiden Geraden zu Leitlinien und die z-Axe zur Doppelgeraden hat.

Die Gleichung dieser Fläche findet man durch Elimination von α aus den Gleichungen

$$z = \frac{\alpha p}{1+\alpha^2}, \quad y(1-\alpha) - x(1+\alpha) = 0;$$

man erhält

6) $$2z(x^2+y^2) + p(x^2-y^2) = 0$$

als den Ort der Geraden g; als Ort der Geraden h ergiebt sich ganz dieselbe Fläche.

Bringen wir die letzte Gleichung in die Form

$$(2z+p)x^2 + (2z-p)y^2 = 0,$$

so finden wir, dass $x=0$ und $y=0$ die Doppelebenen der Involution von Ebenen sind, welche mit der Fläche zusammenhängt.** Die z-Axe ist nur zwischen den Punkten $z=\frac{p}{2}$ und $z=-\frac{p}{2}$ reelle Gerade der Fläche. In diesen beiden Punkten liegen auch ihre Cuspidalpunkte. Demnach ergiebt sich:

Zu jedem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid gehört eine unendliche Menge von Paaren gerader Linien von der Eigenschaft, dass alle Punkte des Paraboloids von beiden Geraden eines jeden Paares gleichweit entfernt sind. Die Gesammtheit dieser Geradenpaare bildet eine Regelfläche R_3 vom dritten Grade, deren Erzeugenden auf der Doppelgeraden senkrecht stehen. Je zwei Geraden eines Paares sind Polarlinien von einander in Bezug auf das Paraboloid.

---

* *Atti del R. Istit. Lomb.* Bd. 2, S. 291.

** *Salmon,* Analyt. Geometrie des Raumes Bd. 2, S. 316.

§ 2.

Wir betrachten irgend eine beliebige Gerade g der Fläche R_3 und eine der beiden Geradenschaaren des Paraboloids. Auf jeder dieser Geraden giebt es einen Punkt, welcher von g den kürzesten Abstand hat, und dazu einen Strahl, welcher diesen Punkt mit dem entsprechenden Punkte von g verbindet, der also die kürzeste Entfernung beider Geraden enthält. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine Curve und die Gesammtheit jener Strahlen eine geradlinige Fläche.

Um diese Gebilde zu untersuchen, stellen wir das gleichseitige Paraboloid dar durch die Gleichungen

$$1)\qquad x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},\quad z=\frac{uv}{2p}.$$

Dann giebt $u=const.$ das eine System der geraden Linien und $v=const.$ das andere. Die Gleichungen einer Geraden u sind

$$2)\qquad \begin{aligned} x-\frac{u}{2} &= \frac{p}{R_1}r_1, \\ y-\frac{u}{2} &= -\frac{p}{R_1}r_1, \quad R_1^2=u^2+2p^2, \\ z &= \frac{u}{R_1}r_1, \end{aligned}$$

und die der Geraden g

$$3)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{1-\alpha}{R}r, \\ y &= \frac{1+\alpha}{R}r, \quad R^2=2(1+\alpha^2), \\ z-a &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun durch d die Entfernung des Punktes $r=0$ der Geraden g vom Punkte $r_1=0$ der Geraden u, durch r', resp. r'_1 die Abscissen derjenigen Punkte beider Geraden, welche den kürzesten Abstand von einander haben, so gelten folgende Gleichungen:*

$$4)\qquad \begin{aligned} r' &= \frac{d}{sin^2(ug)}\{cos(ud)\,cos(ug)-cos(gd)\}, \\ r'_1 &= -\frac{d}{sin^2(ug)}\{cos(gd)\,cos(ug)-cos(ud)\}, \end{aligned}$$

und zwar ist in dem hier betrachteten Falle, wie sich ohne Mühe ergiebt, mit Rücksicht auf Gleichung 3), § 1,

$$cos(ug)=-a\frac{R}{R_1},\qquad sin^2(ug)=\frac{R_2^2}{R_1^2},$$

* Hesse, Analyt. [illegible]

$$d\cos(gd) = -\frac{u}{R}, \quad d\cos(ud) = \frac{au}{R_1},$$

wo

5) $$R_2^2 = u^2 + 2\frac{p^2}{1+\alpha^2}$$

gesetzt ist. Daher wird

6) $$r' = \frac{u}{R},$$

7) $$r'_1 = 0.$$

Die letzte Gleichung lehrt, dass r'_1 von a und α ganz unabhängig ist, d. h. der Werth von r'_1 ändert sich nicht, wenn wir g durch eine andere Gerade der Fläche R_3 ersetzen. Auf jeder Geraden u fallen also die Punkte, welche von den einzelnen Geraden der Regelfläche den kürzesten Abstand haben, in einen einzigen zusammen. Seine Gleichungen ergeben sich in der Form

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = \frac{u}{2}, \quad z = 0.$$

Die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine gerade Linie, nämlich die Gerade $v = 0$. Analoge Resultate gelten für die Geraden $v = const.$ Demgemäss ergiebt sich:

Auf jeder Geraden des Paraboloids giebt es einen bestimmten Punkt, welcher zugleich von allen Geraden der Fläche R_3 die kürzeste Entfernung hat. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet für jede Regelschaar des Paraboloids eine gerade Linie, nämlich für die Geraden u die Gerade $v = 0$, und für die Geraden v die Gerade $u = 0$.

Seien nun α_1, β_1, γ_1 die Richtungscosinus des Strahles s, der die Punkte kürzesten Abstandes auf g und einer Geraden u mit einander verbindet, so ist

$$\alpha_1 = \frac{(1+\alpha)u}{RR_2}, \quad \beta_1 = -\frac{(1-\alpha)u}{RR_2}, \quad \gamma_1 = -\frac{2p}{RR_2},$$

und da die Gerade s durch den Punkt $r_1 = 0$ auf w hindurchgeht, so sind ihre Gleichungen

8) $$x - \frac{u}{2} = \frac{(1+\alpha)u}{RR_2}s, \quad y - \frac{u}{2} = -\frac{(1-\alpha)u}{RR_2}s, \quad z = -\frac{2p}{RR_2}s.$$

Eliminiren wir aus ihnen u und s, so erhalten wir die von den Strahlen s gebildete Fläche, deren Erzeugungslinien also zugleich auf g und je einer Geraden u senkrecht stehen. Es ergiebt sich zunächst

$$(1-\alpha)x + (1+\alpha)y - u = 0, \quad \frac{x-y}{z} = -\frac{u}{p},$$

und hieraus

9) $$(x-y)p + z[(1-\alpha)x + (1+\alpha)y] = 0,$$

d. h. die Fläche ist wieder ein Paraboloid. Also folgt:

Alle Strahlen, welche zugleich auf der Geraden g und je einer Geraden u des gleichseitigen Paraboloids senkrecht stehen, bilden wieder ein Paraboloid.

Ebenso existirt ein Paraboloid, gebildet von den Strahlen s_1, die auf g und je einer Geraden v senkrecht stehen. Seine Gleichung ist.

10) $$(x+y)\,\alpha p - z\,[(1-\alpha)x + (1+\alpha)y] = 0.$$

Die Durchdringungscurve beider Paraboloide besteht aus vier geraden Linien; diese sind

11)
$$\begin{aligned} &1.\quad x=0,\quad y=0,\\ &2.\quad z=0,\quad t=0,\\ &3.\quad z=a,\quad (1+\alpha)x-(1-\alpha)y=0,\\ &4.\quad t=0,\quad (1-\alpha)x+(1+\alpha)y=0. \end{aligned}$$

Von diesen vier Geraden gehören jedoch nur zwei, nämlich die beiden ersten, gleichzeitig zu den Strahlen s und s_1. Hier bedeutet $t=0$, wie gewöhnlich, die Gleichung der unendlich fernen Ebene.

§ 3.

Betrachten wir in den Gleichungen 8) des letzten Paragraphen ausser u und s auch α als variabel, so liefern sie die sämmtlichen Paraboloide, welche zur Regelschaar u und den einzelnen Geraden der Fläche R_3 gehören, d. h. sämmtliche Strahlen, deren jeder gleichzeitig auf einer Geraden u und auf einer Geraden g senkrecht steht. Diese doppelt unendliche Strahlenmenge bildet ein Strahlsystem in dem von Herrn Kummer definirten Sinne,* welches wir das Strahlsystem Σ nennen wollen. Dasselbe ist in der Weise gegeben, wie es a. a. O. vorausgesetzt wird, nämlich der Punkt x, y, z und die Richtungscosinus ξ, η, ζ, welche jeden einzelnen Strahl bestimmen, sind Functionen zweier unabhängigen Variabeln u und α. Wir substituiren noch

1) $$(1+\alpha)u = u',\quad (1-\alpha)u = v',\quad 2p = q,$$

so werden, mit Unterdrückung der Striche bei den neuen Variabeln, die Gleichungen des Strahles s

2)
$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{4} + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}\,s,\\ y &= \frac{u+v}{4} - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}\,s,\\ z &= \qquad\;\; - \frac{q}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}\,s. \end{aligned}$$

Die Ordnung des Strahlsystems ist bekanntlich die Anzahl der Strahlen, welche durch einen beliebigen Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ des Raumes hin-

* Borchardt's Journal Bd. 57, S. 189 flgg.

durchgehen; diese Anzahl ist identisch mit der Anzahl der Werthepaare u, v, welche sich aus den Gleichungen 2) ergeben, wenn wir in ihnen x, y, z durch x_1, y_1, z_1 ersetzen. Wir erhalten für u und v die Gleichungen

$$3)\quad u = \frac{q}{4 z_1^2}\{(y_1 - x_1)q + 4 x_1 z_1\},\quad v = \frac{-q}{4 z_1^2}\{(y_1 - x_1)q + 4 y_1 z_1\},$$

d. h. es gehört im Allgemeinen zu jedem Werthepaare $x_1 y_1 z_1$ auch nur ein Werthepaar u, v, also geht auch nur ein Strahl durch einen beliebigen Punkt des Raumes. Das Strahlsystem ist daher von der ersten Ordnung. Nur in dem Falle, dass zugleich

$$4)\qquad z_1 = 0 \text{ und } x_1 - y_1 = 0$$

ist, wenn also der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der durch diese Gleichungen dargestellten Geraden liegt, kann eine Ausnahme eintreten. Die Untersuchung dieses Falles kann einfach in folgender Weise geführt werden. Das Strahlsystem Σ wird gebildet von der Gesammtheit der im vorigen Paragraphen, Gleichungen 8) und 9) erwähnten Paraboloide. Suchen wir nun diejenige Gerade s eines dieser Paraboloide, welche durch einen bestimmten Punkt der Geraden 4) hindurchgeht, so haben wir in den Gleichungen 8), § 2, nur u als constant zu betrachten; dann stellen sie den verlangten Strahl s dar. Eliminiren wir nun aus ihnen α und s, so erhalten wir den geometrischen Ort aller Strahlen von Σ, welche durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ hindurchgehen. Die sich ergebende Gleichung ist

$$5)\qquad (x - y)p + uz = 0,$$

also gehen durch jeden Punkt der Geraden 4) unendlich viele Strahlen des Strahlsystems, welche eine Ebene bilden. In ihr liegt auch die Gerade 4) selber.

Die Classe des Systems, d. h. die Anzahl der Strahlen, welche in einer beliebigen Ebene des Raumes liegen, wird gefunden, indem wir x, y, z in die Gleichung einer beliebigen Ebene

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$$

einsetzen und die Bedingung aufstellen, dass die linke Seite für jeden Werth von s, d. h. identisch verschwindet. Dies giebt für u und v die Gleichungen

$$6)\quad u = \frac{4\beta_1\delta_1 + (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 q}{(\alpha_1 + \beta_1)^2},\qquad v = \frac{4\alpha_1\delta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 q}{(\alpha_1 + \beta_1)^2},$$

d. h. im Allgemeinen liegt in jeder Ebene des Raumes nur ein Strahl, das Strahlsystem ist also von der ersten Classe. Eine Ausnahme kann nur dann eintreten, wenn zugleich

$$7)\qquad \alpha_1 + \beta_1 = 0,\quad \delta_1 = 0$$

oder

$$8)\qquad \alpha_1 = 0,\quad \beta_1 = 0$$

ist. Auch die Untersuchung dieser Fälle gestaltet sich am einfachsten, wenn wir auf die Paraboloide zurückgehen. Den Gleichungen 7) entsprechen alle Ebenen von der Form

9) $$x - y - \lambda z = 0,$$

wo λ ein variabler Parameter ist. Eine beliebige derselben — sie heisse ε — schneidet das durch die Gleichungen 9), § 2, dargestellte Paraboloid in den beiden Geraden

$$x - y = 0, \quad z = 0,$$
$$x - y - \lambda z = 0, \quad (1-\alpha)x + (1+\alpha)y + \lambda p = 0,$$

von denen jedoch nur die letztere, deren Gleichungen sich auch in die Form

10) $$x - y - \lambda z = 0, \quad x + y + \lambda p - \alpha(x-y) = 0$$

bringen lassen, dem System Σ angehört. Die Gesammtheit der Strahlen des Systems, welche in der Ebene ε liegen, wird von ihrem Durchschnitt mit dem Ebenenbüschel gebildet, welches die zweite der Gleichungen 10), α als variabel betrachtet, darstellt. Diese Strahlen bilden also einen Strahlenbüschel und ihre Enveloppe ist ein Punkt, welcher auf der Geraden 4) liegt.

Die Ebenen, welche den Gleichungen 8) entsprechen, werden dargestellt durch

11) $$z - d = 0,$$

sie schneiden das Paraboloid in den beiden Geraden

$$z = 0, \quad t = 0,$$
$$z = d, \quad (x-y)p + d[(1-\alpha)x + (1+\alpha)y] = 0,$$

von denen jedoch nur die erstere dem System Σ angehört. Da dieselbe von α unabhängig ist, so folgt, dass alle Paraboloide von den Ebenen 11) in derselben Geraden

12) $$z = 0, \quad t = 0,$$

d. h. der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene, geschnitten werden; also enthalten diese Ebenen nur eine Gerade.

Bedienen wir uns nun der von Plücker für die Strahlsysteme erster Ordnung eingeführten Bezeichnungen,* so ergeben sich folgende Resultate:

Alle Strahlen, welche zugleich auf einer Geraden u des gleichseitigen Paraboloids und auf einer Geraden g der Regelfläche R_3 senkrecht stehen, bilden ein Strahlsystem Σ erster Ordnung und erster Classe. Es enthält nur eine Directrix, nämlich die Gerade $x - y = 0$, $z = 0$. Alle Strahlen, welche durch einen ihrer Punkte gehen, bilden einen ebenen Strahlenbüschel, und jede Ebene, welche durch diese Ge-

* Plücker, Neue Geometrie des Raumes, § 51 flgg.

rade hindurchgeht, enthält unendlich viele Strahlen, welche sich in einem Punkte derselben schneiden.

Hieraus folgt, dass das Strahlsystem Σ mit demjenigen identisch ist, welches Plücker a. a. O. § 68 behandelt.

Man kann auch umgekehrt aus dem Strahlsystem Σ das gleichseitige Paraboloid ableiten; jeder Punkt der Geraden $x-y=0$, $z=0$ kann zum Scheitelpunkte desselben gewählt werden.

Von den mit dem Strahlsystem verbundenen Flächen, welche Herr Kummer in seiner oben erwähnten Arbeit behandelt hat, gestatten auch die Grenzflächen eine einfache Behandlung. In der quadratischen Gleichung, von deren Wurzeln sie abhängen, wird nämlich der Coefficient des mittleren Gliedes gleich Null, und daher gelingt ihre Bestimmung ohne grosse Schwierigkeit. Sie sind vom sechsten Grade. Sie besitzen eine vierfache Gerade $x-y=0$, $z=0$ und eine Doppelgerade $z=0$, $t=0$. Sie können als das Erzeugniss zweier projectivischen Flächenbüschel betrachtet werden, nämlich einer Involution von Ebenen, deren Axe die Gerade $x=0$, $z=0$ ist, und eines Büschels von Flächen vierter Ordnung mit doppeltem Kegelschnitt. Dieser doppelte Kegelschnitt besteht aus den beiden Geraden $x-y=0$, $z=0$, und $z=0$, $t=0$.

Ebenso existirt ein analoges Strahlsystem Σ_1 erster Ordnung und erster Classe, gebildet von den Strahlen s_1, welche aus der Regelschaar v des ursprünglichen gleichseitigen Paraboloids entspringen. Die Gleichungen der Geraden s_1 sind

$$13)\quad \begin{aligned} x-\frac{v}{2} &= \frac{(1+\alpha)v}{RR_3}s_1, \\ y+\frac{v}{2} &= -\frac{(1-\alpha)v}{RR_3}s_1, \quad R_3^2=v^2+2\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}p^2, \\ z &= -\frac{2\alpha p}{RR_3}s_1. \end{aligned}$$

Hier ist zu substituiren

$$14)\quad (1+\alpha)v=\alpha u',\quad (1-\alpha)v=\alpha v',\quad 2p=q,$$

so werden, mit Unterdrückung der Striche bei den neuen Variabeln, die Gleichungen des Strahlsystems Σ_1

$$15)\quad \begin{aligned} x &= \frac{u-v}{4}+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}, \\ y &= -\frac{u-v}{4}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}, \\ z &= -\frac{q}{\sqrt{u^2+v^2+q^2}}. \end{aligned}$$

Dasselbe besitzt ganz ähnliche Eigenschaften, wie das Strahlsystem Σ. An die Stelle der Geraden $x-y=0$, $z=0$ tritt die Gerade $x+y=0$, $z=0$.

Die Frage, welche an dieser Stelle noch behandelt werden soll, betrifft die gemeinsamen Strahlen beider Systeme. Die Lösung ergiebt sich am einfachsten durch folgende Ueberlegung. Die Strahlsysteme Σ und Σ_1 sind identisch mit der Gesammtheit der in den Gleichungen 9), resp. 10), § 2 behandelten Paraboloide. Die gesuchten Strahlen werden daher von denjenigen — den Systemen Σ und Σ_1 angehörigen — Strahlen gebildet, welche je ein Paraboloid der einen Schaar mit je einem Paraboloid der andern Schaar gemein hat. Nun haben zwei Paraboloide, welche zu demselben Werthe von α gehören, vier Geraden mit einander gemein [§ 2, 11)], von denen nur die beiden Strahlen

16) $$x=0,\quad y=0,$$ $$z=0,\quad t=0$$

beiden Systemen Σ und Σ_1 angehören. Da aber die Gleichungen derselben von α unabhängig sind, so sind diese beiden Strahlen zugleich gemeinsame Geraden irgend zweier Paraboloide der beiden Schaaren. Wenn endlich irgend zwei Paraboloide sich ausserdem in noch zwei Geraden durchdringen sollten, so sind dieselben nicht unter den Strahlen von Σ und Σ_1 enthalten. Daher folgt:

Die geradlinige Fläche, welche von den gemeinsamen Strahlen der beiden Systeme Σ und Σ_1 gebildet wird, reducirt sich auf zwei windschiefe gerade Linien, nämlich $x=0$, $y=0$ und $z=0$, $t=0$.

§ 4.

Betrachten wir in den Gleichungen 2), § 3 auch q als variabel, so stellen sie eine dreifach unendliche Strahlenmenge dar, welche einen Strahlencomplex bildet. Dieser Complex enthält die sämmtlichen Strahlsysteme Σ, welche aus den verschiedenen Paraboloiden der Schaar

1) $$x^2-y^2=2pz$$

und den entsprechenden Regelflächen der Flächenschaar

2) $$2z(x^2+y^2)+p(x^2-y^2)=0$$

entstehen, wenn wir darin auch p als veränderliche Grösse betrachten. Die Gestalt der genannten Gleichungen 2) zeigt, dass der Strahlencomplex folgende geometrischen Eigenschaften hat: Erstens gehen sämmtliche Strahlen desselben durch die Gerade $x-y=0$, $z=0$; zweitens aber gehört auch jeder Strahl, welcher diese Gerade schneidet, dem Complexe an. In der That können die Variabeln u, v, q stets in entsprechender Weise bestimmt werden. Die Gleichungen einer beliebigen Geraden dieser Art haben nämlich die Form

3) $$x=\xi+\lambda r,\quad y=\xi+\mu r,\quad z=\nu r.$$

Soll dieselbe mit einem Strahl des Complexes identisch sein, so müssen u, v, q den Gleichungen

$$4) \qquad u : -v : -q = \lambda : \mu : \nu, \quad \frac{u+v}{4} = \xi$$

genügen, was stets bewirkt werden kann. Sie zeigen, dass die Grössen u, $-v$, $-q$ den Richtungscosinus proportional sind. Der Proportionalitätsfactor bestimmt sich durch den Punkt der Geraden $x-y=0$, $z=0$, in welchem sie von dem Strahl getroffen wird. — Nur in dem Falle, dass $\lambda=\mu$ ist, könnte es scheinen, als ob die Gleichungen 4) nicht befriedigt werden könnten. In diesem Falle ist aber die Gerade 3) parallel zu $x-y=0$, $z=0$, d. h. sie geht durch den unendlich fernen Punkt derselben, und man hat, um die Gleichungen 4) zu erfüllen, u einen positiven, v einen negativen unendlich grossen Werth zu geben.

Der betrachtete Strahlencomplex ist von der ersten Ordnung und von der ersten Classe. Denn alle Strahlen, welche durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehen, bilden eine Ebene, welche den Punkt P und die Gerade $x-y=0$, $z=0$ enthält. Ferner giebt es in jeder Ebene unendlich viele Strahlen, die sämmtlich durch ihren Schnittpunkt Q mit der Geraden $x-y=0$, $z=0$ hindurchgehen. Demnach ergiebt sich:

Die Gesammtheit der Strahlsysteme Σ, welche aus den Flächenschaaren entspringen, die durch Gleichung 1) und 2) dargestellt sind, erzeugt einen Strahlencomplex erster Ordnung und erster Classe. Er wird von sämmtlichen Strahlen des Raumes gebildet, welche die Gerade $x-y=0$, $z=0$ schneiden.

Dieser Complex ist identisch mit demjenigen, welchen Plücker a. a. O. § 45 behandelt hat.

Ebenso existirt ein Complex, gebildet von den Strahlsystemen Σ_1; er enthält sämmtliche Strahlen des Raumes, welche die Gerade $x+y=0$, $z=0$ schneiden.

Beide Complexe haben ein Strahlsystem nullter Ordnung und erster Classe gemein, nämlich alle Strahlen, welche zugleich die Gerade $x-y=0$, $z=0$ und $x+y=0$, $z=0$ schneiden, d. h. alle geraden Linien der xy-Ebene. Diese beiden Geraden sind die Directricen desselben. Das Strahlsystem ist sowohl unter den Systemen Σ, als auch unter den Systemen Σ_1 ganz enthalten; es entspricht dem Falle $p=0$, in welchem das Paraboloid in zwei zu einander senkrechte Ebenen, $x-y=0$ und $x+y=0$, zerfällt.

Kleinere Mittheilungen.

XII. Einige Eigenschaften der ebenen und sphärischen Kegelschnitte.

Zwischen den ebenen und sphärischen Kegelschnitten besteht bekanntlich eine grosse Analogie, wofür auch die folgenden Sätze als Beispiel dienen können.

Ueber die Bezeichnung ist Folgendes vorauszuschicken. Ich nehme keinen Anstand, den sphärischen Grosskreis im Allgemeinen sphärische Gerade oder kurz Gerade zu nennen, wodurch die Analogie zwischen ebenen und sphärischen Sätzen mehr hervortritt. $(A_1 A_2)$ bezeichnet in der Ebene den Abstand der Punkte A_1 und A_2, auf der Kugel den kürzesten sphärischen Abstand jener Punkte. $(g_1 g_2)$ ist der von den (ebenen oder sphärischen) Geraden g_1 und g_2 eingeschlossene Winkel und (Ag) stellt den kürzesten (ebenen oder sphärischen) Abstand des Punktes A von der (ebenen oder sphärischen) Geraden g dar. Die Bezeichnung für den Inhalt eines ebenen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ ist $\Delta(A_1 A_2 A_3)$. Auf der Kugel wird unter $\Delta(A_1 A_2 A_3)$ folgende Function der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ verstanden:

$$\begin{aligned}\Delta(A_1 A_2 A_3) &= \sin(A_1 A_2)\sin(A_2 A_3)\sin(A_1 \hat{A}_2 A_3)\\ &= \sin(A_2 A_3)\sin(A_3 A_1)\sin(A_2 \hat{A}_3 A_1)\\ &= \sin(A_3 A_1)\sin(A_1 A_2)\sin(A_3 \hat{A}_1 A_2).\end{aligned}$$

Es sei in der Ebene ein beliebiger Kegelschnitt K gegeben und ausserdem eine beliebige Gerade u, welche jedoch K nicht schneidet. Dann bilden die auf u liegenden, in Bezug auf K conjugirten Punktepaare bekanntlich eine einstimmige Involution und es giebt zwei zu u symmetrische Punkte M und M', von welchen aus jene Involution durch zwei rechtwinklige involutorische Strahlenbüschel projicirt wird. Man kann wegen dieser Eigenschaft die Punkte M und M' die orthoptischen Mittelpunkte der Geraden u in Bezug auf den Kegelschnitt K nennen. Ist ebenso ein beliebiger sphärischer Kegelschnitt K gegeben und eine sphärische Gerade u, welche K nicht schneidet, so bestimmen ebenfalls, wie in der Ebene, die auf u liegenden Punktepaare, welche in Bezug auf K conjugirt sind, eine einstimmige Involution, und es giebt

auch hier zwei zu u symmetrisch liegende Punkte M und M', von welchen aus je zwei entsprechende Punkte jener Involution unter einem sphärischen rechten Winkel erscheinen. Es sollen deshalb M und M' die orthoptischen Mittelpunkte der sphärischen Geraden u in Bezug auf den sphärischen Kegelschnitt K heissen. Wenn U der Pol von u in Bezug auf K ist, so sieht man leicht ein, dass, wenn einer der orthoptischen Mittelpunkte von u, etwa M, mit U zusammenfällt, alsdann U (oder M) ein Brennpunkt des Kegelschnitts sein muss, und zwar sowohl in der Ebene, wie auf der Kugel, denn es müssen jetzt je zwei durch u gehende, in Bezug auf K conjugirte (ebene oder sphärische) Geraden senkrecht auf einander stehen. u ist dann die zu U gehörige Leitlinie. Es werden also die nachher aufzustellenden Sätze von den orthoptischen Mittelpunkten zum Theil Verallgemeinerungen der schon bekannten Sätze von den Brennpunkten und Leitlinien sein.* Ein anderer Grenzfall tritt ein, wenn u in eine Tangente des Kegelschnittes K übergeht, wodurch M und M' mit dem Berührungspunkte U von u zusammenfallen.

In den folgenden Sätzen ist gegeben ein ebener oder sphärischer Kegelschnitt K, eine denselben nicht schneidende ebene oder sphärische Gerade u, deren Pol U und ein orthoptischer Mittelpunkt M der Geraden u in Bezug auf K. Die grosse Uebereinstimmung zwischen ebenen und sphärischen Kegelschnitten macht es zugleich möglich, je zwei entsprechende Sätze in einen zusammenzufassen.

1. Durch U ist eine beliebige Gerade g gezogen, welche den Kegelschnitt in einem Punkte A und die Gerade u in G schneidet. Dann bleibt der Ausdruck

$$\frac{(UA).(MG)}{(AG)} \text{ in der Ebene}$$

oder auf der Kugel

$$\frac{\sin(UA)\sin(MG)}{\sin(AG)}$$

für jede Lage von g constant.

Man kann statt dessen auch schreiben

$$\frac{(UA)}{(Au)}\cdot\frac{(MG)}{(UG)} = const.$$

und auf der Kugel

$$\frac{\sin(UA)}{\sin(Au)}\cdot\frac{\sin(MG)}{\sin(UG)} = const.$$

Wenn M und U zusammenfallen, also in einen Brennpunkt von K übergehen, so wird

$$\frac{(MG)}{(UG)} = 1, \quad \frac{\sin(MG)}{\sin(UG)} = 1,$$

d. h. man erhält den bekannten Satz vom constanten Verhältnisse, in welchem die Entfernungen (auf der Kugel die Sinus der Entfernungen)

eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie stehen.

2. Wenn g eine beliebige Tangente des Kegelschnittes und G deren Schnittpunkt mit u, so hat man

$$\text{in der Ebene}\quad \frac{(Ug)}{\sin(gu)\,(Mg)} = const.,$$

$$\text{auf der Kugel}\quad \frac{\sin(Ug)}{\sin(gu)\,\sin(MG)} = const.$$

3. Es sei A der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente g, G deren Schnittpunkt mit u, $\varrho(A)$ der (ebene oder sphärische) Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes im Punkte A. Dann ist

$$\text{in der Ebene}\quad \frac{\varrho(A).(MG)^3}{(AG)^3} = const.,$$

$$\text{auf der Kugel}\quad \frac{tg\,\varrho(A).\sin(MG)^3}{\sin(AG)^3} = const.$$

Ein specieller Fall ergiebt sich, wenn u eine Tangente des Kegelschnittes ist. Es sei dann $\varrho(U)$ der Krümmungshalbmesser in ihrem Berührungspunkte U. Dann ist

$$\frac{\varrho(A).(UG)^3}{(AG)^3} = const. = \varrho(U)$$

oder auf der Kugel

$$\frac{tg\,\varrho(A)\,\sin(UG)^3}{\sin(AG)^3} = const. = tg\,\varrho(U)$$

oder

$$\frac{\varrho(A)}{\varrho(U)} = \frac{(AG)^3}{(UG)^3} \quad\text{und}\quad \frac{tg\,\varrho(A)}{tg\,\varrho(U)} = \frac{\sin(AG)^3}{\sin(UG)^3},$$

d. h.:

„Die Krümmungshalbmesser in zwei beliebigen Punkten A und U eines ebenen Kegelschnittes verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abschnitte (AG) und (UG) der in A und U an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten"

und:

„In jedem sphärischen Kegelschnitte verhalten sich die trigonometrischen Tangenten der Krümmungshalbmesser in zwei beliebigen Punkten A und U wie die dritten Potenzen der Sinus der Abschnitte (AG) und (UG) von den in A und U an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten."

4. Satz 3 kann als ein specieller Fall des folgenden angesehen werden.

A_1, A_2, A_3 sind drei beliebige Punkte des Kegelschnittes K; g_1, g_2, g_3 die Verbindungslinien der drei Punkte; G_1, G_2, G_3 die Schnittpunkte von g_1, g_2, g_3 mit u; endlich ist $\varrho($A … sser des um das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ beschriebenen K…

$$\varrho(A_1 A_2 A_3) \cdot \frac{(MG_1)(MG_2)(MG)}{(A_2 G_3)(A_3 G_1)(A_1 G_2)}$$

in der Ebene, und

$$tg\,\varrho(A_1 A_2 A_3) \frac{\cos\frac{(A_2 A_3)}{2} \cos\frac{(A_3 A_1)}{2} \cos\frac{(A_1 A_2)}{2} \cdot \sin(MG_1) \sin(MG_2) \sin(MG_3)}{\sin(A_2 G_3) \sin(A_3 G_1) \sin(A_1 G_2)}$$

auf der Kugel sind unabhängig von der Lage der drei Punkte A_1, A_2 und A_3 auf dem Kegelschnitte.

5. Von einem beliebigen Punkte A zieht man die beiden Tangenten g_1 und g_2 an den Kegelschnitt K. Es seien G_1 und G_2 deren Schnittpunkte mit u, A_1 und A_2 ihre Berührungspunkte. Es findet immer die Beziehung statt:

$$\text{in der Ebene } \frac{(AA_1)(MG_1)}{(A_1 G_1)} = \frac{(AA_2)(MG_2)}{(A_2 G_2)},$$

$$\text{auf der Kugel } \frac{\sin(AA_1)\sin(MG_1)}{\sin(A_1 G_1)} = \frac{\sin(AA_2)\sin(MG_2)}{\sin(A_2 G_2)}.$$

6. Durch einen beliebigen Punkt A zieht man eine veränderliche Secante g. Dieselbe schneide den Kegelschnitt in A_1 und A_2, die Gerade u in G. Es besteht alsdann die Gleichung

$$\frac{(AA_1)(AA_2)(MG)^2}{(A_1 G)(A_2 G)} = const.$$

oder auf der Kugel

$$\frac{\sin(AA_1)\sin(AA_2)\sin(MG)^2}{\sin(A_1 G)\sin(A_2 G)} = const.$$

7. Zwei beliebige Punkte A_1 und A_2 liegen mit U auf einer Geraden und sind in Bezug auf den Kegelschnitt K einander conjugirt. Man verbinde A_1 und A_2 mit einem beliebigen veränderlichen Punkte A_3 des Kegelschnittes durch zwei Geraden, welche u in G_1 und G_2 schneiden. Das Verhältniss der Ausdrücke

$$\frac{(A_1 A_3)(MG_1)}{(A_1 G_1)} : \frac{(A_2 A_3)(MG_2)}{(A_2 G_2)}$$

oder auf der Kugel

$$\frac{\sin(A_1 A_3)\sin(MG_1)}{\sin(A_1 G_1)} : \frac{\sin(A_2 A_3)\sin(MG_2)}{\sin(A_2 G_2)}$$

ist für jede Lage des Punktes A_3 auf K dasselbe.

8. Zwei durch U gehende Secanten g_1 und g_2 bewegen sich so, dass das von ihnen auf u abgeschnittene Stück, von M aus gesehen, unter constantem Winkel erscheint; g_1 und g_2 schneiden den Kegelschnitt in A_1 und A_2, die Verbindungslinie a von A_1 und A_2 schneide u in A. Man hat die Gleichungen

$$\frac{(A_1 A_2)\sin(au)(MA)}{(A_1 u)(A_2 u)} = const.,$$

auf der Kugel dagegen

$$\frac{\sin(A_1 A_2)\sin(a u)\sin(M A)}{\sin(A_1 u)\sin(A_2 u)} = const.,$$

ferner

$$\frac{\varDelta(U A_1 A_2)}{(A_1 u)(A_2 u)} = const.$$

und auf der Kugel

$$\frac{\varDelta(U A_1 A_2)}{\sin(A_1 u)\sin(A_2 u)} = const.$$

Hieraus folgt noch

$$\frac{(U a)}{\sin(a u)(M A)} = const. \text{ und } \frac{\sin(U a)}{\sin(a u)\sin(M A)} = const.$$

9. Um einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes drehen sich zwei Geraden g_1 und g_2 so, dass das von ihnen auf u abgeschnittene Stück von M aus immer unter demselben Winkel gesehen wird. g_1 und g_2 schneiden den Kegelschnitt zum zweiten Male in A_1 und A_2, die Verbindungslinie a von A_1 und A_2 schneide u in A. Alsdann ist

$$\frac{(A_1 A_2)\sin(a u)(M A)}{(A_1 u)(A_2 u)} = const.$$

und auf der Kugel

$$\frac{\sin(A_1 A_2)\sin(a u)\sin(M A)}{\sin(A_1 u)\sin(A_2 u)} = const.$$

10. Eine beliebige Secante schneide den Kegelschnitt in A_1 und A_2, die Gerade u in A. Die Tangenten in A_1 und A_2 schneiden u in G_1 und G_2. Es wird Winkel $(G_1 M G_2)$ durch AM halbirt. (Gilt für die Ebene, wie für die Kugeloberfläche.)

11. Eine beliebige Secante schneidet K in A_1 und A_2. Man verbindet A_1 und A_2 mit U durch zwei Linien, welche u in G_1 und G_2 schneiden. Alsdann wird, in der Ebene wie auf der Kugel, Winkel $(G_1 M G_2)$ durch AM halbirt.

12. Zwei beliebige Tangenten g_1 und g_2 des Kegelschnittes schneiden u in G_1 und G_2. Ihren Schnittpunkt verbindet man mit U durch eine Gerade, welche u in A trifft. Dann wird wieder sowohl in der Ebene, als auch auf der Kugel, Winkel $(G_1 M G_2)$ durch (AM) halbirt.

13. Die Berührungspunkte zweier beliebigen Tangenten des Kegelschnittes, sowie ihren Schnittpunkt verbindet man mit U durch Geraden, welche U in G_1, G_2 und A treffen. Auch dann ist

$$\text{Winkel } (G_1 M A) = \text{Winkel } (A M G_2).$$

14. Die Verbindungslinien zweier festen Punkte von K mit einem veränderlichen Punkte desselben Kegelschnittes schneiden auf u Strecken ab, die von M aus unter constantem Winkel gesehen werden. (Gilt für die ebenen wie für die *sphärischen* Kegelschnitte.)

15. Dasjenige Stück einer veränderlichen Tangente von K, welches zwischen zwei feste Tangenten desselben Kegelschnittes fällt, wird von U aus auf u projicirt. Die Projection erscheint dann, von M aus gesehen, unter constantem Winkel. (Gilt ebenfalls für die Ebene wie für die Kugel.)

16. Durch einen festen Punkt A zieht man eine veränderliche Secante, welche den Kegelschnitt in A_1 und A_2 schneidet. Man verbindet A_1 und A_2 mit U durch zwei Geraden, welche u in G_1 und G_2 treffen. Endlich sei B der Schnittpunkt von UA mit u. Es findet die Gleichung statt

$$tg\frac{(B\hat{M}G_1)}{2}\cdot tg\frac{(B\hat{M}G_2)}{2}=const.$$

17. Gegeben eine beliebige Gerade g, welche K nicht schneidet. Von einem beliebigen Punkte A derselben zieht man an den Kegelschnitt die Tangenten g_1 und g_2. G, G_1 und G_1 sind die Schnittpunkte von u mit g, g_1 und g_2. Das Product

$$tg\frac{(GMG_1)}{2}\cdot tg\frac{(GMG_2)}{2}$$

ist alsdann unabhängig von der Lage des Punktes A auf g.

18. Man hat ein System von n Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$, welche eine solche Lage zu U und u besitzen, dass für jede beliebige durch U gezogene Gerade l die Gleichung stattfindet

$$\Sigma\frac{(A_1 l)}{(A_1 u)}=0$$

oder auf der Kugel

$$\Sigma\frac{\sin(A_1 l)}{\sin(A_1 u)}=0.$$

Wenn nun g eine veränderliche Tangente des Kegelschnittes ist, welche u in G trifft, so hat man die Beziehung

$$\Sigma\left[\frac{(A_1 g)}{(A_1 u)}\right]\cdot\frac{1}{\sin(gu)(MG)}=const.,$$

auf der Kugel dagegen

$$\Sigma\left[\frac{\sin(A_1 g)}{\sin(A_1 u)}\right]\cdot\frac{1}{\sin(gu)\sin(MG)}=const.$$

19. Bei derselben Annahme, wie im vorhergehenden Satze, sei P ein veränderlicher Punkt des Kegelschnittes, von welchem aus man die Punkte A_1, $A_2, \ldots A_n$ auf die Gerade u nach G_1, $G_2, \ldots G_n$ projicirt. Die Summe

$$\Sigma\frac{(PA_1)^2(MG_1)^2}{(Au)^2(PG_1)^2}$$

oder auf der Kugel

$$\Sigma \frac{\sin(PA_1)^2 \sin(MG_1)^2}{\sin(Au)^2 \sin(PG_1)^2}$$

ist unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Kegelschnitte.

20. Ein System von n Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ hat eine solche Lage zum Punkte U, dass für jeden beliebigen Punkt A

$$\Sigma \frac{(A g_1)}{(U g_1)} = n$$

oder auf der Kugel

$$\Sigma \frac{\sin(A g_1)}{\sin(U g_1)} = n.$$

Wenn nun P ein veränderlicher Punkt des Kegelschnittes K ist und Q der Schnittpunkt von PU mit u, so hat man

$$\text{in der Ebene } \Sigma\left[\frac{(P g_1)}{(U g_1)}\right] \cdot \frac{(UQ)}{(UP)(MQ)} = const.,$$

$$\text{auf der Kugel } \Sigma\left[\frac{\sin(P g_1)}{\sin(U g_1)}\right] \cdot \frac{\sin(UQ)}{\sin(UP)\sin(MQ)} = const.$$

Die meisten der vorhergehenden Sätze lassen Umkehrungen in Form von geometrischen Oertern zu. Diese, sowie die zahlreichen speciellen Fälle, welche möglich sind, zu entwickeln, muss dem Leser überlassen bleiben.

Stuttgart. R. Mehmke,
Polytechniker.

XIII. Zu Riemann's Gravitationstheorie.

In Riemann's „Neuen mathematischen Principien der Naturphilosophie" (H. Weber's Ausgabe der Werke, S. 502) findet sich folgender Satz: „Nimmt man an, dass der raumerfüllende Stoff eine incompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei und dass in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche, seiner Masse proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein?). Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gemacht werden." Die unten folgende Ausführung dieser Riemann'schen Andeutungen wird zeigen, dass die oben — wie in der Weber'schen Ausgabe — in Klammern geschlossenen Worte einer Berichtigung bedürfen.

Der den Raum erfüllende Stoff ist trägheitslos, also sind die Bewegungsgleichungen eines Punktes desselben

1) $$u = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

wo p den am Orte xyz des Punktes herrschenden Druck, uvw die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes bedeuten.

Ferner ist jener Stoff eine homogene incompressible Flüssigkeit. Es ergiebt sich dadurch die Bedingung

$$2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \text{ oder } \Delta p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0$$

für alle Punkte des Raumes ausserhalb der Atome.

Die Bedingung, der p innerhalb des vom ponderablen Stoffe erfüllten Raumes zu genügen hat, muss man auf verschiedenem Wege ableiten, je nachdem man sich die ponderablen Massen in discreten, verschwindend kleinen Körpern concentrirt oder stetig zusammenhängend denkt. Bei Zugrundelegung der ersteren atomistischen Annahme umschliesse man jedes Atom durch eine kleine Fläche, deren innere Normale n die Winkel $\alpha\beta\gamma$ mit den Coordinatenrichtungen bilde. Durch das Oberflächenelement ds der Fläche tritt während der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$[(u-x')\cos\alpha+(v-y')\cos\beta+(w-z')\cos\gamma]\,ds$$

ins Innere ein, wenn $x'y'z'$ die Geschwindigkeitscomponenten des Atoms bedeuten und man die Dichtigkeit der homogenen Flüssigkeit gleich 1 setzt. Da $x'y'z'$ für alle Elemente der umschliessenden Fläche constant und, die Integrationen über die ganze Fläche erstreckt,

$$\int\cos\alpha.ds=0,\quad \int\cos\beta.ds=0,\quad \int\cos\gamma.ds=0$$

ist, so strömt ins Innere der Fläche in der Zeiteinheit

$$\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,ds=-\int\frac{\partial p}{\partial n}ds$$

und der Riemann'schen Hypothese zufolge darf man setzen

$$-\int\frac{\partial p}{\partial n}ds=4\pi m,$$

mit m die Masse des umschlossenen Atoms bezeichnet. Hieraus folgt aber bekanntlich

$$\int\Delta p.d\tau=4\pi m,$$

wenn diese Integration über das von der Fläche umschlossene Volum erstreckt wird. Letztere Gleichung bleibt bestehen, wie klein auch die Fläche sei, und liefert daher für den Fall, dass m in einem Punkte concentrirt ist, für diesen die Bedingung

$$3)\qquad \Delta p=4\pi m.$$

Bei der Annahme stetiger Erfüllung des Raumes durch die ponderable Masse findet sich die Flüssigkeitsmenge, die in ein mit der ponderablen Masse m erfülltes Raumelement tritt, ebenfalls gleich

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Delta p=4\pi m.$$

Den an p gestellten Forderungen 2) und 3) nebst den Bedingungen der Eindeutigkeit, Stetigkeit und des Verhaltens im Unendlichen genügt nur die Function

4) $$p = -\Sigma \frac{m}{r},$$

wo die Summation über alle Atome zu erstrecken ist. Nach der Substitution dieses Werthes ergeben sich die vom Newton'schen Gesetze geforderten Bewegungsgleichungen, wenn man der Riemann'schen Hypothese den Zusatz anfügt, dass jedes ponderable Theilchen Trägheit besitzt, so dass seine Bewegungsgleichungen sind

$$x'' = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad y'' = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad z'' = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Die im obigen Citat eingeklammerten Worte würden hiernach heissen müssen: „dem Newton'schen Potentiale an dem Orte des Atoms proportional sein“.

Dresden. G. Helm.

XIV. Zur Lehre von den Binomialcoefficienten.

Sind $a, b, c, \ldots$ die Anfangsglieder einer arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung und ihrer p Differenzreihen, so hat man für die Summe der ersten n Glieder den Ausdruck

1) $$S = a n_{\cdot 1} + b n_{\cdot 2} + c n_{\cdot 3} + \ldots .*$$

Sucht man durch diese Formel die Reihe

2) $$S = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots$$

zu summiren, so sind deren Differenzreihen

$$\begin{gathered}(2^p - 1),\quad (3^p - 2^p),\quad (4^p - 3^p),\ \ldots,\\ (3^p - 2.2^p + 1^p),\quad (4^p - 2.3^p + 2^p),\quad (5^p - 2.4^p + 3^p),\ \ldots,\\ (4^p - 3.3^p + 3.2^p - 1),\quad (5^p - 3.4^p + 3.3^p - 2),\ \ldots,\\ (5^p - 4.4^p + 6.3^p - 4.2^p + 1),\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Mithin ist

3) $$\left\{\begin{aligned} a &= 1^p,\\ b &= 2^p - 1,\\ c &= 3^p - 2_{\cdot 1}.2^p + 1,\\ d &= 4^p - 3_{\cdot 1}.3^p + 3_{\cdot 2}.2^p - 1,\\ e &= 5^p - 4_{\cdot 1}.4^p + 4_{\cdot 2}.3^p - 4_{\cdot 3}.2^p + 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ k &= k^p - (k-1)_{1}(k-1)^p + (k-1)_{\cdot 2}(k-2)^p - \ldots \pm 1.\end{aligned}\right.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in 1) folgt

---

* H. Grassmann, *Lehrb. d. Math.* Th. I, Stettin 1860, Nr. 364.

netsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

3. Ebenfalls für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter", abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radius vectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns" ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radius vector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

$$\frac{a}{r}\left[1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right]$$
$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots,$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeig-

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen.' Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1878 Professor der Geschichte Dr. Georg Voigt) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

XII.

Ueber ein specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen.

Von

Dr. Arthur Schoenflies

in Berlin.

---

§ 1. Discussion des Hyperboloids.

In einer früheren Abhandlung, welche ebenfalls in diesem Journal* abgedruckt ist, bin ich von einem gleichseitigen Paraboloid ausgegangen, das als geometrischer Ort aller Punkte des Raumes definirt wurde, welche von zwei windschiefen Geraden gleichweit entfernt sind. Die Untersuchungen, welche den Inhalt dieses Aufsatzes bilden, betreffen ein ähnliches Problem. Es ist bekannt, dass der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, deren Entfernungen von zwei windschiefen Geraden ein constantes Verhältniss besitzen, ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche ist. Dies Hyperboloid hat — was bisher übersehen worden zu sein scheint — die specielle Eigenschaft, dass zwischen seinen Hauptaxen eine einfache Relation besteht, und diese Relation giebt Veranlassung zu mehreren ganz bemerkenswerthen Resultaten, welche ich mir an dieser Stelle mitzutheilen erlaube.

Es seien

$$1)\qquad \begin{aligned} x-a=0,\quad y-\alpha z=0,\\ x+a=0,\quad y+\alpha z=0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden windschiefen Geraden g und h, und λ der Werth des constanten Verhältnisses der Entfernungen, so ist

$$x^2+\frac{y^2+\alpha^2z^2}{1+\alpha^2}-2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}yz-2a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x+a^2=0$$

die Gleichung des Hyperboloids. Um dasselbe auf die Hauptaxen zu transformiren, substituiren wir

---

* Bd. XXIII, S. 245.

$$x = x' + a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, \quad y = y'\cos\vartheta - z'\sin\vartheta, \quad z = y'\sin\vartheta + z'\cos\vartheta$$

und erhalten, wenn wir die Striche bei den neuen Coordinaten wieder weglassen, seine Gleichung in der Form

3) $$A^2x^2 + B^2y^2 - C^2z^2 = 1$$

und als Gleichungen der Geraden g und h

4) $$x + \frac{2a\lambda^2}{1-\lambda^2} = 0, \quad y - \alpha z - (z + \alpha y)\, tg\,\vartheta = 0,$$

5) $$x + \frac{2a}{1-\lambda^2} = 0, \quad y + \alpha z - (z - \alpha y)\, tg\,\vartheta = 0,$$

wenn die Werthe A^2, B^2, C^2, ϑ durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

6) $$A^2 = \left(\frac{1-\lambda^2}{2a\lambda}\right)^2, \quad B^2 = \left(\frac{1-\lambda^2}{2a\lambda}\right)^2 \left\{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(\frac{2\alpha\lambda}{(1+\alpha^2)(1-\lambda^2)}\right)^2}\right\},$$

7) $$-C^2 = \left(\frac{1-\lambda^2}{2a\lambda}\right)^2 \left\{\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(\frac{2\alpha\lambda}{(1+\alpha^2)(1-\lambda^2)}\right)^2}\right\}, \quad tg\,2\vartheta = -\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Die oben erwähnte Relation ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen 6); sie lautet:

8) $$A^2 = B^2 - C^2.$$

Ferner zeigen die Gleichungen 4) und 5), dass von den beiden Geraden g und h die eine die Polargerade der andern in Bezug auf das Hyperboloid ist.

Die durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der Kreisschnitte haben für unsere Fläche die Gleichungen

9) $$Cy - Bz = 0, \quad Cy + Bz = 0;$$

daraus folgt, dass die Kreisschnitte auf je einer der beiden Asymptoten des Hauptschnittes der yz-Ebene senkrecht stehen.

Ferner zeigen die Gleichungen 6), dass das Verhältniss der Grössen A^2, B^2, C^2 von a, d. h. von dem kürzesten Abstande der beiden Geraden g und h, unabhängig ist. Setzt man nun $a = 0$, so verwandeln sich diese Geraden in zwei zu ihnen parallele Geraden g' und h', welche durch den Mittelpunkt des Hyperboloids gehen. Dieses selbst aber wird dadurch zu dem Kegel

$$A^2x^2 + B^2y^2 - C^2z^2 = 0,$$

d. h. es geht in seinen eigenen Asymptotenkegel über. Folglich kann der Asymptotenkegel unseres Hyperboloids als der Ort aller Punkte des Raumes betrachtet werden, deren Entfernungen von den Geraden g' und h' ebenfalls das constante Verhältniss λ besitzen.

Bezeichnen wir endlich die linearen Excentricitäten der drei Hauptschnitte unserer Fläche durch e, e_1, e_2, die numerischen durch ε, ε_1, ε_2, so ergeben sich ihre Werthe in der Form

10) $$e^2=\frac{C^2}{A^2B^2},\quad e_1^{\,2}=\frac{B^2}{A^2C^2},\quad e_2^{\,2}=\frac{B^2+C^2}{B^2C^2},$$

11) $$\varepsilon^2=\frac{C^2}{B^2},\quad \varepsilon_1^{\,2}=\frac{B^2}{C^2},\quad \varepsilon_2^{\,2}=1+\frac{B^2}{C^2},$$

und diese Gleichungen lassen unmittelbar die Existenz der Relationen

12) $$\varepsilon^2\varepsilon_1^{\,2}=1,$$

13) $$\varepsilon_2^{\,2}-\varepsilon_1^{\,2}=1$$

erkennen.

§ 2. Herleitung der Regelfläche R_8.

Es entsteht nun die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Hyperboloid, dessen Hauptaxen der Relation 8) genügen, die Geraden g und h zu finden, d. h. aus den vier Gleichungen 6) und 7) die vier Grössen a, α, λ, ϑ zu bestimmen. Diese vier Gleichungen repräsentiren aber wegen der Relation 8) nur drei voneinander unabhängige Bedingungen; demnach kann von jenen vier Grössen eine ganz beliebig angenommen werden und es existirt daher eine unendliche Anzahl von Geradenpaaren g, h, welche eine geradlinige Fläche bilden werden. Betrachten wir zunächst die Fläche, welche von den Geraden g erzeugt wird, so haben wir aus den Gleichungen 4), 6), 7), also aus fünf unabhängigen Gleichungen die vier Grössen a, α, λ, ϑ zu eliminiren; das Eliminationsresultat ist die Gleichung der gesuchten Fläche.

An die Stelle der drei Gleichungen 6) setzen wir die beiden unabhängigen Gleichungen

1) $$A=\frac{1-\lambda^2}{2a\lambda},$$

2) $$\frac{A^2}{BC}=\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}.$$

Wenn wir nun aus Gleichung 4) $tg\,\vartheta$ ausdrücken und den erhaltenen Werth in die Gleichung 7) einsetzen, so ergiebt sich

3) $$\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}\,\frac{y^2-z^2}{yz}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha}+4\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}=0.$$

Aber die Multiplication der Gleichung 4) (§ 1) mit Gleichung 1) (§ 2) liefert

4) $$Ax+\lambda=0,$$

so dass wir jetzt drei Gleichungen gebildet haben, nämlich 2), 3), 4), in denen nur α und λ vorkommen. Um daher die Gleichung der Fläche zu bilden, haben wir noch aus den beiden Gleichungen 2) und 3) α zu

eliminiren und dann in die so entstehende Gleichung für λ seinen Werth — aus Gleichung 4) — einzusetzen.

Wir substituiren noch

5) $$\frac{1-\alpha^2}{\alpha} = 2u,$$

so verwandeln sich, wenn wir zugleich $\frac{B}{C}$ durch ε_1 und $\frac{C}{B}$ durch ε ersetzen, die Gleichungen 2) und 3) in

6) $$u^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} + 1 = 0,$$
$$u^2 - \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{y^2 - z^2}{yz} u + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} = 0,$$

d. h. in zwei Gleichungen zweiten Grades in u, aus welchen sich u ohne Schwierigkeit eliminiren lässt. Die resultirende Gleichung lautet nach Unterdrückung der unwesentlichen Factoren

7) $$\{2(1-\lambda^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon)^2\}^2 y^2 z^2 + (y^2 - z^2)^2 \{(1-\lambda^2)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 \lambda^2\} = 0$$

oder, wenn wir auf der linken Seite $4y^2z^2\{(1-\lambda^2)^2 - (\varepsilon_1-\varepsilon)^2\lambda^2\}$ subtrahiren und addiren, mit Rücksicht auf § 1, Gleichung 12)

8) $$(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)^2 y^2 z^2 + (y^2 + z^2)^2 \{1 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2)\lambda^2 + \lambda^4\} = 0.$$

Setzt man nun noch für λ den Werth $-Ax$ ein, so ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche

9) $$(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2)^2 y^2 z^2 + (y^2 + z^2)^2 \{1 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2) A^2 x^2 + A^4 x^4\} = 0,$$

d. h. die Gesammtheit der Geraden g bildet eine geradlinige Fläche achten Grades.

Dieselbe Fläche wird von den Geraden h gebildet, so dass die Gesammtheit der Geraden g mit der Gesammtheit der Geraden h identisch ist. Die Gleichungen 4) und 5) des vorigen Paragraphen zeigen nämlich, dass die Gleichungen der Geraden g in diejenigen der Geraden h übergehen, wenn man in ihnen gleichzeitig λ in $\frac{1}{\lambda}$, a in $-a$, α in $-\alpha$ verwandelt, und man erkennt leicht, dass diese Substitutionen die resultirende Gleichung 9) ganz ungeändert lassen. Ausserdem ergiebt sich die Identität beider Geradenschaaren auch durch folgende Ueberlegung. Es wurde im Beginn dieses Paragraphen gefunden, dass von den vier Grössen a, α, λ, ϑ eine, also z. B. λ, beliebig gewählt werden kann. Nun sind die Geraden g und h dadurch definirt, dass in dem constanten Verhältnisse, dessen Werth λ ist, die Entfernung von g den Zähler, die von h den Nenner bildet. Es gehen also g und h ineinander über, wenn sich λ in $\frac{1}{\lambda}$ verwandelt, und daher befindet sich unter den zu $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ gehörigen Geraden g' auch die Gerade h. Demnach ergiebt sich:

Für jedes einschalige Hyperboloid, dessen Hauptaxen der Gleichung 8), § 1, genügen, existirt eine unendliche

Anzahl von Paaren gerader Linien von der Eigenschaft, dass die Entfernungen aller Punkte des Hyperboloids von je zwei Geraden eines Paares ein constantes Verhältniss besitzen. Die Gesammtheit dieser Geraden bildet eine Regelfläche vom achten Grade, R_8. Je zwei Geraden eines Paares, welche conjugirte Geraden der Fläche R_8 heissen sollen, sind reciproke Polaren in Bezug auf das Hyperboloid.

Aus der Gleichung 9) ergiebt sich unmittelbar, dass die Fläche R_8 zwei vierfache Geraden $y=0$, $z=0$ und $x=0$, $t=0$ besitzt, wo $t=0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene bedeutet. Sie gehören nicht zu den Erzeugungslinien der Fläche.

§ 3. Darstellung der Fläche R_8 mittelst elliptischer Functionen und Discussion derselben.

Da alle Geraden der Fläche R_8 auf der x-Axe senkrecht stehen, so sind die Gleichungen einer beliebigen Geraden von der Form

1) $$Ax+\lambda=0, \quad y=\beta r, \quad z=\gamma r,$$

wenn zwischen β, γ, λ die Relationen

2) $$(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2)^2\beta^2\gamma^2+1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon^2)\lambda^2+\lambda^4=0$$

besteht, welche man erhält, wenn man in die Gleichung 8) des vorigen Paragraphen für y und z ihre Werthe einsetzt. Betrachtet man in den Gleichungen 1) r, β, γ, λ als variabel, so stellen sie ebenfalls die Fläche R_8 dar. Wir werden nun zeigen, dass sich β, γ, λ mittelst elliptischer Functionen ausdrücken lassen.

Wegen der Gleichung $\varepsilon^2\varepsilon_1^2=1$ lässt sich die Gleichung 2) in

3) $$(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2)^2\beta^2\gamma^2+(1-\varepsilon^2\lambda^2)(1-\varepsilon_1^2\lambda^2)=0.$$

umformen. Da das erste Glied der linken Seite ein vollständiges Quadrat ist, so kann sich nur unter der Bedingung für β und γ ein reeller Werth ergeben, dass

4) $$(1-\varepsilon^2\lambda^2)(1-\varepsilon_1^2\lambda^2)<0$$

ist, und diese Ungleichung wird, weil $\varepsilon_1^2<\varepsilon^2$ ist, nur für solche Werthe von λ erfüllt, welche der Bedingung

5) $$\varepsilon_1^2\geq\lambda^2\geq\varepsilon^2$$

genügen. Für diese Werthe λ ist

6) $$1-\varepsilon^2\lambda^2>0, \quad 1-\varepsilon_1^2\lambda^2<0$$

und es existiren reelle Geraden der Fläche R_8 nur dann, wenn für positive λ $\varepsilon\lambda$ zwischen 1 und ε^2 liegt, und für negative λ zwischen -1 und $-\varepsilon^2$.

Für die weitere Darstellung werde ich mich der von Herrn Weierstrass eingeführten Functionen bedienen. Die Bedeutung und Theorie derselben ist von Herrn Kiepert bereits zum grösseren Theil veröffent-

... Function $\sigma(u)$ entsp... mittelst der Formeln

... und zwar ... die beiden Relationen

$= 0,$

... irgend einer beliebigen ...

$= 0.$

... Gleichung ...

... dieselbe ...

... ergiebt sich

$$16)\qquad \tau=\frac{\sqrt{\sigma_3^2(u)+\sqrt{\sigma_3^4(u)-4\sigma^2(u)\sigma_1^2(u)}}}{\sqrt{\sigma_3^2(u)-\sqrt{\sigma_3^4(u)-4\sigma^2(u)\sigma_1^2(u)}}},$$

und hier hat ebenfalls die innere Wurzel im Zähler und Nenner den nämlichen Werth.

Die Gleichung 10) lehrt, dass zu einem Werthe von λ auch nur ein Werth von $\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$, also auch nur ein Werth von $\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_3^2(u)}$ und $\frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)}$ gehört. Demnach ergeben sich zu einem Werthe von λ gemäss Gleichung 16) vier Werthe von τ, d. h. durch jeden Punkt der x-Axe gehen vier Geraden der Fläche. Also lassen sich zu einem gegebenen Hyperboloid vier Paare gerader Linien bestimmen von der Eigenschaft, dass die Entfernungen aller Punkte des Hyperboloids von denselben ein vorgeschriebenes constantes Verhältniss besitzen.

Es entsteht nun die Frage, unter welchen Umständen zwei oder mehrere dieser Geraden zusammenfallen, d. h. ob die Fläche R_8 ausser den beiden schon genannten Geraden noch andere vielfache Linien besitzt. Die Bedingung dafür ist, dass die Gleichungen 15) zwei oder mehr gleiche Wurzeln für β, resp. γ liefern, d. h. es muss die Discriminante dieser Gleichungen verschwinden, also

$$\sigma_3^4(u)-4\sigma^2(u)\sigma_1^2(u)=0$$

sein. Diese Relation lässt sich in

$$\left(\frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_3^3(u)}-\frac{1+\varepsilon^4}{2}\right)^2=0$$

überführen, woraus sich endlich für λ die Bedingungsgleichung

$$17)\qquad \lambda^2=\frac{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2}{2}$$

ergiebt. Für jeden der beiden Werthe λ, welche dieser Gleichung genügen, fallen je zwei von den vier zugehörigen Geraden der Fläche zusammen, so dass wir im Ganzen vier Doppelerzeugende erhalten. Die entsprechenden Werthe von τ genügen in beiden Fällen der Gleichung

$$18)\qquad \tau^2-1=0.$$

Andere vielfache Geraden oder Doppelcurven der Fläche existiren nicht.

Man überzeugt sich leicht, dass sich auch zu einem Werthe von τ vier Werthe von λ ergeben; also liegen auch in jeder durch die x-Axe gelegten Ebene vier Erzeugenden der Fläche. Diese vier Geraden sind im Allgemeinen ebenfalls von einander verschieden. Nur für diejenigen Werthe τ, welche die Gleichung 18) erfüllen, fallen wieder je zwei derselben zusammen, und zwar sind die zugehörigen Werthe λ durch die Gleichung 17) bestimmt. Daraus folgt:

[illegible] ache Linien $y=0$, licht worden.* Aus der a. a. O. behandelten [illegible] gende; diese gehen drei neue Functionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ [illegible] der x-Axe und liegen [illegible] durch die x-Axe gehen-

7) $\sigma_1(u) = e^{-\ldots}$ [illegible]
$\sigma_2(u) =$ [illegible] der Curven C_4.
σ_3 [illegible]

[illegible] Gerade der Fläche R_8 und u eine Ge- [illegible] bestimmen eine dritte Gerade s, welche durch

und zwar bestehen [illegible] auf g und u hindurchgeht, die den kürze-

8) [illegible] haben. Bewegt sich u auf dem Hyperboloid,

9) $(e_\mu$ [illegible] so beschreibt die Gerade s eine geradlinige Fläche; [illegible] Strahlen, welche zugleich auf g und je einer Ge-

in welchen [illegible] u senkrecht stehen. Ebenso beschreibt der Punkt

folge be [illegible] welche den ganzen oder theilweisen Durchschnitt des

W [illegible] jener geradlinigen Fläche ausmacht.

10) [illegible]

Um diese Gebilde zu untersuchen, drücken wir das Hyperboloid durch folgende Gleichungen aus:

1) $$Ax = \frac{1-u'v'}{1+u'v'}, \quad By = \frac{u'+v'}{1+u'v'}, \quad Cz = \frac{u'-v'}{1+u'v'},$$

wo bekanntlich $u' = const.$ die eine Schaar der geraden Linien liefert und $v' = const.$ die andere. Setzen wir nun

2) $$u' = u, \quad \frac{v'}{1+u'v'} = v,$$

so wird

3) $$Ax = 1 - 2uv, \quad By = u + (1-u^2)v, \quad Cz = u - (1+u^2)v.$$

Die Richtungscosinus der Geraden u seien α_1, β_1, γ_1, so findet sich

4) $$\alpha_1 = -\frac{2u}{AR}, \quad \beta_1 = \frac{1-u^2}{BR}, \quad \gamma_1 = -\frac{1+u^2}{CR},$$

und zwar ist unter Anwendung der § 1, Gleichung 10) eingeführten Bezeichnungen

5) $$R^2 = e_2^2(1+u^4) + 2(e^2+e_1^2)u^2.$$

Demnach lassen sich die Gleichungen der Geraden u auch folgendermassen schreiben:

6) $$Ax = 1 - \frac{2u}{R} r_1, \quad By = u + \frac{1-u^2}{R} r_1, \quad Cz = u - \frac{1+u^2}{R} r_1.$$

Die Gleichungen der Geraden g seien wieder [§ 3, 1)]

7) $$Ax + \lambda = 0, \quad y = \beta r, \quad z = \gamma r,$$

wo λ, β, γ die Gleichung § 3, 2) befriedigen müssen.

Den Strahl s, welcher die beiden Punkte kürzesten Abstandes U und G miteinander verbindet, bestimmen wir auf folgende Weise. Es sollen jetzt r, r_1 die Abscissen dieser beiden Punkte bedeuten, und d

ᶜernung des Punktes $r=0$ der Geraden g vom Punkte $r_1=0$ ᵗen u, so gelten folgende Gleichungen:*

$$r_1 = \frac{d}{\sin^2(ug)}\{\cos(gd)\cos(ug)-\cos(ud)\},$$
$$= -\frac{d}{\sin^2(ug)}\{\cos(ud)\cos(ug)-\cos(gd)\}.$$

. nun noch

9) $$\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}=m, \quad \frac{\beta}{B}-\frac{\gamma}{C}=n,$$
$$\frac{\beta}{C}+\frac{\gamma}{B}=p, \quad \frac{\beta}{C}-\frac{\gamma}{B}=q,$$

10) $$\frac{B^2+C^2}{B^2-C^2}=\delta^2,$$

so ergiebt sich

$$d\cos(gd) = mu,$$
$$d\cos(ud) = -\frac{u}{R}\left(\frac{2\lambda}{A^2}+e^2+e_1^2+e_2^2u^2\right),$$
$$\cos(ug)=\frac{n-mu^2}{R}, \quad \sin^2(ug)=\frac{R_1^2}{R^2},$$

wo

$$R_1^2 = p^2+\delta^2(p^2+q^2)u^2+q^2u^4$$

ist. Demnach ergeben sich, wenn wir die gefundenen Werthe in die Gleichungen 8) einsetzen und noch folgende Bezeichnungen einführen:

11) $$me_2^2+n\left(e^2+e_1^2+\frac{2\lambda}{A^2}\right)=k, \quad ne_2^2+m\left(e^2+e_1^2-\frac{2\lambda}{A^2}\right)=l,$$

die gesuchten Grössen r, r_1 nach einigen Vereinfachungen in der Form

12) $$r_1=\frac{u}{R_1^2}\left(\frac{2\lambda}{A^2}+\tfrac{1}{2}\delta^2(p^2+q^2)+q^2u^2\right),$$

13) $$r=\frac{u}{R_1^2}(k+lu^2).$$

Setzen wir nun diesen Werth von r_1 in die Gleichungen 6) ein, so erhalten wir die Coordinaten des Punktes U der Geraden u, welcher von g die kürzeste Entfernung hat; es ergiebt sich, wenn wir noch

$$p^2=P, \quad q^2=Q, \quad \tfrac{1}{2}\delta^2(p^2+q^2)=N, \quad \frac{2\lambda}{A^2}=M$$

setzen,

15) $$Ax=\frac{P-2Mu^2-Qu^4}{P+2Nu^2+Qu^4},$$
$$By=\frac{P+M+N-(M-N-Q)u^2}{P+2Nu^2+Qu^4},$$
$$Cz=\frac{P-M-N-(M-N+Q)u^2}{P+2Nu^2+Qu^4}.$$

---

* Hesse, Analyt. Geometrie des Raumes, 2. Aufl., S. 76.

Betrachten wir nun u in diesen Gleichungen als variabel, so durchläuft der Punkt U die Geradenschaar u des Hyperboloids; daher stellen dieselben die im Eingang des Paragraphen erwähnte Curve dar. Da sich ihre Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ergeben, so folgt, dass die Punkte der Geradenschaar u, welche von g den kürzesten Abstand besitzen, eine Curve C_4 vierter Ordnung und zweiter Gattung bilden. Die Geraden u repräsentiren diejenige Regelschaar des Hyperboloids, welche von C_4 nur je einmal geschnitten wird; dagegen hat jede Gerade v drei Punkte mit C_4 gemein.

Es giebt zwei Punkte des Hyperboloids, nämlich seine Schnittpunkte mit der x-Axe, durch welche alle diese Curven C_4 hindurchgehen. Es sind dies diejenigen beiden Punkte, welche für jede Curve den Werthen $u=0$ und $u=\infty$ entsprechen.

Die Coefficienten M, N, P, Q, welche die Curven C_4 bestimmen, hängen ausser von den Hauptaxen des Hyperboloids von λ, β, γ, d. h. von der Geraden g der Fläche R_8 ab. Diese Curven werden sich daher im Allgemeinen mit der Geraden g ändern; es entsteht jedoch die Frage, ob vielleicht zu mehreren Geraden g eine und dieselbe Curve C_4 gehört. Dies wird für diejenigen Geraden der Fall sein, welche für alle Werthe von u denselben Werth von $\frac{r_1}{R}$ liefern. Nun ist mit Benutzung der Bezeichnungen 14)

$$\frac{r_1}{R}=u\frac{M+N+Qu^2}{P+2Nu^2+Qu^4};$$

ferner gehöre zur Geraden g' der Werth r'_1 und es sei

$$\frac{r'_1}{R}=u\frac{M'+N'+Q'u^2}{P'+2N'u^2+Q'u^4},$$

so ist zu untersuchen, ob sich die Grössen M, N, P, Q, M', N', P', Q' so bestimmen lassen, dass für alle Werthe von u die Gleichung

$$\frac{r_1}{R}-\frac{r'_1}{R}=0$$

besteht. Als Bedingungen ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &(M+N)P'-(M'+N')P=0,\\ 17)\quad &QP'-PQ'+2(MN'-M'N)=0,\\ &(M-N)Q'-(M'-N')Q=0. \end{aligned}$$

Ersetzen wir in ihnen N und N' nach 14) durch P, Q, P', Q', so gehen sie in

$$\begin{aligned} &MP'-PM'+\tfrac{1}{2}\delta^2(QP'-PQ')=0,\\ 18)\quad &\delta^2(M(P'+Q')-M'(P+Q))+QP'-PQ'=0,\\ &MQ'-QM'+\tfrac{1}{2}\delta^2(QP'-PQ')=0 \end{aligned}$$

Jetzt multipliciren wir die erste und dritte derselben mit δ^2, die -1, und addiren sie, so erhalten wir

36) $$\left(\frac{\beta}{C}+\frac{\gamma}{B}\right)^2\left(\frac{\beta'}{C}-\frac{\gamma'}{B}\right)^2=\left(\frac{\beta'}{C}+\frac{\gamma'}{B}\right)^2\left(\frac{\beta}{C}-\frac{\gamma}{B}\right)^2.$$

Endlich erhalten wir durch Subtraction derselben beiden Gleichungen

$$\beta\gamma=\frac{1}{\lambda'^2}\beta'\gamma',$$

und wenn wir hieraus den Werth von λ'^4 in die Gleichung 35) einsetzen, so folgt

37) $$\left(\frac{\beta^2}{C^2}-\frac{\gamma^2}{B^2}\right)^2\beta'^2\gamma'^2=\left(\frac{\beta'^2}{C^2}-\frac{\gamma'^2}{B^2}\right)^2\beta^2\gamma^2.$$

Nun hatten wir oben gefunden, dass von den vier Geraden, welche durch denselben Punkt der x-Axe gehen, keine zwei dieselben Curven C_4 liefern; infolge dessen kann es auch unter den Geraden, die zum Werthe $\lambda'=\frac{1}{\lambda}$ gehören, nur eine einzige geben, zu welcher dieselbe Curve C_4 gehört, wie zu der betrachteten Geraden g. Wir zeigen, dass dies für folgende Lösungen der Gleichungen 36) und 37) der Fall ist:

$$\left(\frac{\beta}{C}+\frac{\gamma}{B}\right)\left(\frac{\beta'}{C}-\frac{\gamma'}{B}\right)+\left(\frac{\beta'}{C}+\frac{\gamma'}{B}\right)\left(\frac{\beta}{C}-\frac{\gamma}{B}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\beta^2}{C^2}-\frac{\gamma^2}{B^2}\right)\beta'\gamma'+\left(\frac{\beta'^2}{C^2}-\frac{\gamma'^2}{B^2}\right)\beta\gamma=0.$$

Denn diese Gleichungen verwandeln sich, wenn wir die Multiplication ausführen, in

$$B^2\beta\beta'-C^2\gamma\gamma'=0,\quad (B^2\beta\beta'-C^2\gamma\gamma')(\gamma\beta'+\beta\gamma')=0,$$

so dass in der That beide Gleichungen durch die Relation

38) $$B^2\beta\beta'-C^2\gamma\gamma'=0$$

befriedigt werden. Es geht also durch den zu $\lambda'=\frac{1}{\lambda}$ gehörigen Punkt der x-Axe in der That eine Gerade g', welche dieselbe Curve C_4 besitzt, wie die Gerade g.

Da wir oben bereits nachgewiesen haben, dass die Werthe λ und $-\lambda$ keine Geraden liefern, welche unserer Aufgabe entsprechen, so folgt, dass auch der Werth $\lambda'=-\frac{1}{\lambda}$ eine solche nicht liefern kann.

Die Gleichung 33) lässt sich, wenn wir für λ seinen Werth $-Ax$ einsetzen, in

$$Ax\,.\,Ax'=1$$

überführen, und diese Gleichung, im Verein mit Gleichung 38), ergiebt ohne Weiteres, dass die Geraden g und g' reciproke Polaren in Bezug auf das Hyperboloid sind. Also folgt:

Zu zwei conjugirten Geraden der Regelfläche R_8 gehört eine und dieselbe Curve C_4.

Für zwei solche Geraden g und g' ergiebt sich noch, dass

$$\frac{\sin^2(ug)}{\sin^2(ug')} = \frac{P+2Nu^2+Qu^4}{P'+2N'u^2+Q'u^4}$$

oder

39) $$\frac{\sin^2(ug)}{\sin^2(ug')} = \tau = \lambda^2$$

ist, d. h. die Sinus der Winkel, welche irgend eine Gerade des Hyperboloids mit der Fläche R_8 bildet, besitzen ein constantes Verhältniss, welches dem constanten Verhältniss der Entfernungen gleich ist.

Wir bemerken schliesslich, dass die für die Geraden u gefundenen Gleichungen in die entsprechenden für die Geraden v übergehen, wenn man u in v verwandelt und m mit n, p mit q vertauscht.

§ 5. Die Fläche R_6 der kürzesten Abstände.

Um die Fläche zu untersuchen, welche von den Geraden s gebildet wird, deren Erzeugungslinien also die Punkte kürzesten Abstandes G und U mit einander verbinden, bestimmen wir jeden Strahl s durch seine Richtungscosinus α_2, β_2, γ_2 und seinen Schnittpunkt mit der Geraden g. Dies ist der Punkt, welcher dem Werthe r [Gleichung 13), § 4] entspricht; daher sind die Gleichungen des Strahles s

1) $$x+\frac{\lambda}{A} = \alpha_2 s, \quad y = \beta r + \beta_2 s, \quad z = \gamma r + \gamma_2 s.$$

Aus ihnen ergiebt sich die Gleichung der gesuchten Fläche durch Elimination von u und s. Dieselbe lässt sich ausführen, ohne dass es nöthig wäre, die Grössen α_2, β_2, γ_2 zu berechnen. Weil nämlich der Strahl s auf u und g senkrecht steht, so gelten die beiden Relationen

2) $$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0, \quad \beta\beta_2+\gamma\gamma_2 = 0.$$

Multipliciren wir daher die Gleichungen 1) mit α_1, β_1, γ_1, resp. mit β, γ, und addiren sie, so erhalten wir

3) $$\alpha_1\left(x+\frac{\lambda}{A}\right)+\beta_1 y+\gamma_1 z = (\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)r,$$

4) $$\beta y+\gamma z = r,$$

d. h. zwei Gleichungen, welche nur noch die Grösse u enthalten. Aus ihnen bilden wir noch die Gleichung

5) $$\alpha_1\left(x+\frac{\lambda}{A}\right)+\beta_1 y+\gamma_1 z = (\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(\beta y+\gamma z)$$

und machen nunmehr folgende Substitution:

6) $$x+\frac{\lambda}{A} = \xi, \quad y = \gamma\eta+\beta\zeta, \quad z = \gamma\zeta-\beta\eta,$$

alsdann verwandeln sich die beiden Gleichungen 4) und 5) in

$$\zeta - r = 0, \quad \alpha_1\xi+(\gamma\beta_1-\beta\gamma_1)\eta = 0$$

und nehmen endlich, wenn wir noch r, α_1, β_1, γ_1 durch ihre Werthe in u ersetzen, folgende Form an:

7) $$\zeta(p^2+\delta^2(p^2+q^2)u^2+q^2u^4)-u(k+lu^2)=0,$$

8) $$2u\xi=(p+qu^2)\Delta\eta.$$

Die gesuchte Fläche ist daher das Eliminationsresultat aus einer Gleichung vierten Grades und einer Gleichung zweiten Grades, deren Coefficienten lineare Functionen der Coordinaten sind; daher ist sie selbst vom sechsten Grade. Die Elimination von u aus den beiden Gleichungen lässt sich übrigens auf eine Elimination aus nur zwei quadratischen Gleichungen reduciren, da man die Gleichung 7) durch eine andere ersetzen kann, die in u nur vom zweiten Grade ist. Dazu quadriren wir die letzte Gleichung und erhalten

$$(p^2+2pqu^2+q^2u^4)\Delta^2\eta^2-4u^2\xi^2=0,$$

und wenn wir nun die Gleichung 7) mit $\Delta^2\eta^2$ und die letzte Gleichung mit $-\zeta$ multipliciren und dann beide addiren, so folgt mit Unterdrückung des Factors u und wenn wir noch beachten, dass

$$\delta^2(p^2+q^2)-2pq=\frac{4}{\Delta^2}$$

ist, die Gleichung

9) $$4u(\xi^2+\eta^2)\zeta-(k+lu^2)\Delta^2\eta^2=0.$$

Aus ihr und der Gleichung 8) ist nun u zu eliminiren. Es ergiebt sich, wenn wir noch

10) $$\begin{aligned} 4q(\xi^2+\eta^2)\zeta-2\Delta l\,\xi\eta&=U,\\ 4p(\xi^2+\eta^2)\zeta-2\Delta k\,\xi\eta&=V,\\ \sqrt{qk-pl}\,\Delta^2\eta^2&=W^2 \end{aligned}$$

setzen,

11) $$W^4+UV=0$$

als Gleichung der gesuchten Fläche. Sie hat, wie allgemein für Regelflächen dieser Art bekannt ist, zehn Doppelgeraden, nämlich eine vierfache Gerade

12) $$\xi=0, \quad \eta=0,$$

welche sechs Doppelgeraden äquivalent ist, und noch vier gewöhnliche Doppelgeraden, nämlich

13) $$\begin{aligned} \zeta=0, &\quad \tau=0,\\ \zeta=0, &\quad \eta=0,\\ \xi+i\eta=0, &\quad \tau=0,\\ \xi-i\eta=0, &\quad \tau=0, \end{aligned}$$

wenn $\tau=0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene bedeutet. Demnach ergiebt sich:

Alle Strahlen, welche zugleich auf einer Geraden g der Fläche R_3 und je einer Geraden u des Hyperboloids senkrecht stehen, bilden *eine* Regelfläche sechster Ordnung

welche eine vierfache Gerade und vier gewöhnliche Doppelgeraden enthält.

Ebenso bilden die Strahlen, welche zugleich auf g und je einer Geraden v des Hyperboloids senkrecht stehen, eine Regelfläche sechster Ordnung. Die Gleichung derselben kann sich, da zu beiden Flächen dasselbe Coordinatensystem gehört, von der Gleichung 11) nur in den Constanten unterscheiden. Demgemäss hat diese Regelfläche ebenfalls die Gerade 12) zu vierfachen Geraden und die vier Geraden 13) zu Doppelgeraden.

Diese Regelflächen durchdringen das Hyperboloid zum Theil in den Curven C_4. Es folgt noch, dass je zwei dieser Flächen, welche zu conjugirten Geraden der Fläche R_8 gehören, mit dem Hyperboloid dieselbe Curve C_4 gemein haben.

Die vorstehende Abhandlung lag der Redaction dieses Journals bereits vor, als ich auf eine Mittheilung des Herrn Schroeter* aufmerksam gemacht wurde, welche sich ebenfalls mit dem von mir untersuchten Hyperboloid beschäftigt, ohne indessen die mit ihm zusammenhängenden Curven und Flächen zu berühren. Herr Schroeter sieht die charakteristische Definition desselben darin, dass die den beiden Geraden g und g' zugehörigen Ebeneninvolutionen circular sind. Ich werde nun zeigen, dass diese Definition, welche a. a. O. ohne Beweis aufgestellt wird, mit der von mir gegebenen, dass die Entfernungen aller Punkte der Fläche von den beiden Geraden g und g' ein constantes Verhältniss besitzen, vollständig identisch ist.

Seien nämlich die beiden Geraden g und g' durch die Gleichungen

$$A=0,\quad B=0;\quad C=0,\quad D=0$$

gegeben, wo A und B, ebenso C und D zwei rechtwinklige Ebenen in der Normalform bedeuten, so ist

$$A^2+B^2=\lambda^2(C^2+D^2)$$

die Gleichung des Hyperboloids. Sie zeigt, wie bekannt ist,** dass diese vier Ebenen ein in Bezug auf die Fläche sich selbst conjugirtes Tetraeder bilden; daraus folgt, dass A und B, und ebenso C und D conjugirte Ebenen für das Hyperboloid sind. Nun können aber diese Ebenen ganz beliebig angenommen werden und haben nur die Bedingung zu erfüllen, auf einander senkrecht zu stehen und sich in den Geraden g, resp. g' zu schneiden, mithin sind diese beiden Geraden die Axen circularer Ebeneninvolutionen in Bezug auf die Fläche.

---

* Berichte der Berliner Akademie 1877, S. 594.

** *Salmon*, Analyt. Geometrie des Raumes, 2. Aufl., S. 164.

Umgekehrt hat nach der Definition des Herrn Schroeter die Gleichung des Hyperboloids jedenfalls die Form

$$a^2 A^2 + b^2 B^2 = c^2 C^2 + d^2 D^2$$

und es muss möglich sein, diese Gleichung für unendlich viele Werthe von μ und ν in

$$a_1^2 \frac{(A+\mu B)^2}{1+\mu^2} + b_1^2 \frac{(B-\mu A)^2}{1+\mu^2} = c_1^2 \frac{(C+\nu D)^2}{1+\nu^2} + d_1^2 \frac{(D-\nu C)^2}{1+\nu^2}$$

überzuführen, so dass beide Seiten der Gleichungen gesondert in einander übergehen. Diese Forderung aber kann, wie sich leicht ergiebt, nur unter der Bedingung

$$a^2 = a_1^2 = b^2 = b_1^2, \quad c^2 = c_1^2 = d^2 = d_1^2$$

erfüllt werden, d. h. die Gleichung des Hyperboloids ist

$$A^2 + B^2 = \lambda^2 (C^2 + D^2).$$

Hiermit ist die Identität beider Definitionen erwiesen.

Die zweite von Herrn Schroeter ebenfalls als charakteristisch angeführte Eigenschaft des Hyperboloids, dass es sich durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugen lässt, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen, ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 - C^2 z^2 = 1$$

und der Relation

$$A^2 = B^2 - C^2.$$

Solcher Paare von Ebenenbüscheln existiren zwei, nämlich

$$By - Cz - \mu(1 - Ax) = 0, \quad By + Cz - \frac{1}{\mu}(1 + Ax) = 0,$$

$$By - Cz - \mu(1 + Ax) = 0, \quad By + Cz - \frac{1}{\mu}(1 - Ax) = 0.$$

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich über das gleichseitige hyperbolische Paraboloid anstellen.

XIII.

Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

In meiner Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen",* habe ich die Principien angegeben, auf welchen die Veränderung des Aggregatzustandes der Körper beruht, und gleichzeitig habe ich auf S. 176 als Beispiel eine Gleichung vom vierten Grade mit willkürlich gewählten Constanten angegeben, um die Art, wie die Aggregatzustandsveränderungen zu Stande kommen, zu zeigen. Im Nachstehenden will ich diese willkürlich gewählte Gleichung mit solchen vertauschen, die aus den an verschiedenen Körpern gemachten Beobachtungen abgeleitet wurden, um mit ihrer Hilfe zu zeigen, dass bei bestimmten Temperaturen eine Veränderung des Aggregatzustandes unausbleiblich sei. Die Beweisführung bleibt im Allgemeinen die nämliche, die ich in der obenerwähnten Abhandlung wählte, und die vorgenommenen Aenderungen sind zunächst im Interesse der grösseren Allgemeinheit gemacht worden.

Die Gleichgewichtslage der Atome tritt dann ein, wenn die Kräfte, welche je zwei derselben einander zu nähern oder sie von einander zu entfernen streben, sich aufheben.

Eine Annäherung der Atome verursacht der Druck der Luft, der im Nachstehenden mit p bezeichnet werden soll. Seine Wirkung ist unabhängig von dem Volumen oder der Atomdistanz des Körpers, denn denken wir uns letzteren in einen Cylinder mit verschiebbarem Deckel eingeschlossen, welcher letztere als nicht schwer angenommen werden soll, so ist der von der Luft auf die Flächeneinheit der andern Seite des Deckels ausgeübte Druck unabhängig davon, ob der Deckel mehr oder weniger weit zurückgeschoben wird. Ob der eingeschlossene Körper —

---

* [illegible] Zeitschrift XVIII, S.

wir wollen setzen, er sei ein Gas — diesen Druck auszuhalten vermag, ist eine andere Frage.

Neben dem Luftdrucke wirkt auf die festen und die tropfbar-flüssigen Körper noch der Druck des äusseren Aethers.

Wie ich an einem andern Orte* gezeigt habe, widerspricht die allgemein verbreitete Ansicht, die Aetherdichtigkeit eines Mediums wachse mit dessen Brechungsvermögen, sowohl der Rechnung, als auch der Beobachtung. Der Aether im Innern der genannten Körper ist weniger dicht als im allgemeinen Raume, und der Aether des letzteren drückt ebenso gegen die Oberfläche der Körper, wie die atmosphärische Luft bei ihrem Bestreben, in einen luftverdünnten Raum einzudringen, einen Druck ausübt. Der auf die Einheit einer Kugeloberfläche bethätigte Druck des Aethers ist dem Kugelradius oder der Atomdistanz r proportional. Ist A eine Constante, so lässt sich der Aetherdruck bezeichnen durch Ar.**

Die gegenseitige Einwirkung der Molecule ist im grossen Ganzen eine Abstossung, und sie lässt sich ausdrücken durch die Formel

$$1)\qquad W=-\left(\frac{\alpha}{r^n}+\frac{\beta}{r^o}+\frac{\gamma}{r^q}+\dots\right),$$

wenn α, n, o, q, ... positive, β, γ, ... positive oder negative Constante bedeuten und das Vorzeichen — eine Abstossung angiebt.

Die durch die Gleichung 1) bezeichnete Wirkung gilt für die absolute Temperatur Null. Werden die Körper warm, so schwingen ihre Molecule um ihre Gleichgewichtslage, und je stärker diese Schwingungen sind, um so höher ist die ihnen entsprechende Temperatur. Wenn Schwingungen stattfinden, ist es unvermeidlich, dass die einzelnen Theilchen sich einander bald nähern, bald sich mehr entfernen, als dieses in der Gleichgewichtslage der Fall ist. Ist nun die gegenseitige Wirkung der Theilchen eine solche Function der Entfernung, dass die Wirkung wächst, wenn die Distanz abnimmt, so ist es unausbleibliche Folge, dass bei der Annäherung die gegenseitige Wirkung der Theilchen mehr wächst, als sie bei der Entfernung abnimmt, und es ergiebt sich also als Folge der Temperaturerhöhung ein Anwachsen der Molecularwirkung. Dieses Anwachsen habe ich bereits in meinem Buche: „Die Moleculargesetze" und in meiner Abhandlung: „Ueber die Art der Bewegung etc." behandelt. In beiden Fällen bin ich von der Annahme ausgegangen, dass ein Theilchen zwischen zwei Wänden oder zwei anderen Moleculen hin- und hergehe. Im Folgenden will ich die Voraussetzung machen, um den Mittelpunkt einer Kugel schwinge ein Theilchen innerhalb der gegen den Kugelradius sehr kleinen Amplitude $\pm x_0$. Zwischen dem

* Diese Zeitschrift XX, 1.

** Meine *„Moleculargesetze"* S. 35.

$$17)\qquad x_0^2 = \frac{V^2\varphi}{\varphi^2 + V^2\psi}.$$

Nach Ersetzung von v durch seinen ursprünglichen Werth $\frac{\partial x}{\partial t}$ wird aus 16)

$$18)\qquad \partial t = \frac{\partial x \sqrt{1 - \frac{\psi}{\varphi} x^2}}{V\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}},$$

und die Integration von $x = 0$ bis $x = x_0$ giebt

$$19)\qquad t = \frac{x_0}{V} \cdot \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\psi x_0^2}{4\varphi} + \ldots\right)$$

oder, wenn man für x_0, φ und ψ die Werthe aus 11) und 17) einsetzt,

$$20)\qquad \begin{aligned} t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3r^{n-1}}{4\alpha\pi n'(n-2)}}\left(1 - \frac{\beta o'(o-2)}{2\alpha n'(n-2)r^{o-n}} + \ldots\right) \\ \times\left[1 - \tfrac{9}{32}\frac{V^2 n_1 r^{n-3}}{\pi\alpha n'^2(n-2)}\left(1 + \left(\frac{o_1}{n_1} - \frac{2o'}{n'}\right)\frac{\beta(o-2)}{\alpha(n-2)r^{o-n}} + \ldots\right) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Wird zur Vereinfachung $\beta = \gamma = 0$ genommen, so erhält man

$$21)\qquad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3r^{n-1}}{4\alpha\pi(n-2)n'}}\left(1 - \tfrac{9}{32}\frac{V^2 n_1 r^{n-3}}{\pi\alpha n'^2(n-2)} + \ldots\right).$$

Es bedeutet hier t die Zeit, während welcher das Theilchen von 0 bis x_0 oder umgekehrt geht, und zu einer ganzen Schwingung bedarf es also das Vierfache dieser Zeit.

Bei Bestimmung der Einwirkung, welche das schwingende Theilchen seinerseits auf ein auf der Kugeloberfläche von dem Radius r befindliches Theilchen ausübt, muss darauf Rücksicht genommen werden, welche Richtung die Schwingungen haben. Nehmen wir an, wir haben statt eines einzigen schwingenden Theilchens deren soviele, als Schwingungsrichtungen, und dieser ebensoviele, als Elemente der Kugeloberfläche, so werden diese Theilchen jeweilig selbst eine Kugelfläche von dem Radius x darstellen. Ein einzelnes Theilchen, das infolge von Aenderung der Schwingungsrichtung nach und nach alle die vielen vertritt, wird ebenso nach und nach die Gesammtthätigkeit ausüben, welche den vielen gleichzeitig zukommt, und seine mittlere Wirkung ist demnach gleich der Wirkung der ganzen Kugelfläche, dividirt durch die Zahl der Theilchen, also dividirt durch die Oberfläche der Kugel. Bezeichnet man den veränderlichen Kugelradius mit x, so giebt der Quotient, multiplicirt mit dem Zeitelemente, während dessen sich das Theilchen in x aufhält, den Werth der Wirkung des schwingenden Theilchens während der Zeit ∂t; die Wirkung während der Zeit t aber erhält man, wenn durch Integration ∂t in t übergeht, worauf wieder durch Division mit t der Mittelwerth der Wirkung während der Zeiteinheit erhalten wird.

sie sind durch bestimmte Entfernungen von einander getrennt; es soll jedoch zunächst angenommen werden, ihre Substanz sei continuirlich über die Hohlkugel vertheilt. Bei dieser Annahme muss in Gleichung 8) noch ein Dichtigkeitscoefficient eingesetzt werden, es lässt sich aber dieser als in den Constanten n' und n_1 mit inbegriffen betrachten.

Wird die Wirkungsnorm der Theilchen nicht, wie bisher angenommen wurde, ausgedrückt durch $-\alpha r^{-n}$, sondern durch $-\beta r^{-o}$, so bekäme man statt 8)

$$9)\qquad W_0 = -\tfrac{4}{3}\beta\pi(o-2)\left[\frac{o'x}{r^{o-1}} + \frac{o_1 x^3}{r^{o+1}} + \dots\right].$$

Tritt die durch 1) angegebene Wirkung ein, so wird

$$10)\qquad \begin{aligned} W = -\tfrac{4}{3}\pi\Big[&\left(\frac{\alpha n'(n-2)x}{r^{n-1}} + \frac{\beta o'(o-2)x}{r^{o-1}} + \dots\right) \\ &+ \left(\frac{\alpha n_1(n-2)x^3}{r^{n+1}} + \frac{\beta o_1(o-2)x^3}{r^{o+1}} + \dots\right) + \dots\Big].\end{aligned}$$

Sind die einzelnen Glieder von W_0 gegen die entsprechenden von W_n klein, so kann hierfür auch gesetzt werden

$$11)\qquad \begin{aligned} W = -\tfrac{4}{3}\alpha\pi\Big[&\frac{n'(n-2)x}{r^{n-1}}\left(1 + \frac{\beta o'(o-2)}{\alpha n'(n-2)r^{o-n}} + \dots\right) \\ &+ \frac{n_1(n-2)x^3}{r^{n+1}}\left(1 + \frac{\beta o_1(o-2)}{\alpha n_1(n-2)r^{o-n}} + \dots\right) + \dots\Big].\end{aligned}$$

Werden die Coefficienten von x und x^3 in 11) durch φ und 2ψ ersetzt, so ergiebt sich bei Nichtberücksichtigung der höheren Potenzen von x

$$12)\qquad W = -(\varphi x + 2\psi x^3).$$

Es besteht demnach eine Kraft, welche das Theilchen gegen den Mittelpunkt hintreibt, es veranlasst, zu schwingen, und darum wird

$$13)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -(\varphi x + 2\psi x^3),$$

$$14)\qquad \frac{\partial x^2}{\partial t^2} = v^2 = -(\varphi x^2 + \psi x^4) + C,$$

und bedeutet V die Geschwindigkeit für die Zeit, in welcher das Theilchen die Gleichgewichtslage passirt, so wird

$$15)\qquad \begin{aligned} V^2 - v^2 &= \varphi x^2 + \psi x^4, \\ &= \varphi x^2\left(1 + \frac{\psi}{\varphi}x^2\right).\end{aligned}$$

Da nun x eine kleine Grösse ist, so kann man auch setzen

$$16)\qquad (V^2 - v^2)\left(1 - \frac{\psi}{\varphi}x^2\right) = \varphi x^2.$$

Das Maximum der Elongation erreicht das Theilchen in x_0, wenn $v = 0$, also ist

[illegible] $x = [illegible]$ bis $x = x$, giebt

$$F = - [illegible] \left([illegible] - \frac{[illegible]}{2n} [illegible] x^2 + \dots \right),$$

[illegible] erhält man die mittlere Wirkung in der [illegible]

$$[illegible] = - [illegible] - \frac{[illegible]}{2} \frac{[illegible]}{r} + \dots).$$

[illegible] Werthe von [illegible] und φ wird hierauf

$$[illegible] \left([illegible] \frac{[illegible]-1}{[illegible]-1} - \frac{[illegible]}{[illegible]} \right) \frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{\beta}{\alpha r^{\nu - n}} + \dots \right) + \dots \Big].$$

[illegible] Formeln 1[illegible] und 29) zeigt, dass durch die [illegible] die Einwirkung eines Theilchens auf ein anderes sich in [illegible] dass zu der ursprünglichen Wirkung noch eine wei-[illegible] dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit der die Gleich-[illegible] wird, direct, der dritten Potenz der Entfernung [illegible] ist, in der sich aber ausserdem, wenn β, γ, ... [illegible] werden dürfen, noch die ursprüngliche, d. h. die bei [illegible] stattfindende Norm gewissermassen abspiegelt. Für [illegible] die Grössen $\frac{\beta}{[illegible]}$, $\frac{\gamma}{[illegible]}$, ... als verschwindend klein betrach-[illegible] können, wird

$$[illegible] \left([illegible] + \frac{(n+1) V^2}{16 r^2 n \pi} + \dots \right).$$

[illegible] Rechnung liegt die Voraussetzung zu Grunde, [illegible] Theilchen von Hohlkugeln umgeben sei, über [illegible] Masse der übrigen Theilchen continuirlich ausgebreitet ist. [illegible] Folge dieser Annahme ist, dass für $n = 2$ die Hauptglieder [illegible] verschwinden, weil sie den Factor $n - 2$ enthalten. Es lässt [illegible] allerdings sehr leicht einsehen, dass, wenn die Bedingung der [illegible] Vertheilung über eine Hohlkugel nicht erfüllt ist, auch [illegible] Grössen nicht verschwinden werden; doch halte ich es [illegible] eine besondere Art der Atomvertheilung unter der [illegible] die wirkende Kraft dem Quadrat der Entfernung um-[illegible] proportional sei, noch einer näheren Prüfung zu unterziehen.

[illegible] und den tropfbaren Flüssigkeiten, wenn auch bei [illegible] vielleicht nicht ohne Ausnahme, muss die Gruppirung der [illegible] Theilchen bezüglich dreier auf einander senkrechter Axen eine [illegible] denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde auch die [illegible] nach den verschiedenen Richtungen verschieden aus-[illegible] würde eine Doppeltbrechung des Lichtes bewirken [illegible] ist eine Doppeltbrechung nicht vorhanden und

darum gilt die erwähnte Annahme wenigstens für diese. Unter den tropfbaren Flüssigkeiten mögen die circularpolarisirenden eine Ausnahme machen, die übrigen jedoch thun es schwerlich. Nach dieser Annahme bilden die Atome auf (gedachten) Kugeloberflächen Gruppen, deren einzelne Glieder gegen drei auf einander senkrecht stehende Axen so vertheilt sind, dass die Gruppirung bezüglich der einen Axe sich bei der andern wiederholt, wie die Ecke eines holoedrischen tesseralen Krystalles es gegen die krystallographischen Axen thut, und diese Axen, die ich als diejenigen der Coordinaten nehme, sollen auch die Richtungen angeben, in denen nach einander die Schwingungen vor sich gehen.

Macht der Radius eines Theilchens mit den Axen die Winkel γ, $\varkappa$, χ und ist x die Coordinate des schwingenden Theilchens, so ist die Kraft w, mit welcher letzteres von ersterem in die Gleichgewichtslage zurückgeführt wird,

$$w = -\frac{\alpha(r\cos\gamma - x)}{(r^2 - 2rx\cos\gamma + x^2)^{3/2}},$$

$$31)\quad = -\alpha\left[\frac{\cos\gamma}{r^2} + \frac{x}{r^3}(3\cos\gamma^2 - 1) + \frac{x^2}{r^4}\left(-\tfrac{9}{2}\cos\gamma - \tfrac{15}{2}\cos\gamma^3\right) + \frac{x^3}{r^5}\left(\tfrac{3}{2} - 15\cos\gamma^2 + \tfrac{35}{2}\cos\gamma^4\right) + \ldots\right].$$

Ausser dem ersten Atome befindet sich auf der entgegengesetzten Seite der Halbkugel dem ersten gegenüber ein zweites, bei dem $\cos\gamma$ den entgegengesetzten Werth hat, und es heben sich also infolge des Zusammenwirkens beider Theilchen die Glieder auf, welche mit ungeraden Potenzen von $\cos\gamma$ multiplicirt sind, während die übrigen sich addiren. Ausser diesen zwei Atomen sind noch zwei andere da, die mit der X-Axe die Winkel $\varkappa$ und χ machen, während zwei weitere die Winkel $180 + \varkappa$ und $180 + \chi$ haben. Durch Addition der Wirkungen wird

$$32)\quad w' = -\frac{\alpha x^3}{r^5}(-21 + 35(\cos\gamma^4 + \cos\varkappa^4 + \cos\chi^4) + \ldots).$$

Solcher Systeme von zusammengehörenden Atomen giebt es nun auf der Kugelfläche, die man sich mit dem Radius r um die Gleichgewichtslage gezogen denken kann, mehrere, und da jedenfalls eine möglichst gleichförmige Gruppirung der Atome stattfindet, so müssen um so mehr Systeme von zusammengehörenden Atomen da sein, je grösser die Kugeloberfläche ist. Die Zahl der Systeme wächst mit dem Quadrate von r, also muss der Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens noch mit r^2 multiplicirt werden. Es ist nun

$$33)\quad W' = -\frac{\alpha x^3}{r^3}\Sigma[-21 + 35(\cos\gamma^4 + \cos\varkappa^4 + \cos\chi^4) + \ldots].$$

Ausser der einen Kugelschale wirken noch diejenigen, deren Radien $2r$, $3r$, ... sind, und es wäre darauf bei Berechnung der Summe Rücksicht zu nehmen, sowie auch darauf, dass für jede Kugelfläche gleichviele

Gruppen zu bilden sind, weil dem Anwachsen der Zahl der Theilche in den grösseren Kugeln bereits durch die Einführung von r^2 Rechnung getragen ist. Der Ausdruck unter den eckigen Klammern in 33) ist jedenfalls positiv, denn sonst wäre die vorausgesetzte Atomgruppirung keine solche des Gleichgewichts. Setzt man den Coefficienten von x^3 in 33) gleich 2ψ, so wird analog der Gleichung 13)

$$34)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2\psi x^3$$

und daraus

$$35)\qquad V^2 - v^2 = \psi x^4.$$

Der grösste Werth von x, bei dem $V = 0$ wird, ist

$$36)\qquad x_0 = \sqrt[4]{\frac{V^2}{\psi}}.$$

Wird statt v^2 in 35) sein Werth $\frac{\partial x^2}{\partial t^2}$ gesetzt, so wird

$$37)\qquad \partial t = \frac{\partial x}{V\sqrt{1 - \frac{\psi x^4}{V^2}}}.$$

In dieser Gleichung ist nun $x = \cos\vartheta \sqrt[4]{\frac{V^2}{\psi}}$ zu setzen und es wird dann

$$38)\qquad \begin{aligned} t &= -\frac{1}{\sqrt[4]{4V^2\psi}} \int \frac{\partial\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\sin\vartheta^2}{2}}}, \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{256} + \tfrac{25}{2048} + \ldots\right)\frac{1}{\sqrt[4]{4V^2\psi}}, \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{A}{\sqrt[4]{4V^2\psi}}, \end{aligned}$$

wenn A gleich der Summe der Reihe gesetzt wird.

Die nach dem Radius gerichtete Componirende der Wirkung, welche das schwingende Theilchen seinerseits von den Punkten $\pm x$ aus auf ein äusseres Theilchen ausübt, dessen Radius mit der X-Axe den Winkel γ macht, ist angegeben durch

$$39)\qquad w_1 = -\frac{\alpha(r \pm x\cos\gamma)}{(r^2 \pm 2rx\cos\gamma + x^2)^{3/2}}.$$

Da das Theilchen nun, wie vorausgesetzt, abwechselnd in der X-, Y- und Z-Axe sich bewegt, so wird die in der Richtung des Radius thätige Componirende der Wirkung in den Fällen, dass das Theilchen sich in $\pm y$ und $\pm z$ befindet, ausgedrückt durch

$$\frac{-\alpha(r \pm y\cos\varkappa)}{(r^2 \pm 2ry\cos\varkappa + y^2)^{3/2}} \text{ und } \frac{-\alpha(r \pm z\cos\chi)}{(r^2 \pm 2rz\cos\chi + z^2)^{3/2}}.$$

Wird nun $x = y = z$ gesetzt und in Reihen entwickelt, so wird nach *Addition* sämmtlicher sechs Fälle

$$40)\quad W_1 = -6\alpha\left(\frac{1}{r^2} + \frac{x^4}{6r^6}\left(-\tfrac{105}{4} + \tfrac{175}{4}(\cos\gamma^4 + \cos\varkappa^4 + \cos\chi^4)\right) + \dots\right).$$

Hätte man statt eines Theilchens deren sechs, die sich gleichzeitig in $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ befänden, so wäre ihre gemeinschaftliche Wirkung auf das Theilchen der Kugeloberfläche die durch 40) angegebene W_1. Ist nur *ein* Theilchen da, das der Reihe nach die genannten sechs Stellungen einnimmt, so wird es nach und nach die nämliche Wirkung ausüben, welche die sechs auf einmal haben, und theilt man letztere durch 6, so ergiebt sich die mittlere Wirkung, die das Theilchen ausübt, wenn es sich abwechselnd in $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ befindet, wo $x = y = z$ ist.

Hält sich das Theilchen an diesen Punkten während der Zeit ∂t auf, so ist die Einwirkung damit zu multipliciren, und wird dann wieder λ und μ eingeführt, so ergiebt sich

$$41)\quad W_t = -\int(\lambda + \mu x^4)\,\partial t$$

oder nach 37)

$$W_t = -\int\frac{(\lambda + \mu x^4)\,\partial x}{V\sqrt{1 - \frac{\psi}{V^2}x^4}},$$

$$42)\quad = -\int\frac{\left(\lambda + \mu\frac{V^2}{\psi}\cos\vartheta^2\right)\partial\vartheta}{\sqrt[4]{4V^2\psi}\sqrt{1 - \frac{\sin\vartheta^2}{2}}}.$$

Das Integral von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 90^0$ genommen, giebt

$$43)\quad W_t = -\frac{\pi}{2\sqrt[4]{4V^2\psi}}\left(A\lambda + \frac{B\mu V^2}{\psi} + \dots\right),$$

in welcher Gleichung A die Constante aus 38), B eine neue Constante bedeutet. W_t giebt nun die Wirkung, während das Theilchen von $x = 0$ bis $x = x_0$ geht, und wenn man mit der mittlerweile verflossenen Zeit 41) dividirt, so ergiebt sich die Wirkung, die während der Zeiteinheit stattfindet. Diese ist

$$44)\quad W_1 = -\left(\frac{\alpha}{r^2} + \tfrac{5}{12}\frac{B}{A}\frac{V^2}{r^3}\frac{(-3 + 5(\cos\gamma^4 + \cos\varkappa^4 + \cos\chi^4))}{\Sigma(-3 + 5(\cos\gamma^4 + \cos\varkappa^4 + \cos\chi^4))} + \dots\right).$$

Das Ergebniss ist, wie oben, das Auftreten einer neuen Kraft, welche dem Quadrate von V direct, der dritten Potenz von r umgekehrt proportional ist.

Da es sich im Nachstehenden nicht um die Bestimmung der Constanten α, β, ..., sondern höchstens um die Frage handelt, ob ausser α noch andere Constante vorhanden seien, so kann einstweilen von 44) Umgang genommen werden, und ich werde mich daher der Gleichung 29) bedienen, der ich die einfachere Form geben will:

45) $$W_1 = -\left(M + \frac{K\tau L}{r^3}\right),$$

wobei

$$\frac{\alpha}{r^m} + \frac{\beta}{r^\mu} + \ldots = M,$$

$$\frac{n+1}{16\pi n} = K,$$

$$v^2 = \tau,$$

$$1 + \left(\frac{\mu+1}{n+1} - \frac{\mu}{n}\right)\frac{\mu-2}{n-2} \cdot \frac{\beta}{\alpha r^{\mu-n}} + \ldots = L$$

gesetzt sein soll. Ausserdem soll versuchsweise τ als der absoluten Temperatur gleich gesetzt werden. Es ist dieses zur Zeit eine willkürliche Annahme, deren Richtigkeit oder, wenn man will, Genauigkeit der Vergleichung der Resultate von Rechnung und Beobachtung überlassen bleiben mag.

Werden nun die verschiedenen zwischen zwei Moleculen thätigen Kräfte zusammengenommen, so hat man den Luftdruck p und den Aetherdruck Δr, welche die Molecule einander zu nähern suchen, während die Molecularthätigkeit M, die durch die Temperaturwirkung $\frac{K\tau L}{r^3}$ verstärkt ist, die Molecule von einander entfernen würde. Für den Gleichgewichtszustand muss

$$p + \Delta r - M - \frac{K\tau L}{r^3} = 0,$$

46) $$(M - p - \Delta r)\frac{r^3}{K L} + \tau = 0$$

oder

47) $$F(r) + \tau = 0$$

sein. Aendert sich τ um $\Delta\tau$, so ändert sich r um Δr und 47) geht über in

48) $$F(r) + F'(r)\Delta r + F''(r)\Delta r^2 + \ldots + \tau + \Delta\tau = 0.$$

Wird der Einfachheit wegen für $F'(r)$, $F''(r)$, ... a, b, ..., l, m, für Δr aber x gesetzt, so wird

49) $$m x^n + l x^{n-1} + \ldots + b x^2 + a x + \Delta\tau = 0.$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung 76) in meiner Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung u. s. w.“. Es ist nur in der gegenwärtigen Gleichung die Ableitung insofern eine allgemeinere, als ich bezüglich der gegenseitigen Einwirkung der Molecule weiter gar Nichts vorausgesetzt habe, als dass dieselbe eine Function der Entfernung sei. Ausserdem habe ich statt einer bestimmten Richtung der Schwingungen vorausgesetzt, dass letztere in allen möglichen Richtungen vor sich gehen können, was wenigstens bei den nicht krystallisirten Körpern der Natur entsprechen dürfte.

Ist in 49) n gross genug, so kann für die jeweiligen Werthe von $\Delta\tau$ von x mit entsprechender Genauigkeit bestimmt werden. Wird

bei einem Körper $\Delta\tau$ nach und nach grösser, so ändert sich auch der Werth von x, und wird dieser für eine gegebene Grösse von $\Delta\tau$ imaginär, so ist dieses ein Zeichen, dass es hier für diese Temperatur keine Gleichgewichtslage mehr gebe. Es werden sich also die Atome, ihrer gegenseitigen Abstossung gehorchend, von einander entfernen und es tritt eine Verdampfung ein, wenn die Theilchen nicht unterwegs eine neue Gleichgewichtslage passiren. In letzterem Falle beschränkt sich die Aggregatzustandsveränderung auf den Uebergang von einem festen Aggregatzustand in einen andern festen oder in einen flüssigen, oder von einem flüssigen in einen andern flüssigen.

Das Sieden der Flüssigkeiten.

Die den nachstehenden Rechnungen zu Grunde liegenden Beobachtungen sind von Kopp (Pogg. Ann. LXXII) veröffentlicht. Es wurde von den einzelnen Beobachtungen in der Weise eine Auswahl getroffen, dass bei nahe gleichmässiger Ausdehnung die Beobachtungstemperaturen in nahe gleichen Intervallen genommen wurden, während bei ungleichmässiger Ausdehnung näher an einander liegende Temperaturen zur Rechnung benützt wurden, wenn die Ausdehnung stärkere Abweichungen zeigte.

Alkohol. Wird das Volumen desselben bei 0° gleich 1 gesetzt, so ist es den Beobachtungen zufolge bei

15°	1,01585,	50°	1,05623,
20°	1,02128,	60°	1,06910,
25°	1,02680,	75°	1,08994.
40°	1,04404,		

Der beobachtete Siedepunkt ist 78,4°.

Diese Beobachtungen können nun in verschiedener Weise combinirt werden. Werden diejenigen von 40° und 75° gewählt, so ergiebt sich bei denselben die lineare Ausdehnung also das x der Gleichung 49) zu 0,0144696 und 0,0291237, während die Werthe von $\Delta\tau$ 40 und 75 sind. Werden diese Ziffern in 49) eingesetzt, so bekommt man zwei Gleichungen, welche $b = 12910,65$ und $a = -2951,228$ ergeben. Die Gleichung 49) wird demnach zu

50) $$12910,65\,x^2 - 2951,228\,x + \Delta\tau = 0,$$

woraus sich

$$x = 0,1142943 \pm \sqrt{0,1142943^2 - 0,0^4 7745542\,\Delta\tau}$$

ableitet. Wenn nun $\Delta\tau$ mehr und mehr wächst, so muss der Werth des Wurzelausdruckes fortwährend abnehmen und endlich bei

51) $$\Delta\tau = \frac{0,1142943^2}{0,0^4 7745542} = 168,654$$

verschwinden. Steigt $\Delta\tau$ noch weiter, so wird der Wurzelausdruck imaginär, es giebt also *keinen* Gleichgewichtszustand mehr, die Atome ent-

ternen sich also der Alkohol kocht. Vergleicht man den berechneten Siedepunkt 78,454° mit dem beobachteten 78,4°, so ist allerdings eine grosse Differenz vorhanden; man kann sich aber dem Beobachtungsresultate nähern.

Werden die Beobachtungen von 25°, 50° und 75° zur Bestimmung der Constanten verwendet, so erhält man die Gleichung

$$32)\qquad [illegible]\,x^3 - 5334,15\,x^2 - 2905,223\,x + \Delta\tau = 0.$$

Wird diese Gleichung nach x und $\Delta\tau$ differentiirt und $\frac{\partial \Delta\tau}{\partial x} = 0$ gesetzt, so ergiebt sich

$$33)\qquad x^2 - [illegible]\,x - 0,00941203 = 0,$$

und daraus leitet sich ab, dass x bei 0,07370231 einen extremen Werth erhält, woraus sich dann der Siedepunkt zu 127,656° ergiebt, welcher sonach dem Beobachtungsresultat schon bedeutend genähert ist.

Werden die Beobachtungen 15°, 30°, 45°, 60° und 75° zusammengenommen, so erhält man die Gleichung

$$34)\qquad [illegible]\,x^5 - [illegible]\,x^4 + 539195,0\,x^3 + 2515,61\,x^2 - 2880,396\,x + \Delta\tau = 0.$$

Hier wird x imaginär, wenn $\Delta\tau = 115,366°$, und der berechnete Siedepunkt hat sich also dem beobachteten abermals genähert.

Es dürfte nun wohl die Erwartung berechtigt sein, dass bei Fortsetzung des Verfahrens Rechnung und Beobachtung endlich zusammenfallen, doch ist der Grad der hierzu nöthigen Gleichung wohl ein ziemlich hoher. Ich habe Anstand genommen, in der Rechnung weiter zu gehen, weil ich fürchtete, dass die unvermeidlichen Fehler der Beobachtung das Resultat am Ende sehr fraglich machen würden.

Bei Zusammenstellung der Beobachtungen 20°, 40°, 60° und 75° ergiebt sich die Gleichung

$$35)\qquad [illegible]\,x^4 - [illegible]\,x^3 - 4554,00\,x^2 + 2886,203\,x - \Delta\tau = 0.$$

Diese Gleichung giebt keinen Siedepunkt, denn sie hat keinen grössten Werth von $\Delta\tau$.

Die oben angegebenen Volumina des Alkohols sind das Mittel aus den Beobachtungsreihen. Für 75° erhielt Kopp 1,08986, 1,08971 und [illegible]. Setzen wir den Fall, letztere Beobachtung sei die einzige und es werden mit ihr die obigen Beobachtungen von 20°, 40° und 60° combinirt, so ergiebt sich die Gleichung

$$36)\qquad [illegible]\,x^4 - [illegible]\,x^3 - 6622,76\,x^2 + 2894,301\,x - \Delta\tau = 0,$$

und aus dieser berechnet sich der Siedepunkt des Alkohols zu 120,86°. Die Grenze, bei welcher das Imaginärwerden von x eintritt, liegt also [illegible] die verschiedenen Beobachtungsergebnisse. Ich muss übrigens [illegible], dass aller Wahrscheinlichkeit nach die Thermometer[illegible] sind, je nachdem man sie weiter oben oder [illegible]. Das Quecksilber dehnt sich ungleichmässig aus und

mit der Luft ist es auch nicht anders. Die beobachteten Volumina des Alkohols entsprechen daher etwas niedrigeren Temperaturen, als angegeben, und zwar ist die Abweichung grösser, wenn die Temperatur steigt. Es entsprechen also eigentlich die beobachteten Ausdehnungen niedrigeren Temperaturen, als angegeben, um so niedrigeren, je grösser der Werth der Ausdehnung ist, oder mit anderen Worten: die wirkliche Ausdehnung ist grösser, als die beobachtete, und die Differenz wächst mit der Temperatur. Dieser Umstand würde eine Erniedrigung des Siedepunktes verursachen.

Wie schon die Verschiedenheit der berechneten Werthe der Coefficienten von x, x^2, ... in den verschiedenen Gleichungen 53) bis 56) ergiebt, geben die vorstehenden Formeln die Ausdehnung des Alkohols nicht vollständig, und es ist recht gut möglich, dass, wenn eine Gleichung von sehr hohem Grade berechnet würde, das Imaginärwerden der Wurzel auch für den Fall einträte, dass das Volumen des Alkohols bei 75° 1,08994 ist, wie dieses ursprünglich angenommen wurde.

Wasser. Die Ergebnisse der Volumbeobachtungen sind:

	Vol. bei 0° = 1:	Vol. bei 4° = 1:
40°	1,007531,	1,007655,
50°	1,011766,	1,011890,
60°	1,016590,	1,016715,
70°	1,022246,	1,022372,
80°	1,028581,	1,028707,
100°	1,042986,	1,043114.

Combinirt man die Beobachtungen von 40° und 100°, so erhält man die (auf das Volum bei 4° = 1 bezogene) Gleichung

$$633984{,}0\,x^2 - 15758{,}4\,x + \varDelta\tau = 0,$$

woraus sich der Siedepunkt zu 97,923° (über 4° C.) ergiebt.

Bei Zusammenstellung der Beobachtungen von 50° und 100° resultirt die Gleichung

$$47709{,}2\,x^2 - 13535{,}27\,x + \varDelta\tau = 0.$$

Der Siedepunkt berechnet sich hieraus zu 96,000° (über 4° C.) und hier fallen also Rechnung und Beobachtung vollständig zusammen.

Werden die Beobachtungen von 60° und 100° zusammengenommen, so wird

$$386107{,}1\,x^2 - 12246{,}04\,x + \varDelta\tau = 0$$

und der Siedepunkt ergiebt sich zu 101,101° C.

Die Combination der Beobachtungen von 40°, 60°, 80° und 100° giebt die Gleichung

$$7495585000\,x^4 - 249562100\,x^3 + 2981533\,x^2 - 20240{,}20\,x + \varDelta\tau = 0$$

und als Siedepunkt erhält man daraus 100,101° C.

Nimmt man die Beobachtungen 40°, 70° und 100° zusammen, so heisst die Gleichung

$$65386450\,x^3 - 1726906\,x^2 + 18116{,}44\,x - \varDelta\tau = 0.$$

Diese Gleichung ist der Gleichung 55) analog, sie giebt also auch keinen Siedepunkt. Eine kleine Verrückung der Beobachtungsdata würde wohl ähnliche Dienste leisten wie bei 55), doch habe ich dieselbe für überflüssig gehalten. Ebenso erachtete ich es als unzweckmässig, weiter, als bis zur vierten Potenz von x zu gehen, denn bei der geringen Ausdehnung, die das Wasser durch Temperaturerhöhung erfährt, heisst es schon den Beobachtungen viel zutrauen, wenn man nur bis zur vierten Potenz geht. Aus diesem Grunde habe ich auch den Alkohol und nicht, wie Kopp, das Wasser vorangesetzt. Ein Eingehen auf hohe Potenzen von x ist übrigens bei dem Wasser auch nicht nothwendig, um den Siedepunkt zu bestimmen, weil es sich gegen denselben hin viel rascher ausdehnt, als fern davon. Je gleichmässiger die Ausdehnung eines Körpers ist, um so höher ist der Grad der Gleichung, welche man braucht, um den Punkt zu bestimmen, an dem der Aggregatzustand sich ändert.

Holzgeist. Ueber sein Verhalten bei der Erwärmung finden sich unter den Kopp'schen Versuchen folgende:

	Volum	bei	25°	1,02912,
	"	"	30°	1,03513,
	"	"	35°	1,04124,
	"	"	45°	1,05391,
Siedepunkt: 65,5°.	"	"	65°	1,08147.

Werden von diesen Beobachtungen diejenigen von 30° und 65° verbunden, so ergiebt sich die Gleichung

$$9028{,}192\,x^2 - 2696{,}187\,x + \varDelta\tau = 0.$$

Aus dieser leitet sich die Siedehitze 201,298° ab. Verbindet man die Beobachtungen 35° und 65°, so wird

$$9576{,}397\,x^2 - 2710{,}687\,x + \varDelta\tau = 0,$$

woraus sich der Siedepunkt 191,821° ableitet.

Bei der Zusammenstellung von 25°, 45° und 65° erhält man die Gleichung

$$234584{,}1\,x^3 + 32{,}47\,x^2 - 2622{,}368\,x + \varDelta\tau = 0.$$

Aus dieser ergiebt sich als Siedetemperatur 106,573°. Es ist also hier bereits eine bedeutende Annäherung an das Ergebniss der Beobachtung erfolgt; doch ist aus der grossen Gleichmässigkeit der Ausdehnung des Holzgeistes zu schliessen, dass man ungeachtet der ersten Annäherung auf einen hohen Gleichungsgrad zurückzugreifen hätte, um die Beobachtung zu erreichen.

Buttersäure. In einer zweiten, in dem nämlichen Bande von *Pogg. Ann.* befindlichen Abhandlung hat Herr Kopp noch die Aus-

dehnung und die Siedepunkte einer grösseren Anzahl von Flüssigkeiten bestimmt. Ich habe mich davon dispensirt, sie alle zu berechnen, und will hier nur diejenige Flüssigkeit noch nehmen, welche unter den untersuchten Flüssigkeiten den höchsten Siedepunkt hat: die Buttersäure, und dann diejenige, deren Siedepunkt am tiefsten liegt: das Aldehyd.

Die Beobachtungen geben folgende Ausdehnungen der Buttersäure:

60°	1,06596,	110°	1,12909,
70°	1,07785,	155°	1,19584.
80°	1,09007,		

Siedepunkt 157°.

Die Verbindungen der Beobachtungen von 70° und 155°, 80° und 155°, 90° und 155° geben der Reihe nach

$$6673{,}703\,x^2 - 2933{,}190\,x + \varDelta\tau = 0,$$

Siedepunkt 322,27°;

$$6813{,}360\,x^2 - 2941{,}769\,x + \varDelta\tau = 0,$$

Siedepunkt 317,54°;

$$6670{,}008\,x^2 - 2932{,}963\,x + \varDelta\tau = 0,$$

Siedepunkt 322,42°.

Werden die Beobachtungen von 60°, 110° und 155° combinirt, so ergiebt sich

$$16523{,}46\,x^3 + 5265{,}663\,x^2 - 2909{,}048\,x + \varDelta\tau = 0,$$

welcher der Siedepunkt 263,004° entspricht. Die Annäherung an die Beobachtung ist weniger gross, als zu erwarten stand. Wahrscheinlich macht sich hier der obenerwähnte Umstand geltend, dass bei hohen Temperaturen die einzelnen Thermometergrade denen der niedrigen Temperaturen nicht gleichwerthig sind.

Aldehyd. Die beobachteten Volumina sind:

5°	1,00790,	15°	1,02476,
10°	1,01616,	20°	1,03372.

Siedepunkt 20,8°.

Durch Verbindung der Beobachtungen 10° und 20° erhält man

$$12803{,}64\,x^2 - 1935{,}004\,x + \varDelta\tau = 0,$$

Siedepunkt 73,109°.

Werden die Beobachtungen von 5°, 10°, 15° und 20° zusammengenommen, so wird

$$65473390\,x^4 - 1355156\,x^3 + 21239{,}06\,x^2 - 1951{,}367\,x + \varDelta\tau = 0.$$

Der Siedepunkt berechnet sich nun zu 31,820°.

Sieden bei verschiedenem äusseren Drucke. Die Zusammenstellung der Formeln 46) und 47) ergiebt, dass

$$F(r) = (M - Ar)\,\frac{r^3}{KL} - \frac{p\,r^3}{KL}.$$

Setzt man nun

$\tau + \Delta \tau = 0.$

[illegible] ungen ab-
[illegible] und Aus-
[illegible] würde diese
[illegible] vorstehende

[illegible]

[illegible] der Erschei-
[illegible] veranlasst:
[illegible] Körpers,
[illegible] Ausdehnung
[illegible] andere
[illegible] Wurzel imaginär

[illegible] erwähn-
[illegible] Wenn nun
[illegible] Imaginärwerden
[illegible] zweite
[illegible]
[illegible] Wurzel.
[illegible] beruht

[illegible] Imaginärwerden der Wurzel
[illegible] in denen sie
[illegible] entfernen, und
[illegible] bei dem Schmel-

[illegible] einer grössern
[illegible] wenn bei gleichem
[illegible] dass die Entfernungen
[illegible] der möglichst
[illegible] Flüssigkeiten, während
[illegible] Zwischenräume ein-
[illegible] Die Molecular-
[illegible] möge mir gestattet sein,
[illegible] Körper in eine Flüssigkeit
[illegible] Hohlräume das Gesammt-
[illegible] Entfernungen je zweier einander

zunächst benachbarten Theilchen bedeutend gewachsen sind, und es wäre eher zu erwarten, dass die Volumabnahme bei dem Schmelzen der Körper öfter einträte, als dieses in der That der Fall zu sein scheint.

Es unterscheidet sich also das Schmelzen von dem Sieden dadurch, dass bei ersterem noch eine reelle Wurzel vorhanden ist, in welcher die Atome aufgefangen werden, wenn ihre bisherige Wurzel imaginär wird, während dieses bei dem Sieden nicht der Fall ist.

Bezüglich des Nachstehenden muss ich, um Missverständnissen vorzubeugen, bemerken, dass ich hier zunächst den Nachweis bringen will, dass durch Imaginärwerden einer Wurzel auch bei den festen Körpern eine Aenderung des Aggregatzustandes eintreten müsse. Eine zweite Frage wäre die, ob der Körper im neuen Zustande eine Flüssigkeit sei oder ein Gas. Zur Beantwortung dieser Frage reichen die vorhandenen Beobachtungsdata nicht aus, und dieselbe soll daher zunächst unberücksichtigt bleiben, bis ausreichende Beobachtungen über das Verhalten der geschmolzenen Körper für grössere Temperaturintervalle zu Gebote stehen.

Die den nachstehenden Rechnungen zu Grunde liegenden Beobachtungen sind von Kopp in den Annalen der Chemie XCIII veröffentlicht worden.

Wachs. Die Beobachtungen geben nachstehende Volumina:

40°	1,0318,	60°	1,1276,
50°	1,0677,	64°	1,1607;

Schmelztemperatur: 64°.

Durch Combination der Beobachtungen 40° und 64° ergiebt sich

$$63221{,}84x^2 - 4476{,}473x + \Delta\tau = 0.$$

Dieser Gleichung entspricht der Schmelzpunkt 79,240°.

Werden die Beobachtungen von 50° und 64° mit einander verbunden, so wird

$$34945{,}17x^2 - 3036{,}373x + \Delta\tau = 0$$

mit dem Schmelzpunkte 65,957°.

Die Combination 40°, 50°, 60° und 64° giebt

$$56027140x^4 - 7118517x^3 + 319013{,}9x^2 - 6441{,}032x + \Delta\tau = 0.$$

Dieser Gleichung entspricht der Schmelzpunkt 64,17°.

Stearinsäure. Beobachtet ist:

40°	1,0278,
50°	1,0377,
70°	1,0793;

Schmelzpunkt: 70°.

Die Beobachtungen von 40° und 70° geben

$$98862{,}69x^2 - 5264{,}069x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 70,073°.

Durch Combination von 50° und 70° erhält man

$$98216{,}60\,x^2 - 5247{,}424\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 70,088°.

Oelsäurehaltige Stearinsäure. Die Beobachtungen geben:

	1_a:	1_b:
30°	1,0203	1,0190,
50°	1,0471	1,0429;

Schmelzpunkt: 58°.

Combination 1_a: $$14066{,}21\,x^2 - 5408{,}802\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 51,995°.

Combination 1_b: $$15636{,}89\,x^2 - 5750{,}872\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 52,876°.

Der berechnete Schmelzpunkt ist hier beträchtlich niedriger, als d[er] beobachtete. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Beimengung ein[er] fremden Substanz, der Oelsäure, einen Einfluss bekundet.

Stearin. Den Beobachtungen zufolge ist das Volum bei

30°	1,0148,
40°	1,0222,
50°	1,0308.

Bei 50° tritt eine Zusammensinterung bis 1,0076 ein, der Schmelzpun[kt] ist bei 60°.

Werden die Beobachtungen 30° und 50° combinirt, so wird

$$22672{,}50\,x^2 - 7224{,}014\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 57,543°.

Die Beobachtungen 40° und 50° geben

$$18650{,}64\,x^2 - 6815{,}272\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 62,260°.

Chlorcalcium. Beobachtet wurde:

20°	1,0066,
25°	1,0123,
29°	1,0200;

Schmelzpunkt: 29°.

Die Zusammenstellung von 20° und 29° giebt

$$1068754\,x^2 - 11456{,}917\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 30,704°.

Bei Benützung von 25° und 29° wird

$$686627{,}0\,x^2 - 8926{,}203\,x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 29,010°.

Phosphorsaures Natron. Beobachtete Volumina sind:

20°	1,0012,
30°	1,0031,
35°	1,0048;

Schmelzpunkt: 35°.

Zusammengestellte Temperaturen:

a) 20° und 35°:

$$23475630x^2 - 59410,57x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 37,588°.

b) 30° und 35°:

$$12653,900x^2 - 42123,94x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 35,056°.

Unterschwefligsaures Natron. Beobachtete Volumina sind:

30°	1,0032,
40°	1,0053,
45°	1,0068;

Schmelzpunkt: 45°.

Die Beobachtungen 30° und 45° geben

$$6904415x^2 - 35512,44x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 45,664°.

Werden 40° und 50° verbunden, so wird

$$5589278x^2 - 32538,11x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 47,355°.

Rose's leichtflüssige Metalllegirung. Diese Verbindung zeichnet sich dadurch aus, dass sie von 60° an nicht nur sich nicht ausdehnt, sondern sich zusammenzieht. Die Beobachtungen ergeben:

	Vol. bei 0° = 1:	Vol. bei 60° = 1:
60°	1,00267	1,0000000,
80°	1,00060	0,9979355,
90°	0,99724	0,9945845,
95°	0,99467	0,9920215.

Der Schmelzpunkt liegt zwischen 95° und 98°.

Die Combination der Beobachtungen 80° und 95° giebt

$$8049492x^2 - 34590,73x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 97,161° C.

Stellt man 90° und 95° zusammen, so wird

$$4037065x^2 - 23890,39x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 95,344° C.

Schwefel. Beobachtungsergebnisse sind:

50°	1,0101,	90°	1,0203,
60°	1,0127,	100°	1,0374,
70°	1,0153,	110°	1,0722,
80°	1,0179,	115°	1,0956;

Schmelzpunkt: 115°.

Werden die Beobachtungen 100° und 115° zusammengestellt, so ergiebt sich

$$236671,1x^2 - 11035,04x + \Delta\tau = 0;$$

Schmelzpunkt: 128,63°.

... benützt, so wird

... diejenigen der ... mit dem Ergebnisse von ... 160,33°, ... sind wenig von ... mit der Beobachtung, ... wenn die Beobachtung ... Rechnung und Beobach- ... in Rechnung ... dem beobachteten in ... Beobachtungen nimmt, welche ... Krümmung der Aus-

... bemerkt habe, die ... an einander liegen, ... Es ist eher darauf ... zeigen, als dass

... Beobachtungen von selbst, ... Punkte bestimmen ... die Curve

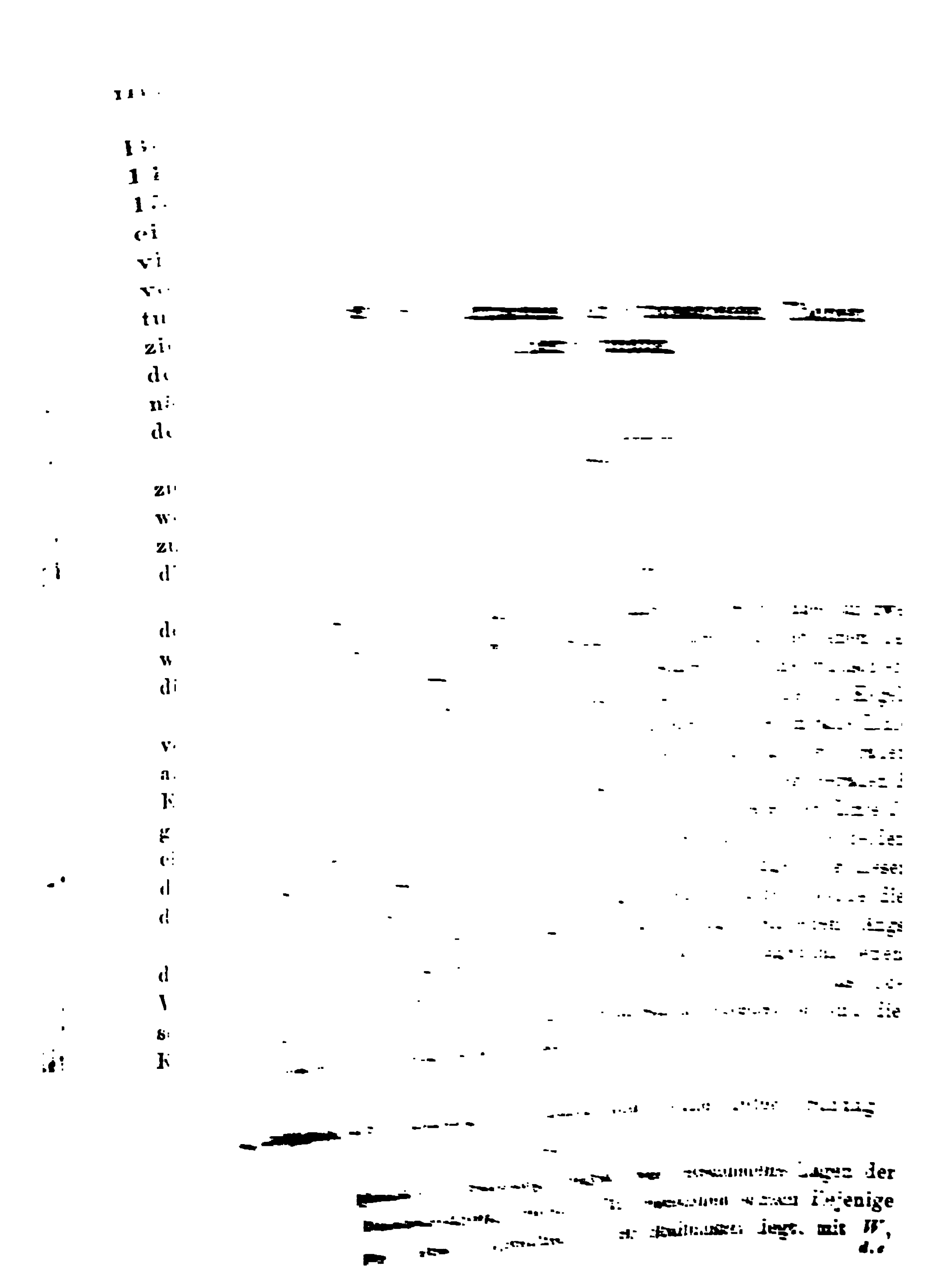
... Schmelzpunkt bei den ... an den beobachteten ... des Phosphors. Nach ... von 0° bis 40° ... seine Ausdehnung nur um ... grösser, als sie bei vollstän- ... bei der Verbindung mit ... statt von 44°, ... schwerlich leugnen lassen. ... von mir angegebenen ... ein sonderbarer Zufall ... des Phosphors nur solche ... die sich der Rech- ... handeln, wie das ab-

... gemacht, dass sich ein Körper ... richte, je regelmässiger ... bei dem Phosphor gegeben. ... genügt sie mir darum

nicht vollständig, weil es, um den Schmelzpunkt bestimmen zu können, bei den übrigen Körpern gar nicht nöthig ist, zu einem hohen Grade der Gleichung seine Zuflucht zu ergreifen. Warum soll dieses gerade bei dem Phosphor der Fall sein? Anders wäre es, wenn es sich um eine Siedepunktsbestimmung handelte, denn da sind im Gegensatze zu den Schmelzpunkten unregelmässige Ausdehnungen und Gleichungen von niedrigem Grade eine Ausnahme. Ich möchte daher eher glauben, dass die Ausdehnung des Phosphors am Ende doch nicht so ganz regelmässig ist. Die Kopp'schen Versuche bilden zwei Reihen, nach denen der Ausdehnungscoefficient zwischen 8,3° und 15,8° 0,000351 und 0,000366, zwischen 15,8° und 41,1° 0,000371 und 0,000396, dann zwischen 15,8° und 43,1° 0,000369 und 0,000397 ist, und es ergiebt sich hieraus doch ein kleiner Unterschied zwischen der Ausdehnung bei niedrigerer und höherer Temperatur. Wären Beobachtungen über die mittleren Temperaturen vorhanden, so könnte es sein, dass auch der Phosphor sich der allgemeinen Regel anschliesst.

Es möge mir hier gestattet sein, auf die obenerwähnte Aufgabe zurückzukommen, die zweite Wurzel nachzuweisen, in welcher der Körper nach dem Imaginärwerden der ersten fortgeht, um bei dem Imaginärwerden der zweiten Gasgestalt anzunehmen. Bedingung der Aggregatzustandsänderung ist ungleichförmige Ausdehnung bei gleicher Temperaturzunahme. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es weder Sieden, noch Schmelzen. Ist ein Körper weit von der Aggregatzustandsänderung entfernt, so dehnt er sich also im Allgemeinen regelmässig aus, und dieses wird also zunächst bei den Temperaturen eintreten, welche wenig über dem Schmelzpunkte sind. Ueber die Strecke nun, in welcher die Ausdehnung der geschmolzenen Körper noch regelmässig ist, gehen die Kopp'schen Versuche nicht hinaus und es ist also zur Bestimmung der zweiten (Flüssigkeits-) Wurzel kein Beobachtungsmaterial gegeben.

Ich habe oben versuchsweise angenommen, dass die Temperatur dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, mit welcher die Molecule die Gleichgewichtslage passiren, und in dem Zusammenstimmen von Rechnung und Beobachtung dürfte wohl eine Rechtfertigung dieser meiner Voraussetzung zu finden sein. Es ist jedoch dabei nicht zu übersehen, dass weder die Gleichung 29), noch 44) mit dem Gliede abschliesst, in welchem das Quadrat von V vorkommt, und es giebt daher noch Glieder, in denen t^2, t^3, ... vorkommt. Es geht mit der angeführten Norm, wie mit den anderen Gesetzen auch; sie ist nur richtig, wenn die Beobachtungen nicht sehr genau sind, und je weiter eine gewisse Grenze überschritten wird, um so leichter lässt sich die Ungenauigkeit wahrnehmen. Mit dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze ist der Fall der nämliche.



diejenige dagegen, deren Doppellinie sich in unendlicher Entfernung befindet, mit $W_{d,\infty}$.

Die Gleichung einer windschiefen Fläche dritter Ordnung lässt sich aber nur dann in die Form 1) bringen, wenn die beiden Geraden D und E getrennt liegen, denn sobald diese beiden Leitlinien sich decken, müssen auch die vorerwähnten Tangentialebenen zusammenfallen.

Von Cayley wurde zuerst nachgewiesen, dass eine windschiefe Fläche dritter Ordnung existirt, deren beide gerade Leitlinien sich decken.* Diese Fläche entspricht der Gleichung

$$2)\qquad x_2^3 + x_1(x_1x_3 + x_2x_4) = 0,$$

und die Lage der Linie T, welche D und E enthält, ist bestimmt durch die beiden Relationen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Die Erzeugung dieser windschiefen Fläche kann in folgender Weise geschehen:

„Man nehme in $x_1=0$, $x_2=0$ eine Reihe von Punkten und lege durch diese Gerade eine dieser Reihe nach gleichem Doppelverhältniss entsprechende oder homographische Reihe von Ebenen. Dann liegt die Erzeugende der Fläche dritter Ordnung, welche von irgend einem Punkte der Doppellinie ausgeht, in der jenem Punkte entsprechenden Ebene und schneidet eine ebene Curve dritter Ordnung, welche den Durchschnittspunkt ihrer Ebene mit der Doppeldirectrix zum Doppelpunkt hat."**

In dem Folgenden möge diese letztere Fläche, wenn ihre Linie T in der Endlichkeit liegt, mit $W_{t,e}$, dagegen falls sich T in unendlicher Entfernung befindet, mit $W_{t,\infty}$ bezeichnet werden.

Abschnitt I.

Die Polarflächen der windschiefen Flächen $W_{d,e}$ und $W_{d,\infty}$.

1. **Die Gleichungen der Polarflächen eines Punktes bezüglich einer windschiefen Fläche 1).** Gegeben seien die tetraedrischen Coordinaten eines Punktes (k) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Durch Differentiation der Gleichung 1) lassen sich in bekannter Weise die Gleichungen der Polarflächen*** des-

---

* Crelle, Journ. f. Math. Bd. 60, S. 315.

** Salmon, Analyt. Geom. d. Curv. i. Raum u. Flächen, deutsch von Prof. Fiedler, S. 390.

*** Salmon, Analyt. Geom. d. Fl. S. 15.

selben in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) aufstellen, nämlich die der quadratischen Polarfläche P_{kq}

[illegible] $\xi_1 x_4^2 - \xi_4 x_2^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 - 2\xi_4 x_1 x_4 = 0$

und die der Polarebene $P_{k'}$

[illegible] $\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4 = 0.$

[illegible] Die quadratische Polarfläche. Aus der Gleichung 3) folgt: Die quadratische Polarfläche des Punktes k bezüglich einer windschiefen Fläche [illegible] ist eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung, welche die Doppellinie D in sich enthält.

Die [illegible] für die Flächen W und W gestalten sich in folgender Weise:

[illegible] bezüglich [illegible] Hyper- [illegible] fläche. [illegible] Sitt mit [illegible]

Die Fläche P_{kq} bezüglich W ist ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Axe in der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ liegt; dasselbe geht durch die unendlich ferne Doppellinie und wird [illegible] von der Ebene $x_4 = 0$ berührt.

Ein System von Geraden auf dem Paraboloid ist der Ebene $x_3 = 0$ parallel; die zu diesem System gehörende, in der Ebene $x_3 = 0$ liegende Gerade entspricht den Gleichungen

$$\xi_4 x_4 + 2\xi_4 x_1 = 0, \quad x_3 = 0.$$

[illegible] und [illegible] ergiebt sich:

[illegible] wird von der zugehörigen quadratischen [illegible] in der Linie D noch in einer Raum- [illegible], deren Projection auf die Ebene $x_3 = 0$

[illegible] $x_1 x_2 + 2\xi_4 x_1 x_3 = 0$

Der Pol k werde längs einer Parallelen zu der Geraden $x_2=0$, $x_3=0$ verschoben, dann folgt aus Gleichung 3):

Verschiebt man den Pol k parallel der Geraden

$$x_2=0, \quad x_3=0,$$

so ändern sich zugleich die Axen des Hyperboloids $P_k q$ bezüglich $\underset{d,e}{W}$.

so tritt eine Verschiebung, aber keine sonstige Veränderung des hyperbolischen Paraboloids $P_k q$ bezüglich $\underset{d,\infty}{W}$ ein.

Setzt man $\xi_2=0$, so gehen die Gleichungen 3) und 5) über in

$$\xi_1 x_4^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0,$$

$$\xi_1 x_2 x_4 - 2\xi_3 x_2 \sqrt{x_1 x_2} + 2\xi_4 x_1 x_2 = 0.$$

α) Befindet sich demnach der Pol k in der Ebene $x_2=0$,

so wird das Hyperboloid $P_k q$ bezüglich $\underset{d,e}{W}$ von jeder Ebene, welche $x_4=0$ parallel läuft,

so wird das hyperbolische Paraboloid $P_k q$ bezüglich $\underset{d,\infty}{W}$ von jeder Ebene, welche $x_1=0$ parallel läuft,

in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.

β) Liegt der Pol k in der Ebene $x_2=0$, so besteht die Projection der Raumcurve, in der eine windschiefe Fläche 1) von der zugehörigen quadratischen Polarfläche $P_k q$ geschnitten wird, auf die Ebene $x_3=0$ aus einer Doppelgeraden und einem Kegelschnitt.

Es sei $\xi_2=0$, $\xi_3=0$, dann gehen die Gleichungen 3) und 5) über in

$$\xi_1 x_4^2 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0, \quad \xi_1 x_2 x_4 + 2\xi_4 x_1 x_2 = 0.$$

Verlegt man also den Pol k in die Axe $x_2=0$, $x_3=0$, so degenerirt die quadratische Polarfläche $P_k q$ bezüglich einer windschiefen Fläche 1) in zwei Ebenen, und die Projection der Raumcurve 5), in der sich die windschiefe Fläche und die quadratische Polarfläche schneiden, geht über in zwei Doppelgerade, von denen die eine mit der Geraden D zusammenfällt.

3. **Die Polarebene.** Der Gleichung 4) entspricht die Polarebene des Punktes k bezüglich einer windschiefen Fläche 1). Dieselbe schneidet die Doppellinie $x_3=0$, $x_4=0$ in demjenigen Punkte, in welchem eine durch k gehende Ebene die windschiefe Fläche berührt.

Die Schnittcurve einer windschiefen Fläche 1) und der zugehörigen Polarebene ($P_k e$) ist von der dritten Ordnung und die Projection derselben auf $x_2=0$ besitzt die Gleichung

6) $$x_1(\xi_4^2 x_3^2 - \xi_3^2 x_4^2) - 2x_3^2(\xi_2 \xi_3 x_3 - \xi_1 \xi_4 x_4) = 0.$$

Als besondere Lagen der Polarebene $P_k e$ lassen sich folgende anführen.

Befindet sich der Punkt k in der Ebene $x_2=0$, so steht die Polarebene $P_k e$ auf der Ebene $x_3=0$ lothrecht.

Liegt der Pol k auf der Ebene $x_3=0$,

so ist die Polarebene $P_k e$ bezüglich der Fläche $\underset{d.e}{W}$ der Ebene $x_4=0$ parallel

so ist die Polarebene $P_k e$ bezüglich der Fläche $\underset{d.\infty}{W}$ der Ebene $x_1=0$ parallel

und die Projection der Schnittcurve besteht aus drei Geraden, von denen zwei zusammenfallen.

Wenn sich der Pol k auf der Ebene $x_4=0$ befindet, so steht die Polarebene $P_k e$ bezüglich $\underset{d.e}{W}$ auf dieser Ebene lothrecht und enthält die Axe $x_2=0$, $x_3=0$ in sich. Die Projection der Schnittcurve ist eine Parabel dritter Ordnung.

Liegt der Pol k auf der Ebene $x_1=0$, so geht die Polarebene $P_k e$ bezüglich der Fläche $\underset{d.\infty}{W}$ durch den Punkt $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.

4. **Beziehungen der Polarflächen zu einander.** Aus den Gleichungen 3) und 4) folgt:

α) Die Polarebene des Punktes k in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) ist zugleich die Polarebene desselben Punktes bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_k q$.

β) Geht die quadratische Polarfläche des Punktes k durch den Punkt h, so liegt auch der Punkt k auf der Polarebene des Punktes h.

Daraus folgt: Der geometrische Ort der Pole k, deren quadratische Polarflächen alle durch den Punkt h gehen, ist die Polarebene des Punktes h, und der geometrische Ort der Pole k, deren Polarebenen alle den Punkt h enthalten, ist die quadratische Polarfläche des Punktes h.

5. **Der Pol liege auf der windschiefen Fläche.** Befindet sich der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so berührt die Polarebene $P_k e$ sowohl die windschiefe Fläche, als auch die quadratische Polarfläche $P_k q$ in diesem Punkte. Demnach muss auch die windschiefe Fläche von der quadratischen Polarfläche $P_k q$ im Punkte k berührt werden.

α) Durch Elimination von x_2 aus den Gleichungen 1) und 3) erhält man, wenn man zugleich für ξ_2 den Ausdruck $\frac{\xi_1 \xi_4^2}{\xi_3^2}$ substituirt,

$$7a)\quad \xi_1 \xi_3^2 x_3^2 x_4^2 - \xi_1 \xi_4^2 x_3^4 - 2\xi_3^3 x_1 x_3 x_4^2 + 2\xi_3^2 \xi_4 x_1 x_3^2 x_4 = 0$$

oder

$$7b)\quad x_3=0,\quad \xi_4 x_3 - \xi_3 x_4 = 0,\quad \xi_1 x_3(\xi_3 x_4 + \xi_4 x_3) - 2\xi_3^2 x_1 x_4 = 0.$$

Befindet sich demnach der Pol k auf einer windschiefen Fläche 1), so schneidet die quadratische Polarfläche $P_k q$ die windschiefe Fläche ausser in der Doppellinie in zwei Geraden, von denen die eine die durch den Punkt k gehende *Generatrix* ist, und in einer Curve zweiter Ordnung.

Die Projection der letzteren Curve,

in der die windschiefe Fläche $W_{d.e}$ von der zugehörigen quadratischen Polarfläche $P_k q$ geschnitten wird, auf $x_2 = 0$ ist eine Hyperbel.

in der die windschiefe Fläche $W_{d.\infty}$ von der zugehörigen quadratischen Polarfläche $P_k q$ geschnitten wird, auf $x_2 = 0$ ist eine Parabel.

β) Eliminirt man aus den Gleichungen 1) und 4) x_2 und setzt zugleich $\frac{\xi_1 \xi_4^2}{\xi_3^2}$ für ξ_2 ein, so ergiebt sich

8a) $$\xi_3 \xi_4^2 x_1 x_3^2 - \xi_3^3 x_1 x_4^2 - 2 \xi_1 \xi_4^2 x_3^3 + 2 \xi_1 \xi_3 \xi_4 x_3^2 x_4 = 0$$

oder

8b) $$\xi_4 x_3 - \xi_3 x_4 = 0, \quad \xi_3 \xi_4 x_1 x_3 - 2 \xi_1 \xi_4 x_3^2 + \xi_3^2 x_1 x_4 = 0.$$

Die Tangentialebene am Punkte k einer windschiefen Fläche 1) schneidet dieselbe demnach in der durch den Punkt k gehenden Generatrix und in einem Kegelschnitte. Der Kegelschnitt schneidet die Generatrix im Punkte k und in der Doppellinie der windschiefen Fläche.

Die Projection des Kegelschnittes,

in dem die windschiefe Fläche $W_{d.e}$ von der Tangentialebene am Punkte k geschnitten wird, auf $x_2 = 0$ ist eine Parabel.

in dem die windschiefe Fläche $W_{d.\infty}$ von der Tangentialebene am Punkte k geschnitten wird, auf $x_2 = 0$ ist ein Hyperbel.

Rückt der Berührungspunkt k auf einer Generatrix einer windschiefen Fläche 1) fort, so dreht sich die Tangentialebene um diese Generatrix.

Jede Ebene E, welche die einfache Leitlinie einer windschiefen Fläche 1) in sich enthält, ist eine Doppeltangentenebene derselben. Die beiden Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der einfachen Leitlinie und der beiden Erzeugenden, welche auf der Ebene E liegen.

Eine Gerade G durchsticht eine windschiefe Fläche 1) im Allgemeinen in drei Punkten, von denen jeder in einer Generatrix liegt. Durch jede geschnittene Generatrix und die Gerade g ist eine Tangentialebene der Fläche bestimmt. Daraus folgt:

Durch eine Gerade G lassen sich drei Tangentialebenen an eine windschiefe Fläche 1) legen; dieselbe gehört demnach nicht nur der dritten Ordnung, sondern auch der dritten Classe an.

γ) Wenn man endlich aus den Gleichungen 3) und 4) x_2 eliminirt, so erhält man

9a) $$2 \xi_3 \xi_4^2 x_1 x_3 - 3 \xi_1 \xi_4^2 x_3^2 + 4 \xi_1 \xi_3 \xi_4 x_3 x_4 - \xi_1 \xi_3^2 x_4^2 - 2 \xi_3^2 \xi_4 x_1 x_4 = 0$$

oder

9b) $$\xi_4 x_3 - \xi_3 x_4 = 0, \quad 2 \xi_3 \xi_4 x_1 - 3 \xi_1 \xi_4 x_3 + \xi_1 \xi_3 x_4 = 0.$$

Daraus folgt:

Die Tangentialebene am Punkte k einer windschiefen Fläche 1) schneidet die quadratische Polarfläche dies-

Punkten in zwei Geraden, welche die Inflexionstangenten der windschiefen Fläche im Punkte A sind. Die eine dieser Inflexionstangenten fällt mit der durch A gehenden Generatrix zusammen.

6. **Die Diametralflächen.** Gegeben sei eine Gerade T, welche eine windschiefe Fläche [illegible] im Allgemeinen in n Punkten durchsticht. Es lässt sich an eine solche Transversale ein Punkt bestimmen, für welchen die algebraische Summe seiner Entfernungen von den Schnittpunkten verschwindet. Dieser Punkt [illegible] der mittleren Entfernung der Schnittpunkte [illegible] des Centrums der [illegible] parallelen Transversalen bezeichnet [illegible] Transversalen conjugirte Diametral- [illegible] Fläche; dagegen [illegible] die Summe der [illegible] gemessen durch die [illegible] der Richtung [illegible] Die Dia- [illegible] Punkte. [illegible] Bezeichnungen der [illegible] indem man

[illegible]

[illegible] wir Carte-

[illegible] setzen.

[illegible]

[illegible] die Dia- [illegible]

[illegible] Ebene [illegible] senkrecht [illegible] zusammenfällt.

Nach 10b) steht die einem Strahlenbündel conjugirte Diametralebene der windschiefen Fläche $W_{d.e}$ auf der XY-Ebene lothrecht. Laufen die Transversalen der YZ-Ebene parallel, so ist die Diametralebene derselben Ebene parallel. Gehen die Transversalen der XZ-Ebene parallel, so liegt die Diametralebene in unendlicher Entfernung. Wenn endlich das Transversalenbündel der XY-Ebene parallel ist, so enthält die Diametralebene die Z-Axe in sich.

B. Die Diametralflächen der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$.

Wir führen ebenfalls Cartesische Coordinaten ein, indem wir x' für $\frac{x_1}{x_4}$, y' für $\frac{x_2}{x_4}$, z' für $\frac{x_3}{x_4}$ setzen. Die Winkel, unter denen jede Gerade des parallelen Strahlenbündels gegen diese neuen Coordinatenaxen geneigt ist, mögen α', β', γ' heissen. Aus den Relationen 3) und 4) erhalten wir dann die Gleichung der Diametralfläche zweiter Ordnung

11a) $$z'^2 \cos\beta' + 2y'z' \cos\gamma' - \cos\alpha' = 0$$

und die der Diametralebene

11b) $$y' \cos\gamma' + 2z' \cos\beta' = 0.$$

Aus der Gleichung 11a) erhellt:

Die einem Strahlenbündel conjugirte Diametralfläche zweiter Ordnung der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$ ist ein hyperbolischer Cylinder, dessen Generatrix der X'-Axe parallel läuft.

Zieht man das Strahlenbündel der $Y'Z'$-Ebene parallel, so degenerirt die Diametralfläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen, von denen die eine mit der $X'Y'$-Ebene zusammenfällt, die zweite auf der $Y'Z'$-Ebene lothrecht steht und die X'-Axe in sich enthält.

Ist jeder Strahl des Bündels der $X'Z'$-Ebene parallel, so ist die in der $Y'Z'$-Ebene liegende Directrix des Cylinders eine gleichseitige Hyperbel.

Läuft endlich jeder Strahl der $X'Y'$-Ebene parallel, so besteht die Diametralfläche aus zwei Ebenen, die ebenfalls der $X'Y'$-Ebene parallel sind.

Die Diametralebene der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$, welche einem Strahlenbündel conjugirt ist, enthält, wie sich aus der Relation 11b) ergiebt, stets die X'-Axe in sich. Die Lage derselben ist von dem Winkel α' ganz unabhängig. Allen Strahlenbündeln, für welche das Verhältniss $\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}$ einen constanten Werth hat, ist dieselbe Diametralebene conjugirt.

Ist das Strahlenbündel der $X'Z'$-Ebene oder der $X'Y'$-Ebene parallel, so fällt die Diametralebene jedesmal mit der betreffenden Coordinatenebene zusammen.

7. Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 1). Der geometrische Ort aller derjenigen Pole, deren quadratische Polarflächen bezüglich einer Fläche n^{ter} Ordnung Kegel zweiter Ordnung sind, wird die Hesse'sche Fläche der Fläche n^{ter} Ordnung genannt.

Ist $U=0$ die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung, so erhält man die Gleichung der zugehörigen Hesse'schen Fläche, wenn man die Determinante aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function U bildet und diese gleich Null setzt.*

Die Gleichung der Hesse'schen Fläche einer windschiefen Fläche 1) ist demnach

12a) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ 0 & 0 & -2x_3 & 0 \\ 0 & -2x_3 & -2x_2 & 0 \\ 2x_4 & 0 & 0 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

12b) $$16x_3^2x_4^2=0.$$

Daraus folgt:

Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 1) besteht aus vier Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_3=0$, die beiden anderen mit der Ebene $x_4=0$ zusammenfallen.

Da jede windschiefe Fläche 1) der dritten Ordnung angehört, so müssen die Spitzen der Kegel, welche quadratische Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) sind, ebenfalls in den Ebenen $x_3=0$, $x_4=0$ liegen.

Setzt man in Gleichung 3) $\xi_3=0$, so erhält man

13) $$\xi_1x_4^2-\xi_2x_3^2+2\xi_4x_1x_4=0.$$

Liegt demnach der Pol k in der Ebene $x_3=0$, so ist die quadratische Polarfläche desselben bezüglich der Fläche $W_{d.e}$ ein hyperbolischer Cylinder, dessen Erzeugende der Geraden $x_3=0$, $x_4=0$ parallel sind, d. h. ein Kegel, dessen Spitze auf der Doppellinie der Fläche $W_{d.e}$ in der Unendlichkeit liegt, nämlich in dem Punkte $x_1=0, x_3=0, x_4=0$.

so ist die quadratische Polarfläche desselben bezüglich der Fläche $W_{d.\infty}$ ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugende der Geraden $x_1=0$, $x_3=0$ parallel sind, d. h. ein Kegel, dessen Spitze in der Unendlichkeit liegt, wo die Doppellinie der Fläche $W_{d.\infty}$ von der Geraden $x_1=0$, $x_3=0$ geschnitten wird.

Für $\xi_4=0$ ergiebt sich

14) $$\xi_1x_4^2-\xi_2x_3^2-2\xi_3x_2x_3=0.$$

Daraus folgt:

---

* *Salmon*, Analyt. Geometrie des Raumes S. 25.

Befindet sich der Pol k in der Ebene $x_4=0$,

so ist die quadratische Polarfläche bezüglich der windschiefen Fläche $W_{d.c}$ ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze im Punkte $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ liegt.

so ist die quadratische Polarfläche bezüglich der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$ ein hyperbolischer Cylinder, dessen Erzeugende der Geraden $x_2=0$, $x_3=0$ parallel sind, d. h. ein Kegel, dessen Spitze in der Unendlichkeit liegt, wo die Gerade $x_2=0$, $x_3=0$ von der Doppellinie der Fläche $W_{d.\infty}$ geschnitten wird.

Für $\xi_3=\xi_4=0$ erhält man

15) $$\xi_1 x_4^2-\xi_2 x_3^2=0.$$

Liegt demnach der Pol k in der Doppellinie einer windschiefen Fläche 1), so besteht die quadratische Polarfläche desselben aus zwei Ebenen, die sich in der Doppellinie schneiden.

Ist also die quadratische Polarfläche eines Punktes k bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ein Kegel, so liegt die Spitze desselben stets in einem der beiden Rückkehrpunkte der Doppellinie.

Daraus folgt: Jedem Rückkehrpunkte auf der Doppellinie einer windschiefen Fläche 1) entsprechen alle Punkte einer Ebene, welche zu der Hesse'schen Fläche gehört, oder ein Rückkehrpunkt auf der Doppellinie einer windschiefen Fläche 1) und jeder Punkt einer Ebene der Hesse'schen Fläche sind reciproke Pole, und zwar entsprechen dem Rückkehrpunkte $x_1=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ alle Punkte der Ebene $x_3=0$, dagegen dem Rückkehrpunkte $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ alle Punkte der Ebene $x_4=0$.

Fällt der Pol k mit einem Rückkehrpunkte der Linie D zusammen, so besteht die Fläche $P_k q$ aus zwei Ebenen, welche beide mit derjenigen Ebene zusammenfallen, deren Punkte reciproke Pole des Punktes k sind.

Aus der Gleichung 4) findet man:

Die Polarebene eines Punktes k der Hesse'schen Fläche in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) geht stets durch den Rückkehrpunkt der Doppellinie, welcher dem Punkte k entspricht.

8. **Parabolische Punkte.** Im Punkte f sei an eine Fläche U eine Tangentialebene gelegt und in dem unendlich kleinen Abstande δ eine Ebene parallel zur Tangentialebene construirt, welche die Fläche U schneiden möge. Die Schnittlinie, welche nach Dupin* den Namen der in-

* Navier, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Thl. II, S. 264.

dicatorischen Linie führt, kann als ein Kegelschnitt und die sehr kleine Schnittfigur, welche von der Tangentialebene gebildet wird, als demselben gleichartig betrachtet werden. Je nachdem demnach die indicatorische Linie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wird der Punkt f als ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt der Fläche U bezeichnet.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Tangentialebene an einem parabolischen Punkte einer Fläche als eine stationäre Tangentialebene zu betrachten ist, da sie die Fläche in zwei aufeinander folgenden Punkten berührt.*

Da die quadratische Polarfläche eines parabolischen oder Wendepunktes der Fläche U bezüglich derselben ein Kegel ist,** so ist der geometrische Ort aller parabolischen Punkte die Curve, in der die Fläche U von ihrer Hesse'schen Fläche geschnitten wird. Diese Schnittcurve führt den Namen: „die parabolische Curve" der Fläche U.

Die parabolische Curve einer windschiefen Fläche 1) entspricht demnach den Gleichungen

16) $$x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0, \quad x_3^2 x_4^2 = 0;$$

die Schnittcurve dieser Flächen besteht aus der doppelten Leitlinie und den beiden doppelten Erzeugenden der windschiefen Fläche.

Legt man durch einen beliebigen Punkt k eine Tangentenebene an eine windschiefe Fläche 1), so liegt der Berührungspunkt derselben zugleich auf der quadratischen Polarfläche $P_k q$, d. h. auf der Schnittcurve der beiden Flächen 1) und 3). Ist ein Punkt dieser Schnittcurve ein parabolischer Punkt der Fläche 1), so wird die Tangentenebene an diesem Punkte eine stationäre sein.

Daraus ergiebt sich:

Die Schnittpunkte der windschiefen Fläche, der Hesse'schen Fläche und der quadratischen Polarfläche $P_k q$ sind die Berührungspunkte der stationären Tangentenebenen, die sich von k aus an die windschiefe Fläche legen lassen.

Die Coordinaten der Berührungspunkte sind demnach bestimmt durch die Gleichungen

$$x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0, \quad \xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0, \quad x_3^2 x_4^2 = 0.$$

9. **Der Tangentenkegel.** Von einem Punkte k seien alle möglichen Tangenten an eine windschiefe Fläche 1) gezogen. Der geometrische Ort aller dieser Tangenten ist ein der Fläche umschriebener Kegel, dessen Tangentenebenen zugleich Tangentenebenen der windschiefen Fläche sind. Bekanntlich liegen die Berührungspunkte der Tangenten

* Salmon, Analyt. Geom. d. Raumes S. 11.
** a. a. O. S. 23.

auf der Curve, in der die Fläche von der quadratischen Polarfläche $P_k q$ geschnitten wird.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k. Wird von diesem Punkte aus eine Transversale durch eine windschiefe Fläche 1) gezogen, so lässt sich die in Bezug auf das Verhältniss $\lambda:\mu$ kubische Gleichung aufstellen

$$17)\quad \begin{aligned} &\lambda^3(x_1x_4^2 - x_2x_3^2) + \lambda^2\mu(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4) \\ &+ \lambda\mu^2(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4) + \mu^3(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) = 0, \end{aligned}$$

durch deren Wurzeln das Verhältniss der Abschnitte bestimmt ist, die durch die windschiefe Fläche auf der Transversalen gebildet werden. Verschwindet die Discriminante dieser Gleichung, so fallen zwei Schnittpunkte der Transversale zusammen, d. h. die Transversale ist eine Tangente der windschiefen Fläche.* Man erhält demnach als Gleichung des Tangentenkegels folgende Relation:

$$18)\quad \begin{aligned} &27(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)^2(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2)^2 \\ &+4(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4)^3(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) \\ &-18(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4) \\ &\times(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) \\ &-(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4)^2 \\ &\times(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)^2 \\ &+4(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Der vom Punkte k aus einer windschiefen Fläche 1) umschriebene Tangentenkegel ist demnach von der sechsten Ordnung, und zwar besteht derselbe aus einer Doppelebene, welche den Punkt k und die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in sich enthält, und einem Kegel vierter Ordnung.

Da die Gleichung 18) unverändert bleibt, wenn man die Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mit x_1, x_2, x_3, x_4 vertauscht, so folgt:

Beschreibt man von irgend einem Punkte k' des Tangentenkegels 18) einen zweiten Kegel um die windschiefe Fläche 1), so geht derselbe stets durch den Punkt k.

Durch die Spitze k des Tangentenkegels sei eine Gerade G gezogen. Die Classe des Kegels ist bestimmt durch die Zahl der Tangentenebenen, die sich durch G an ihn legen lassen. Diese Zahl ist aber offenbar gleich der Zahl der Generatrixen der windschiefen Fläche, die von der Geraden G geschnitten werden; der Tangentenkegel gehört sonach der dritten Classe an.

Nimmt man an, dass der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst liege, so geht die Gleichung 18) über in

---

* Salmon, *Analyt. Geometrie des Raumes* S. 19.

19a) $$(\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4)^2 (\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4)^2 - 4(x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2)(\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4)^3 = 0$$

oder

19b) $$\begin{cases} (\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4)^2 = 0, \\ (\xi_3 x_4 - \xi_4 x_3)^2 = 0, \\ 4\xi_3^4 x_1 x_2 - 4\xi_1\xi_3^2\xi_4 x_1 x_4 - 4\xi_1\xi_3^3 x_2 x_3 + \xi_1^2(\xi_4 x_3 + \xi_3 x_4)^2 = 0. \end{cases}$$

Liegt also der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so besteht der Tangentenkegel aus der Doppelebene, die den Punkt k und die doppelte Directrix in sich enthält, aus zwei Ebenen, die mit der Tangentenebene am Punkte k zusammenfallen, und einem Kegel zweiter Ordnung.

Verlegt man den Punkt k in die einfache Leitlinie $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einer windschiefen Fläche 1), so nehmen die Gleichungen 19b) die Gestalt an:

20) $(\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2)^2 = 0, \quad (\xi_4 x_3 - \xi_3 x_4)^2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$

Der Tangentenkegel besteht demnach in diesem Falle aus sechs Ebenen, von denen zwei den Punkt k und die doppelte Directrix in sich enthalten, zwei mit der Doppeltangentenebene am Punkte k, eine mit der Ebene $x_1 = 0$ und eine mit der Ebene $x_2 = 0$ zusammenfallen.

Lässt man den Punkt k in die Doppellinie einer windschiefen Fläche 1) fallen, so verschwindet die Gleichung 18) vollständig. Verlegt man endlich den Punkt k in eine singuläre Erzeugende einer windschiefen Fläche 1), so besteht der Tangentenkegel aus vier Ebenen, welche paarweise mit den Coordinatenebenen zusammenfallen, die sich in dieser Erzeugenden schneiden, und einem Kegel zweiter Ordnung.

10. **Die Inflexionstangenten**, welche sich an eine windschiefe Fläche 1) von einem Punkte ausserhalb derselben ziehen lassen. Nach 6γ) schneidet die Polarebene $P_f e$ die quadratische Polarfläche $P_f q$, falls der Punkt f auf der windschiefen Fläche liegt, in den beiden Inflexionstangenten der letzteren. Nimmt man auf einer dieser Schnittlinien einen Punkt k mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 als bekannt an, so muss der Berührungspunkt der Inflexionstangente, die sich von k aus an die windschiefe Fläche legen lässt, nach 5) sowohl auf der Polarebene $P_k e$, als auf der quadratischen Polarfläche $P_k q$ liegen. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind demnach bestimmt durch die Gleichungen 1), 3) und 4).*

a) Führt man in die Gleichungen 1), 3), 4) x, y, z für die Quotienten $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_4}{x_1}$ und ξ, η, ζ für $\frac{\xi_2}{\xi_1}$, $\frac{\xi_3}{\xi_1}$, $\frac{\xi_4}{\xi_1}$ ein, so erhält man durch Elimination von x und z

---

* lyt. Geometrie des Raumes S. 19.

$$21)\quad \begin{cases} y^3 = 0, \\ 4(\xi\zeta^2 - \xi^2\eta^2)y^3 + 12(\xi^2\eta^3 - \xi\eta\zeta^2)y^2 + 3(\zeta^4 + 2\xi\eta^2\zeta^2 - 3\xi^2\eta^4)y \\ \qquad + 4(\xi\eta^3\zeta^2 - \eta\zeta^4) = 0, \end{cases}$$

woraus sich sechs Wurzeln für y ergeben. Da sich für jede dieser Wurzeln nur je ein Werth von x und z entwickeln lässt, so folgt:

Von einem Punkte k können sechs Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d.e}$ gezogen werden, von denen drei, welche durch die Doppellinie der Fläche gehen, zusammenfallen.

b) An Stelle der Quotienten $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ mögen x', y', z', statt $\frac{\xi_1}{\xi_4}$, $\frac{\xi_2}{\xi_4}$, $\frac{\xi_3}{\xi_4}$ dagegen ξ', η', ζ' in die Gleichungen 1), 3) und 4) eingesetzt werden. Durch Elimination von x' und y' ergiebt sich dann aus diesen Relationen

$$22)\qquad z' - \zeta' = 0, \quad \eta' z'^3 - 3\eta'\zeta' z'^2 + 3\xi' z' - \xi'\zeta' = 0.$$

Man erhält demnach vier Wurzeln für z' und dem entsprechend vier Werthe für x' und y'.

Von einem Punkte k lassen sich demnach nur vier Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d.\infty}$ ziehen.

Liegt der Punkt k in der Ebene $x_2 = 0$, so lässt sich ausser der durch die Doppellinie D gehenden nur noch eine Inflexionstangente an die windschiefe Fläche 1) ziehen.

Befindet sich endlich der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so lassen sich durch ihn nur die beiden Inflexionstangenten ziehen, deren Berührungspunkt der Punkt k selbst ist.

Die Inflexionstangenten, welche von einem Punkte k an eine windschiefe Fläche 1) gezogen werden können, sind zugleich Cuspidalkanten des von k derselben umschriebenen Kegels.

Ein der Fläche $W_{d.e}$ umschriebener Kegel besitzt demnach sechs Cuspidalkanten, von denen aber drei zusammenfallen; ein der Fläche $W_{d.\infty}$ umschriebener Kegel hat dagegen nur vier Cuspidalkanten.

11. **Die gemischte Polarfläche zweier Punkte k und k'.** Gegeben seien ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k, und ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4, die Coordinaten des Punktes k'. Construirt man die Polarebene des Punktes k bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_{k'}q$ und die Polarebene des Punktes k' bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_k q$, so ergiebt sich, dass beide Polarebenen dieselbe Gleichung, nämlich

$$23)\qquad \xi_4\xi'_4 x_1 - \xi_3\xi'_3 x_2 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)x_3 + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_4 = 0$$

besitzen, sie fallen also zusammen in eine Ebene.* Diese Ebene wird die gemischte Polarebene der Punkte k und k' $(\underset{kk'}{Pe})$ genannt.*

Beschreibt man demnach von dem Punkte k einen Tangentenkegel um die quadratische Polarfläche $\underset{k'}{Pq}$ und von dem Punkte k' einen Tangentenkegel um die quadratische Polarfläche $\underset{k}{Pq}$, so liegen die beiden Berührungscurven in derselben Ebene, nämlich in der gemischten Polarebene $\underset{kk'}{Pe}$.

Aus der Gleichung 23) folgt:

Liegt einer der beiden Punkte k oder k' in der Doppellinie einer windschiefen Fläche 1), so enthält auch die Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ diese Doppellinie in sich.

Befinden sich beide Punkte auf der einfachen Leitlinie der windschiefen Fläche, so enthält auch die Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ dieselbe in sich.

Liegen beide Punkte k und k' in der Ebene $x_3 = 0$, so geht die Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ durch die Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$; liegen dagegen beide Punkte in der Ebene $x_4 = 0$, so geht die Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ durch die Gerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

12. Gegeben seien ξ''_1, ξ''_2, ξ''_3, ξ''_4, die Coordinaten eines dritten Punktes k'', dann ist die Gleichung der gemischten Polarebene $\underset{kk''}{Pe}$

$$24\text{a)}\quad \xi_4\xi''_4 x_1 - \xi_3\xi''_3 x_2 - (\xi_2\xi''_3 + \xi_3\xi''_2)x_3 + (\xi_1\xi''_4 + \xi_4\xi''_1)x_4 = 0$$

und die der gemischten Polarebene $\underset{k'k''}{Pe}$

$$24\text{b)}\quad \xi'_4\xi''_4 x_1 - \xi'_3\xi''_3 x_2 - (\xi'_2\xi''_3 + \xi'_3\xi''_2)x_3 + (\xi'_1\xi''_4 + \xi'_4\xi''_1)x_4 = 0.$$

Mit Hilfe einfacher Substitutionen gelangt man zu folgendem Resultat:

Geht die gemischte Polarebene $\underset{kk''}{Pe}$ durch den Punkt k', so liegt auch der Punkt k auf der gemischten Polarebene $\underset{k'k''}{Pe}$.

Ein Punkt m auf der gemischten Polarebene $\underset{kk'}{Pe}$ bezüglich einer windschiefen Fläche 1) möge die Coordinaten ξ, η, ζ, v besitzen. Construirt man die quadratische Polarfläche desselben bezüglich der windschiefen Fläche, so ist die Gleichung derselben

$$25\text{a)}\qquad \xi x_4^2 - \eta x_3^2 - 2\zeta x_2 x_3 + 2 v x_1 x_4 = 0,$$

in der ξ, η, ζ, v der Relation

---

* Cremona, Theorie der Oberflächen S. 73.

25b) $\xi_4\xi'_4\xi - \xi_3\xi'_3\eta - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)\zeta + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)v = 0$

genügen. Bildet man die Polarebene des Punktes k bezüglich $\underset{m}{Pq}$, so entspricht dieselbe der Gleichung

25c) $\xi_4 v x_1 - \xi_3 \zeta x_2 - (\xi_2\zeta + \xi_3\eta)x_3 + (\xi_1 v + \xi_4\xi)x_4 = 0.$

Dieselbe wird eine identische, sobald man ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 für x_1, x_2, x_3, x_4 einsetzt. Stellt man nun in gleicher Weise die Gleichung der gemischten Polarebene $\underset{mk'}{Pe}$ auf, so findet man:

Liegt ein Punkt m auf der gemischten Polarebene $\underset{kk'}{Pe}$, so geht die Ebene $\underset{mk}{Pe}$ durch den Punkt k' und die Ebene $\underset{mk'}{Pe}$ durch den Punkt k, oder die Punkte k und k' sind in Bezug auf die quadratische Polarfläche $\underset{m}{Pq}$ conjugirt.

Die gemischte Polarebene $\underset{kk'}{Pe}$ ist demnach der geometrische Ort des Punktes, in Bezug auf dessen quadratische Polarfläche die Punkte k und k' conjugirt sind.

Ist der Punkt k und die gemischte Polarebene $\underset{kk'}{Pe}$ gegeben, so lässt sich die Lage des Punktes k' nach dem Vorigen mit Leichtigkeit bestimmen. Man construirt zunächst zu jedem Punkte der Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ die quadratische Polarfläche bezüglich der windschiefen Fläche. Alle diese Hyperboloide bilden ein Netz. Bestimmt man in Bezug auf jedes dieser Hyperboloide die Polarebene des Punktes k, so geht jede derselben durch den verlangten Punkt k'.

13. **Die erste Polare einer Geraden** G. Gegeben sei eine Gerade G, auf der die beiden Punkte k und k' mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 und ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 liegen mögen. Die Gleichungen der quadratischen Polarflächen $\underset{k}{Pq}$ und $\underset{k'}{Pq}$ bezüglich einer windschiefen Fläche 1) sind

26) $$\begin{cases} \xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0, \\ \xi'_1 x_4^2 - \xi'_2 x_3^2 - 2\xi'_3 x_2 x_3 + 2\xi'_4 x_1 x_4 = 0. \end{cases}$$

Beide Polarflächen schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche durch diese beiden Gleichungen bestimmt ist. Da jeder Punkt dieser Raumcurve beiden Polarflächen angehört, so folgt aus 5):

Die Polarebenen aller Punkte, welche auf der Raumcurve 26) liegen, bezüglich einer windschiefen Fläche 1) enthalten die Gerade G in sich. Oder: Gleitet ein Punkt auf der Raumcurve 26) fort, so dreht sich seine Polarebene um die Gerade G.

Umgekehrt lässt sich schliessen, dass dann auch jede quadratische Polarfläche eines Punktes der Geraden G durch diese Raumcurve hindurchgehen muss, dass also alle quadratischen Polarflächen der Punkte auf der Geraden G ein Flächenbüschel bilden. Die Raumcurve 26) führt infolge dessen den Namen: „die erste Polare der Geraden G“.*

Durch Elimination von x_3 aus den Gleichungen 26) erhält man

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)^2x_4^3+4(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)(\xi_4\xi'_2-\xi_2\xi'_4)x_1x_4^2\\
\text{27 a)}\quad &+4(\xi_4\xi'_2-\xi_2\xi'_4)^2x_1^2x_4-4(\xi_3\xi'_2-\xi_2\xi'_3)(\xi_3\xi'_1-\xi_1\xi'_3)x_2^2x_4\\
&-8(\xi_3\xi'_2-\xi_2\xi'_3)(\xi_3\xi'_4-\xi_4\xi'_3)x_1x_2^2=0,
\end{aligned}
$$

$$\text{27 b)}\qquad x_4=0.$$

Die erste Polare einer Geraden G bezüglich einer windschiefen Fläche 1) besteht demnach aus der doppelten Leitlinie der windschiefen Fläche und einer Raumcurve dritter Ordnung, deren Projection auf $x_3=0$ der Gleichung 27 a) entspricht.

Folgende specielle Fälle mögen hier Erwähnung finden:

α) durchschneidet die Gerade G die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche, so besteht die Projection der ersten Polaren auf $x_3=0$ aus zwei Geraden, die mit der doppelten Leitlinie zusammenfallen, und einem Kegelschnitte;

β) verlegt man die Gerade G in die Ebene $x_1=0$, so degenerirt die Projection der ersten Polaren 27 a) in die Gerade $x_1=0$, $x_3=0$ und in eine Parabel;

γ) setzt man $\xi_2=\xi'_2=0$, so verschwindet die Gleichung 27 a);

δ) liegt die Gerade G in der Ebene $x_3=0$, so besteht die Projection der ersten Polaren derselben auf $x_3=0$ aus vier Geraden, von denen zwei mit der doppelten Leitlinie der windschiefen Fläche zusammenfallen, die beiden anderen sich ebenfalls decken;

ε) befindet sich endlich die Gerade G in der Ebene $x_4=0$, so wird die Projection der ersten Polaren derselben auf $x_3=0$ ebenfalls von vier Geraden gebildet, von denen zwei getrennt liegen, die beiden anderen mit der doppelten Leitlinie der windschiefen Fläche zusammenfallen.

14. **Die Pole einer Ebene** E. Gegeben seien drei nicht in einer Geraden liegende Punkte k, k', k'' und ihre tetraedrischen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi''_1, \xi''_2, \ldots$, durch welche die Lage einer Ebene E bestimmt ist. Construirt man zu jedem dieser Punkte die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so schneiden sich dieselben in einer Reihe von Punkten, deren Coordinaten durch die Gleichungen

---

* *Cremona*, Theorie der Oberflächen S. 75.

$$28)\quad \begin{cases} \xi_1\, x_4^2 - \xi_2\, x_3^2 - 2\xi_3\, x_2 x_3 + 2\xi_4\, x_1 x_4 = 0, \\ \xi'_1\, x_4^2 - \xi'_2\, x_3^2 - 2\xi'_3\, x_2 x_3 + 2\xi'_4\, x_1 x_4 = 0, \\ \xi''_1 x_4^2 - \xi''_2 x_3^2 - 2\xi''_3 x_2 x_3 + 2\xi''_4 x_1 x_4 = 0 \end{cases}$$

berechnet werden können. Die Polarebene jedes dieser Punkte muss nach 5) mit der Ebene E zusammenfallen. Die gemeinschaftlichen Punkte der drei quadratischen Polarflächen sind demnach die Pole der Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 1).

Aus den Gleichungen 28) ergeben sich die Wurzeln

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{0}{0},\quad = \frac{4c^3}{b\sqrt{a}},\quad = -\frac{4c^3}{b\sqrt{a}}, \qquad \frac{x_1}{x_4} = \frac{0}{0},\quad = -\frac{\alpha}{2},\quad = -\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{x_3}{x_1} = 0,\quad = \frac{\sqrt{a}}{2c},\quad = -\frac{\sqrt{a}}{2c}, \qquad \frac{x_2}{x_4} = \infty,\quad = -\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},$$

$$= +\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},$$

$$\frac{x_4}{x_1} = 0,\quad = -2c,\quad = -2c, \qquad \frac{x_3}{x_4} = 0,\quad = +\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{2\gamma}},$$

$$= -\sqrt{-\frac{\alpha\beta}{2\gamma}}.$$

in denen a, b, c, α, β, γ der Abkürzung wegen gesetzt, von den Coordinaten der Punkte k, k', k'' abhängig sind.

Wird demnach eine beliebige Ebene E als Polarebene einer windschiefen Fläche 1) betrachtet, so kann jeder Punkt der doppelten Leitlinie der windschiefen Fläche als Pol derselben angesehen werden; ausserdem existiren zwei getrennte Punkte, welche ebenfalls Pole der Ebene sind.

Construirt man zu allen Punkten einer Ebene die quadratischen Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so gehen alle durch die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche und durch zwei Punkte.

Legt man durch drei willkürlich gewählte Punkte, von denen keiner sich in der Linie $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ befindet und deren Projectionen auf den Coordinatenebenen nicht symmetrisch zu den Axen liegen, eine quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so werden sich die drei Polarebenen dieser Punkte in einem Punkte schneiden, nämlich in dem Pole der quadratischen Polarfläche.

Durch drei beliebige Punkte kann demnach im Allgemeinen nur eine einzige quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) gelegt werden.

Construirt man alle quadratischen Polarflächen, welche durch zwei feste Punkte, von denen keiner auf der Kante $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ liegt,

7. Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 1). Der geometrische Ort aller derjenigen Pole, deren quadratische Polarflächen bezüglich einer Fläche n^{ter} Ordnung Kegel zweiter Ordnung sind, wird die Hesse'sche Fläche der Fläche n^{ter} Ordnung genannt.

Ist $U=0$ die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung, so erhält man die Gleichung der zugehörigen Hesse'schen Fläche, wenn man die Determinante aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function U bildet und diese gleich Null setzt.*

Die Gleichung der Hesse'schen Fläche einer windschiefen Fläche 1) ist demnach

12a) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ 0 & 0 & -2x_3 & 0 \\ 0 & -2x_3 & -2x_2 & 0 \\ 2x_4 & 0 & 0 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

12b) $$16x_3^2x_4^2=0.$$

Daraus folgt:

Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 1) besteht aus vier Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_3=0$, die beiden anderen mit der Ebene $x_4=0$ zusammenfallen.

Da jede windschiefe Fläche 1) der dritten Ordnung angehört, so müssen die Spitzen der Kegel, welche quadratische Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) sind, ebenfalls in den Ebenen $x_3=0$, $x_4=0$ liegen.

Setzt man in Gleichung 3) $\xi_3=0$, so erhält man

13) $$\xi_1x_4^2-\xi_2x_3^2+2\xi_4x_1x_4=0.$$

Liegt demnach der Pol k in der Ebene $x_3=0$,

so ist die quadratische Polarfläche desselben bezüglich der Fläche $W_{d.e}$ ein hyperbolischer Cylinder, dessen Erzeugende der Geraden $x_3=0$, $x_4=0$ parallel sind, d. h. ein Kegel, dessen Spitze auf der Doppellinie der Fläche $W_{d.e}$ in der Unendlichkeit liegt, nämlich in dem Punkte $x_1=0$, $x_3=0$, $x_4=0$.

so ist die quadratische Polarfläche desselben bezüglich der Fläche $W_{d.\infty}$ ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugende der Geraden $x_1=0$, $x_3=0$ parallel sind, d. h. ein Kegel, dessen Spitze in der Unendlichkeit liegt, wo die Doppellinie der Fläche $W_{d.\infty}$ von der Geraden $x_1=0$, $x_3=0$ geschnitten wird.

Für $\xi_4=0$ ergiebt sich

14) $$\xi_1x_4^2-\xi_2x_3^2-2\xi_3x_2x_3=0.$$

Daraus folgt:

---

* *Salmon*, Analyt. Geometrie des Raumes S. 25.

Kleinere Mittheilungen.

XV. Synthetischer Beweis des Satzes, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann.

Von allen Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung verdienen wegen der zahlreichen Folgerungen, welche sie gestatten, besonders zwei hervorgehoben zu werden. Die eine rührt von Chasles her; nach ihr ist die Curve dritter Ordnung der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Elemente eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels; nach der andern ist die Curve dritter Ordnung der Ort der gemeinschaftlichen Tripelpunkte der in einem Kegelschnittnetz vorkommenden Büschel. Steiner hat diese Curve die Tripelcurve genannt und ihre wichtigsten Eigenschaften auf rein geometrischem Wege abgeleitet (vergl. Steiner's Vorlesungen, II. Bd., herausgegeben von Schroeter). Bis jetzt ist es aber noch nicht gelungen, rein geometrisch zu zeigen, dass eine ebene Curve dritter Ordnung, die auf eine der beiden Arten erzeugt ist, auch auf die andere Art erzeugt werden kann. Cremona (vergl. Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven) hat sich dadurch zu helfen gesucht, dass er den Satz: „Zwei ebene Curven dritter Ordnung schneiden sich in neun Punkten" als Grundsatz an die Spitze der Theorie stellte. Steiner hat für einen besondern Fall gezeigt, dass man die Tripelcurve durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugen kann, wenn nämlich drei von den Grundpunkten ein Tripel bilden. Reye hat (vergl. Reye, Die Geometrie der Lage) einen Beweis mitgetheilt, dass die Tripelcurven durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden. Doch gilt derselbe auch nur für den Fall, dass drei der Basispunkte ein Tripel bilden. Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, den angeführten Satz von der Tripelcurve ganz allgemein zu beweisen; dann lässt sich weiter folgern, dass jede Curve dritter Ordnung als Tripelcurve betrachtet und auf die von Chasles angegebene Art erzeugt werden kann. Als unmittelbare Folgerung ergiebt sich dann, dass durch beliebige neun Punkte der Ebene im Allgemeinen nur eine Curve dritter Ordnung gelegt werden kann und dass zwei Curven dritter Ordnung sich in höchstens

neun Punkten schneiden und die synthetische Geometrie hat nicht mehr nöthig, diese Sätze der analytischen Geometrie zu entlehnen. — Um jenen Beweis zu führen, werden aber einige Sätze von den harmonischen Mittelpunkten gebraucht, die zunächst auf geometrischem Wege abgeleitet werden sollen. Dazu reichen einige Eigenschaften vom ebenen Dreieck aus.

Zuerst sei der bekannte Satz angeführt: „Wenn man durch einen Punkt O in der Ebene eines Dreiecks ABC mit den Seiten abc drei Transversalen OA, OB, OC zieht, zu ihren Durchschnitten $\alpha\beta\gamma$ mit abc die harmonischen Gegenpunkte $\alpha'\beta'\gamma'$ in Bezug auf die Ecken sucht, so liegen dieselben in einer Geraden g und umgekehrt. Man nennt g die gerade Polare von O und O den Pol von g bezüglich der dreiseitigen Curve (abc).

Durch einen Punkt P seien die Geraden $gg_1g_2\ldots$ gelegt; ihre Schnittpunkte mit den Seiten abc seien $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2$, ..., deren harmonische Gegenpunkte bezüglich der Ecken mit $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, ... bezeichnet werden mögen. Da die Punktreihen $\alpha'\alpha'_1\alpha'_2\ldots$, $\beta'\beta'_1\beta'_2\ldots$, $\gamma'\gamma'_1\gamma'_2\ldots$ in perspectivischer Lage sich befinden, so müssen die Punktreihen $\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots$, $\beta\beta_1\beta_2\ldots$, $\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots$ und daher auch die Strahlenbüschel $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$, $B(\beta\beta_1\beta_2\ldots)$, $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots)$ in projectivischer Beziehung stehen. Je drei entsprechende Strahlen, wie $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$, ..., schneiden sich stets in einem Punkte O, O_1, .. , dem Pol der Geraden g, g_1, ..., deshalb erzeugen die drei Büschel einen Kegelschnitt π, der durch ABC geht und die conische Polare von P bezüglich der dreiseitigen Curve (abc) heisst.

Dem Strahl AC des Büschels $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ entspricht im Büschel $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots)$ der Strahl $C\Gamma'$, der CP von CA und CB harmonisch trennt. Daher berührt π in C den Strahl $C\Gamma'$ und ebenso in A und B die Strahlen AA' und BB', welche AP und BP von AB und AC, resp. BA und BC harmonisch trennen.

Die conische Polare π von P enthält also die Pole $OO_1O_2\ldots$ sämmtlicher durch P gelegten Geraden $gg_1g_2\ldots$ und daraus folgern wir: „Liegt ein Punkt O auf der conischen Polare π eines Punktes P bezüglich der dreiseitigen Curve (abc), so liegt P auf der geraden Polare g von O und umgekehrt.

Weiter lässt sich leicht nachweisen, dass die gerade Polare p eines Punktes P bezüglich der dreiseitigen Curve (abc) zusammenfällt mit der Polare von P bezüglich seiner conischen Polare π. Die Transversalen AP, BP, CP mögen die Seiten abc in $AB\Gamma$ schneiden; dann berührt π n ABC die Geraden AA', BB', $C\Gamma'$, welche AA, BB, $C\Gamma$ von AB und ;, BA und BC, CA und CB harmonisch trennen. Die Polaren von BB, $C\Gamma$; diese schneiden sich in Pol P von $A'B'\Gamma'$

auf der Curve, in der die Fläche von der quadratischen Polarfläche $P_k q$ geschnitten wird.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k. Wird von diesem Punkte aus eine Transversale durch eine windschiefe Fläche 1) gezogen, so lässt sich die in Bezug auf das Verhältniss $\lambda:\mu$ kubische Gleichung aufstellen

$$17)\quad \begin{aligned} &\lambda^3(x_1x_4^2 - x_2x_3^2) + \lambda^2\mu(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4) \\ &+ \lambda\mu^2(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4) + \mu^3(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) = 0, \end{aligned}$$

durch deren Wurzeln das Verhältniss der Abschnitte bestimmt ist, die durch die windschiefe Fläche auf der Transversalen gebildet werden. Verschwindet die Discriminante dieser Gleichung, so fallen zwei Schnittpunkte der Transversale zusammen, d. h. die Transversale ist eine Tangente der windschiefen Fläche.* Man erhält demnach als Gleichung des Tangentenkegels folgende Relation:

$$18)\quad \begin{aligned} &27(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)^2(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2)^2 \\ &+ 4(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4)^3(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) \\ &- 18(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)(\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4) \\ &\times(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)(\xi_1\xi_4^2 - \xi_2\xi_3^2) \\ &- (\xi_1x_4^2 - \xi_2x_3^2 - 2\xi_3x_2x_3 + 2\xi_4x_1x_4)^2 \\ &\times(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)^2 \\ &+ 4(x_1x_4^2 - x_2x_3^2)(\xi_4^2x_1 - \xi_3^2x_2 - 2\xi_2\xi_3x_3 + 2\xi_1\xi_4x_4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Der vom Punkte k aus einer windschiefen Fläche 1) umschriebene Tangentenkegel ist demnach von der sechsten Ordnung, und zwar besteht derselbe aus einer Doppelebene, welche den Punkt k und die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in sich enthält, und einem Kegel vierter Ordnung.

Da die Gleichung 18) unverändert bleibt, wenn man die Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mit x_1, x_2, x_3, x_4 vertauscht, so folgt:

Beschreibt man von irgend einem Punkte k' des Tangentenkegels 18) einen zweiten Kegel um die windschiefe Fläche 1), so geht derselbe stets durch den Punkt k.

Durch die Spitze k des Tangentenkegels sei eine Gerade G gezogen. Die Classe des Kegels ist bestimmt durch die Zahl der Tangentenebenen, die sich durch G an ihn legen lassen. Diese Zahl ist aber offenbar gleich der Zahl der Generatrixen der windschiefen Fläche, die von der Geraden G geschnitten werden; der Tangentenkegel gehört sonach der dritten Classe an.

Nimmt man an, dass der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst liege, so geht die Gleichung 18) über in

* Salmon, *Analyt. Geometrie des Raumes* S. 19.

Mittelpunkte folgt daraus: Der harmonische Mittelpunkt ersten Grades R' von RST für R als Pol ist R selbst; von den harmonischen Mittelpunkten zweiten Grades der Punkte RST für R als Pol fällt der eine R_1 mit R zusammen; der andere R_2 trennt R von S und T harmonisch.

Diese Sätze genügen, um den Beweis des obenerwähnten Satzes zu führen.

Auf die von Cremona angegebene Art lassen sich jetzt einige Sätze von der Polaren irgend einer ebenen Curve dritter Ordnung ableiten. — Es sei K^3 irgend eine ebene Curve dritter Ordnung, P ein beliebiger Punkt, u eine variable Gerade durch ihn, welche K^3 in XYZ schneidet; dann sind die harmonischen Mittelpunkte P' des ersten Grades und $P_1 P_2$ des zweiten Grades der Punkte XYZ für P als Pol auch variabel. Der Ort aller Punkte P' ist eine Gerade p, der Ort aller Punkte $P_1 P_2$ ist ein Kegelschnitt π; dann heisst p die gerade Polare und π die conische Polare von P bezüglich K^3. — Liegt P auf K^3, so muss seine conische Polare π je zwei mit P in gerader Linie liegende Curvenpunkte harmonisch trennen und daher K^3 in P berühren. Deshalb muss auch die gerade Polare p von P, falls P auf K^3 liegt, diese Curve in P berühren.

Auf einer Geraden g seien $ABCD\ldots$ beliebige Punkte, $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ ihre conischen Polaren in Bezug auf K^3, $LMNO$ die Schnittpunkte von α und β, dann muss die gerade Polare eines jeden dieser vier Schnittpunkte durch A und B gehen, also g sein; weiter muss γ durch $LMNO$ gehen, denn zieht man CM, so ist C der harmonische Mittelpunkt des ersten Grades für die Schnittpunkte von CM mit K^3 in Bezug auf M als Pol, also muss M ein harmonischer Mittelpunkt des zweiten Grades derselben Schnittpunkte für C als Pol sein. Die conischen Polaren $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ aller Punkte $ABCD\ldots$ einer Geraden g schneiden sich in denselben vier Punkten $LMNO$, welche die Pole von g bezüglich K^3 sind.

Sind EFK irgend drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, so lässt sich zeigen, dass das Netz von Kegelschnitten, welches durch die drei conischen Polaren $\eta\varphi\varkappa$ jener Punkte bezüglich K^3 bestimmt wird, alle conischen Polaren der Curve K^3 enthält. Sind QQ_1 zwei beliebige Punkte, so giebt es im Netze $(\eta\varphi\varkappa)$ einen einzigen Kegelschnitt, der durch diese Punkte geht. (Vergl. Schroeter, Steiner's Vorlesungen.) Um ihn zu finden, wähle man aus den beiden Kegelschnittbüscheln $(\eta\varphi)$ und $(\varphi\varkappa)$ diejenigen Kegelschnitte μ und ν, welche durch Q gehen, und wähle ferner im Büschel $(\mu\nu)$ denjenigen Kegelschnitt ϱ, welcher durch Q_1 geht, so ist dieser der verlangte. — Die gerade Polare von Q bezüglich K^3 sei q, dann liegen die Pole aller conischen Polaren
n K^3 [illegible] durch Q gehen, auf q; deshalb müssen diese conischen
[illegible]hel bilden. In diesem giebt es einen Kegelschnitt, der

$$21) \begin{cases} y^3 = 0, \\ 4(\xi\zeta^2 - \xi^2\eta^2)y^3 + 12(\xi^2\eta^3 - \xi\eta\zeta^2)y^2 + 3(\zeta^4 + 2\xi\eta^2\zeta^2 - 3\xi^2\eta^4)y \\ \quad + 4(\xi\eta^3\zeta^2 - \eta\zeta^4) = 0, \end{cases}$$

woraus sich sechs Wurzeln für y ergeben. Da sich für jede dieser Wurzeln nur je ein Werth von x und z entwickeln lässt, so folgt:

Von einem Punkte k können sechs Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d.e}$ gezogen werden, von denen drei, welche durch die Doppellinie der Fläche gehen, zusammenfallen.

b) An Stelle der Quotienten $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ mögen x', y', z', statt $\frac{\xi_1}{\xi_4}, \frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ dagegen ξ', η', ζ' in die Gleichungen 1), 3) und 4) eingesetzt werden. Durch Elimination von x' und y' ergiebt sich dann aus diesen Relationen

$$22) \qquad z' - \zeta' = 0, \quad \eta' z'^3 - 3\eta'\zeta' z'^2 + 3\xi' z' - \xi'\zeta' = 0.$$

Man erhält demnach vier Wurzeln für z' und dem entsprechend vier Werthe für x' und y'.

Von einem Punkte k lassen sich demnach nur vier Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d,\infty}$ ziehen.

Liegt der Punkt k in der Ebene $x_2 = 0$, so lässt sich ausser der durch die Doppellinie D gehenden nur noch eine Inflexionstangente an die windschiefe Fläche 1) ziehen.

Befindet sich endlich der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so lassen sich durch ihn nur die beiden Inflexionstangenten ziehen, deren Berührungspunkt der Punkt k selbst ist.

Die Inflexionstangenten, welche von einem Punkte k an eine windschiefe Fläche 1) gezogen werden können, sind zugleich Cuspidalkanten des von k derselben umschriebenen Kegels.

Ein der Fläche $W_{d.e}$ umschriebener Kegel besitzt demnach sechs Cuspidalkanten, von denen aber drei zusammenfallen; ein der Fläche $W_{d,\infty}$ umschriebener Kegel hat dagegen nur vier Cuspidalkanten.

11. **Die gemischte Polarfläche zweier Punkte k und k'.** Gegeben seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k, und $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, die Coordinaten des Punktes k'. Construirt man die Polarebene des Punktes k bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_{k'}q$ und die Polarebene des Punktes k' bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_k q$, so ergiebt sich, dass beide Polarebenen dieselbe Gleichung, nämlich

$$23) \qquad \xi_4\xi'_4 x_1 - \xi_3\xi'_3 x_2 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)x_3 + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_4 = 0$$

büschel ($ABCD$) und das projectivische Strahlenbüschel M erzeugt wird, so wird auch C^3 durch diese beiden Büschel erzeugt und es folgt:

„Sind $ABCD$ irgend vier Punkte einer Tripelcurve C^3, so schneidet ein variabler Kegelschnitt $\varkappa$ durch dieselben C^3 in zwei variablen Punkten XY, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt M geht. Das Kegelschnittbüschel $(ABCD)(\varkappa, \ldots)$ ist dabei in projectivischer Beziehung mit dem Strahlenbüschel $M(XY, \ldots)$."

Aus diesem Satze folgt:

„Jede Tripelcurve ist durch neun ihrer Punkte im Allgemeinen vollständig und eindeutig bestimmt.

Zwei Tripelcurven schneiden sich höchstens in neun Punkten."

Die Hesse'sche Curve der Tripelcurve C^3 sei $\mathfrak{C}^3$; da sie ebenfalls eine Tripelcurve ist, so schneidet sie die erstere in neun Punkten, die für dieselbe Wendepunkte sind. Wir bezeichnen sie mit $WW_1 \ldots W_7 W_8$. In W und W_1 denken wir uns je drei Punkte STU und $S_1 T_1 U_1$ in gerader Linie vereinigt, dann müssen die drei Schnittpunkte $S_2 T_2 U_2$ von SS_1, TT_1, UU_1 mit C^3 in einer Geraden liegen und da sie in einen Punkt zusammenfallen, so muss dieser ein Wendepunkt sein und daher geht jede Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, noch durch einen dritten.

Mit W mögen noch in einer Geraden liegen die Wendepunkte $W_1 W_2$, $W_3 W_4$, $W_5 W_6$, $W_7 W_8$; jedes dieser vier Paare wird durch die Gerade w_1 von W harmonisch getrennt, daher muss die conische Polare von W bezüglich $\mathfrak{C}^3$ auch ein Geradenpaar sein, dessen einer Theil w_1 ist; der andere Theil $\mathfrak{w}$ berührt $\mathfrak{C}^3$ in W und kann ausser W mit $\mathfrak{C}^3$ keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Deshalb ist W ein Wendepunkt auch von $\mathfrak{C}^3$. Daraus folgt:

„Eine Tripelcurve und ihre Hesse'sche Curve schneiden sich in neun Punkten, die für beide Curven Wendepunkte sind."

Vorher fanden wir, dass alle Schnittpunkte einer Curve K^3 dritter Ordnung und ihrer Hesse'schen Curve $\mathfrak{K}^3$ Wendepunkte der ersten sind; wir wollen zunächst zeigen, dass sie auch Wendepunkte der zweiten sind.

Es seien WW_1 zwei Wendepunkte von K^3, es sei ferner S der Schnittpunkt von WW_1 mit $\mathfrak{K}^3$. Die conischen Polaren aller Punkte von WW_1 bezüglich K^3 bilden ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte $LMNO$ seien. In diesem Büschel sind drei Geradenpaare vorhanden, die conischen Polaren von $WW_1 S$. Wenn ww' und $w_1 w'_1$ die Wendetangenten und harmonischen Polaren von W und W_1 sind, so mögen sich w und w_1 in L, w und w'_1 in M, w' und w_1 in N, w' und w'_1 in O treffen. Da das Kegelschnittbüschel ($LMNO$) zu den Kegelschnittbüscheln des Netzes der conischen Polaren von K^3 gehört, so sind die drei Tripelpunkte desselben drei Punkte von $\mathfrak{K}^3$ und bilden auf $\mathfrak{K}^3$ ein Tripel; ihre Punkte müssen in einer Geraden liegen und sind $WW_1 S$.

$$21)\ \begin{cases} y^3 = 0, \\ 4(\xi\zeta^2 - \xi^2\eta^2)y^3 + 12(\xi^2\eta^3 - \xi\eta\zeta^2)y^2 + 3(\zeta^4 + 2\xi\eta^2\zeta^2 - 3\xi^2\eta^4)y \\ \quad + 4(\xi\eta^3\zeta^2 - \eta\zeta^4) = 0, \end{cases}$$

woraus sich sechs Wurzeln für y ergeben. Da sich für jede dieser Wurzeln nur je ein Werth von x und z entwickeln lässt, so folgt:

Von einem Punkte k können sechs Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d.e}$ gezogen werden, von denen drei, welche durch die Doppellinie der Fläche gehen, zusammenfallen.

b) An Stelle der Quotienten $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ mögen x', y', z', statt $\frac{\xi_1}{\xi_4}, \frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ dagegen ξ', η', ζ' in die Gleichungen 1), 3) und 4) eingesetzt werden. Durch Elimination von x' und y' ergiebt sich dann aus diesen Relationen

$$22)\qquad z' - \zeta' = 0, \quad \eta' z'^3 - 3\eta'\zeta' z'^2 + 3\xi' z' - \xi'\zeta' = 0.$$

Man erhält demnach vier Wurzeln für z' und dem entsprechend vier Werthe für x' und y'.

Von einem Punkte k lassen sich demnach nur vier Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{d.\infty}$ ziehen.

Liegt der Punkt k in der Ebene $x_3 = 0$, so lässt sich ausser der durch die Doppellinie D gehenden nur noch eine Inflexionstangente an die windschiefe Fläche 1) ziehen.

Befindet sich endlich der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so lassen sich durch ihn nur die beiden Inflexionstangenten ziehen, deren Berührungspunkt der Punkt k selbst ist.

Die Inflexionstangenten, welche von einem Punkte k an eine windschiefe Fläche 1) gezogen werden können, sind zugleich Cuspidalkanten des von k derselben umschriebenen Kegels.

Ein der Fläche $W_{d.e}$ umschriebener Kegel besitzt demnach sechs Cuspidalkanten, von denen aber drei zusammenfallen; ein der Fläche $W_{d.\infty}$ umschriebener Kegel hat dagegen nur vier Cuspidalkanten.

11. **Die gemischte Polarfläche zweier Punkte k und k'.** Gegeben seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k, und $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, die Coordinaten des Punktes k'. Construirt man die Polarebene des Punktes k bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_{k'}q$ und die Polarebene des Punktes k' bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_k q$, so ergiebt sich, dass beide Polarebenen dieselbe Gleichung, nämlich

$$23)\qquad \xi_4\xi'_4 x_1 - \xi_3\xi'_3 x_2 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)x_3 + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_4 = 0$$

die Grundpunkte beider Büschel solche Wendepunkte sind, die zweimal zu je dreien in einer Geraden liegen."

Da eine Tripelcurve erst durch neun ihrer Punkte bestimmt ist, so lassen sich durch acht Punkte unzählig viele Tripelcurven legen, und zwar schneiden sich alle noch in demselben neunten Punkte. Es seien die Tripelcurven $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \ldots$ durch die acht Punkte $ABCDEFGH$ gelegt, dann liegen alle Punkte X von der Beschaffenheit, dass das Strahlenbüschel $X(EFGH)$ in projectivischer Beziehung mit dem Kegelschnittbüschel $(ABCD)\{EFGH\}$ steht, auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, oder mit anderen Worten: die gegenüberliegenden Punkte $M M_1 M_2 \ldots$ der Punkte $ABCD$ in den verschiedenen Curven $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \ldots$ liegen auf $\mathfrak{K}$; die Curve $\mathfrak{C}^3$ schneidet $\mathfrak{K}$ in $EFGHM$ und noch in einem sechsten Punkte J, dann muss dem Strahl MJ der Kegelschnitt entsprechen, der durch die fünf Punkte $ABCDJ$ bestimmt ist; diesem müssen auch die Strahlen $M_1 J$, $M_2 J$, ... entsprechen, da die Büschel $M(EFGHJ\ldots)$, $M_1(EFGHJ\ldots)$, $M_2(EFGHJ\ldots)$, ... und $(ABCD)\{EFGHJ\ldots\}$ in projectivischer Beziehung stehen. Also schneiden sich alle Tripelcurven $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \ldots$ noch in J.

K^3 sei wieder eine beliebige Curve dritter Ordnung, $\mathfrak{C}^3$ ihre Hesse'sche Curve, $\mathfrak{C}_1^3$ wieder deren Hesse'sche Curven, so schneiden sich diese drei Curven in ihren neun gemeinschaftlichen Wendepunkten $W W_1 \ldots W_7 W_8$. Durch die acht Punkte $W W_1 \ldots W_6 W_7$ denken wir uns alle Tripelcurven $\mathfrak{C}_2^3 \mathfrak{C}_3^3 \ldots \mathfrak{C}_\infty^3$ gelegt, so müssen diese alle noch durch W_8 gehen und haben sämmtlich dieselben neun Wendepunkte. — Mit W mögen in gerader Linie liegen $W_1 W_2$, $W_3 W_4$, $W_5 W_6$, $W_7 W_8$. Wir wählen $W_1 W_2 W_3 W_4$ zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels und erzeugen durch dieses und durch ihre projectivischen Strahlenbüschel in W alle Curven $K^3 \mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \ldots \mathfrak{C}_\infty^3$. In allen diesen projectivischen Büscheln entsprechen den Geradenpaaren $(W_1 W_3, W_2 W_4)$ und $(W_1 W_4, W_2 W_3)$, deren Gerade durch (W_5, W_6) und (W_7, W_8) gehen, die Geraden $W W_5 W_6$ und $W W_7 W_8$. Dem Geradenpaar $(W_1 W_2, W_3 W_4)$ entsprechen die Wendetangenten $w \mathfrak{w} \mathfrak{w}_1 \ldots \mathfrak{w}_\infty$ in W. Wählen wir die Geraden $\mathfrak{w} \mathfrak{w}_1 \ldots \mathfrak{w}_\infty$, so erhalten wir alle Curven durch die neun Wendepunkte; da w unter den Geraden $\mathfrak{w} \ldots \mathfrak{w}_\infty$ enthalten sein muss, so gehört K^3 zur Reihe der Tripelcurven $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \ldots \mathfrak{C}_\infty^3$. Demnach gelten alle für eine Tripelcurve bewiesenen Sätze für jede beliebige Curve K^3 dritter Ordnung. Aus Allem folgt:

„Jede Curve K^3 dritter Ordnung kann als Tripelcurve angesehen werden und man kann sie daher auch durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugen. Sie ist durch neun Punkte im Allgemeinen vollständig und eindeutig bestimmt und wird von einer andern Curve K_1^3 dritter Ordnung in neun Punkten geschnitten."

Weissenburg i. E. **Milinowski.**

XVI. Ueber Tangenten und Normalen an Curvensystemen.

In rechtwinkligen Coordinaten sei die Gleichung einer Plancurve

1) $$F(x, y) = 0$$

oder kurz $F = 0$, und es werde ein Curvenpunkt xy mit einem festen Punkte gh durch eine Gerade verbunden; für den Fall, dass letztere die Curve im Punkte xy berühren soll, gilt dann bekanntlich die Bedingung

2) $$(x-g)\frac{\partial F}{\partial x} + (y-h)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

wogegen für den Fall, dass die Gerade im Punkte xy rechtwinklig zur Curve liegen soll, die Bedingung

3) $$(x-g)\frac{\partial F}{\partial y} - (y-h)\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

stattfinden muss.

Wenn nun die Gleichung der Curve ausser x und y einen Parameter p enthält, so entsteht durch continuirliche Aenderung des letzteren eine Schaar von Curven derselben Art, und es kann nach der Curve gefragt werden, auf welcher entweder die Berührungspunkte aller von gh an sämmtliche Curven gezogenen Tangenten, oder die Fusspunkte der von gh auf jene Curven gefällten Normalen liegen. Die Antwort ist sehr leicht; man findet die Gleichung des ersten geometrischen Ortes durch Elimination von p aus 1) und 2), die Gleichung des zweiten Ortes durch Elimination von p aus 1) und 3).

Am einfachsten gestaltet sich diese Elimination, wenn die Gleichung 1) nach p aufgelöst, also in die Form

$$f(x, y) = p$$

gebracht werden kann, wo $f(x, y)$ kein p enthält. Die Gleichungen 2) und 3) sind dann

$$(x-g)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-h)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (x-g)\frac{\partial f}{\partial y} - (y-h)\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

und da sie p nicht enthalten, so sind sie ohne Weiteres die Gleichungen der gesuchten Oerter.

Enthält die Gleichung der Curve zwei Parameter p und q, welche sich gleichzeitig ändern, so ist es zur Entstehung eines gesetzmässigen Curvensystems erforderlich, dass p und q einer bestimmten Bedingung

4) $$\varphi(p, q) = 0$$

genügen; die Gleichung des geometrischen Ortes der Tangentenberührungspunkte findet man jetzt durch Elimination von p und q aus 1), 2) und 4), den Ort der Normalenfusspunkte durch Elimination von p und q aus 1), 3) und 4).

Bei der Einfachheit der Sache wird die blosse Angabe einiger speciellen Resultate genügen.

Parabeln. Aendert sich p in der Gleichung

$$x^2 - py = 0 \text{ oder } \frac{x^2}{y} = p,$$

so entsteht eine Schaar von Parabeln, welche den Scheitel und die Axe gemein, dagegen verschiedene Parameter haben. Für die Berührungspunkte der Tangenten ergiebt sich

$$xy + hx - 2gy = 0;$$

der betreffende geometrische Ort ist hiernach eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den Parabelscheitel und den festen Punkt g, h geht, deren Mittelpunkt die Coordinaten $2g$ und $-h$ besitzt und deren Asymptoten parallel zu den ursprünglichen Coordinatenaxen liegen.

Der geometrische Ort der Normalenfusspunkte hat zur Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - gx - 2hy = 0,$$

ist also eine Ellipse, welche durch den Parabelscheitel und den Punkt g, h geht, deren Mittelpunkt die Coordinaten $\frac{1}{2}g$, $\frac{1}{2}h$ besitzt und deren Halbaxen

$$\frac{\sqrt{g^2 + 2h^2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{g^2 + 2h^2}}{2\sqrt{2}}$$

parallel zu den Coordinatenaxen liegen. Hieraus folgt beiläufig eine Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte gh Normalen auf eine gegebene Parabel zu fällen; die Durchschnitte der Parabel mit der vorerwähnten Ellipse sind nämlich die Fusspunkte der gesuchten Normalen.

Bei allgemeineren parabolischen Curven, welche durch die Gleichung

$$x^\mu - py^\nu = 0$$

charakterisirt werden, bleibt die Sache ziemlich dieselbe; für die Berührungspunkte ergiebt sich

$$(\mu - \nu)xy + \nu hx - \mu gy = 0$$

und für die Fusspunkte

$$\nu x(x - g) + \mu y(y - h) = 0.$$

Aehnliche Kegelschnitte. Betrachtet man in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$$

λ^2 als veränderlichen Parameter, so erhält man ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen; der geometrische Ort der Berührungspunkte hat dann zur Gleichung

$$\frac{x(x - g)}{a^2} + \frac{y(y - h)}{b^2} = 0$$

und ist hiernach eine durch die Punkte $0, 0$ und g, h gehende ähnliche Ellipse.

Für den geometrischen Ort der Normalenfusspunkte ergiebt sich, wenn $a^2 - b^2$ mit e^2 bezeichnet wird,

$$e^2xy + b^2hx - a^2gy = 0;$$

dieser Gleichung entspricht eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Punkte $0, 0$ und g, h geht, deren Mittelpunktscoordinaten

$$+g\left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ und } -h\left(\frac{b}{c}\right)^2$$

sind, deren Asymptoten parallel den Coordinatenaxen liegen und deren Halbaxe $=\frac{ab}{c^2}\sqrt{2gh}$ ist.

Hieraus folgt eine Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte gh Normalen zu einer, aus den Halbaxen a und b construirten Ellipse zu ziehen; die Durchschnitte dieser Ellipse mit der vorigen Hyperbel sind nämlich die Fusspunkte der gesuchten Normalen.

Lässt man $-b^2$ an die Stelle von b^2 treten, so erhält man analoge Sätze für die Hyperbel.

Confocale Kegelschnitte. Wenn in der Gleichung

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1, \quad p>0,$$

p und q an die Bedingung

$$p-q=e^2$$

geknüpft werden, so entsteht ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln; da sich diese Curven rechtwinklig schneiden, so sind die Tangenten an der einen Curvenschaar gleichzeitig die Normalen an der andern, und daher bilden hier die Berührungspunkte der Tangenten und die Fusspunkte der Normalen eine und dieselbe Curve dritten Grades, welche durch die Gleichung

$$(gy-hx)[x(x-g)+y(y-h)]=e^2(x-g)(y-h)$$

bestimmt ist und durch den Punkt gh geht.

Liegt der Punkt gh auf der x-Axe, so zerfällt diese Curve in die x-Axe und in einen Kreis, dessen Centrum derselben Axe angehört und dessen Peripherie durch die Punkte $g, 0$ und $\frac{e^2}{g}, 0$ geht. Für einen auf der y-Axe liegenden Punkt $0, h$ zerfällt die Curve in die y-Axe und in einen Kreis, dessen Mittelpunkt derselben Axe angehört und dessen Peripherie durch die Punkte $0, h$ und $0, -\frac{e^2}{h}$ geht.

SCHLÖMILCH.

XVII. Ueber die Wurzeln der Gleichung $y^x = x^y$.

Durch Herrn Cantor auf die vorstehende Gleichung aufmerksam gemacht, erlaube ich mir, meine durch diese Anregung veranlassten Untersuchungen hier mitzutheilen.

Durch Uebergang zu den Logarithmen gewinnt die Gleichung die Gestalt

$$1)\qquad \frac{\log x}{x}=\frac{\log y}{y}$$

und wir können die Fragestellung jetzt dahin umändern:

[illegible]

[illegible] einen gegebenen Werth hat. Auflösungen?

[illegible] zwei Auflösungen ergeben, etwa x_1 und x_2, [illegible] setzen dürfen.

[illegible]

[illegible] als absolute Beträge der Complexe [illegible]

[illegible] Durch Trennung der imaginäre[illegible]

$$[illegible]\quad r - 2n\pi = \varrho \sin(\alpha + \varphi).$$

[illegible], dass man den Zu[illegible] der reelle Logarithmus de[illegible] der beiden Polarcurve[illegible]

[illegible] eine Lösung der Gleichung [illegible]

[illegible] Vielfache von 2π differiren [illegible] unendlich viele in arithmeti[illegible] vollständige Umläufe [illegible] aber zwei Durch[illegible] bei $\alpha + \varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ [illegible] also x reell, vorläufig aus, [illegible] der Ideen als im ersten [illegible] durch den Anfangspunkt gehen; [illegible] unendlich gross und erhält, wenn φ [illegible] Die Curve erscheint daher im entgegen- [illegible] dem Winkel $2\pi - \alpha$. Während [illegible] vom Werthe $\varphi = \pi - \alpha$ bis $2\pi - \alpha$ be- [illegible] der Reihe nach im vierten, ersten [illegible] zweiten Quadrant bei $\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Beim weiteren [illegible] den Werth $\varphi = 2\pi - \alpha$ hinaus wird [illegible] aus dem zweiten in den vier- [illegible] wiederholt sich nun unendlich oft [illegible] kurz dahin zusammenfassen, dass

die Curve sich in unendlich vielen Zweigen nur auf einer Seite des durch den Anfang in der Richtung $\pi - \alpha$ gezogenen Strahles befinden wird. Die Curvenpunkte mit negativem ϱ können, als der Hauptuntersuchung fremd, ausgeschlossen werden.

Betrachten wir jetzt die erste Gleichung 5). Man kann derselben die Form geben

B) $$\frac{\log \varrho}{\varrho} = a \cdot \cos(\alpha + \varphi).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aller negativen Werthe fähig, erreicht bei $\varrho = e$ ein Maximum, dessen Werth $\frac{1}{e}$, und man überzeugt sich leicht, dass jeder Werth zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ zweimal, jeder grössere gar nicht angenommen wird.

Herr Cantor theilte auf der diesjährigen Philologenversammlung in der mathematischen Section ein interessantes geometrisches Verfahren mit.

Nehmen wir also zunächst $a \overline{\gtrless} \frac{1}{e}$ an, so existiren, indem wir wieder α im ersten Quadranten liegend annehmen, für $\varphi = 0$ zwei Werthe des ϱ; dasselbe gilt für alle Werthe des φ bis $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$; dort wird der eine Werth des $\varrho = 1$, der andere $\varrho = \infty$, der eine Zweig der Curve verliert sich also in der Richtung $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ im Unendlichen.

Während nun φ sich bis auf $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ vergrössert, hat ϱ immer nur einen bestimmten Werth < 1, die Curve besteht also im einen Theile des ersten, im ganzen zweiten und in einem Theile des dritten Quadranten nur aus einem Zweige. Sobald φ den Werth $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ überschreitet, erscheint die Curve in dieser Richtung wieder aus dem Unendlichen, besteht also wieder aus zwei Zweigen.

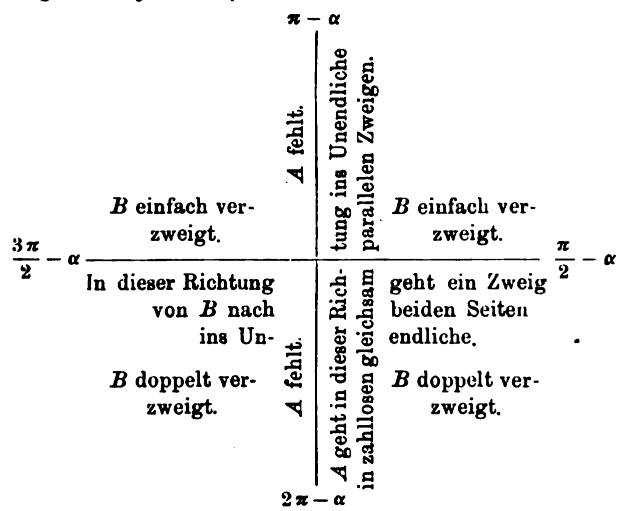
Fassen wir das Gesagte zusammen, so besteht die Curve auf der einen Seite des in der Richtung $\frac{\pi}{2} - \alpha$ durch den Anfang gehenden Strahles aus einem überall im Endlichen liegenden Zweige, auf der andern Seite aber aus zwei Zweigen, von denen der eine überall im Endlichen liegt, der andere aber in der obigen Richtung $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nach beiden Seiten ins Unendliche ausläuft. Die beiden Zweige berühren einander in einer Richtung, welche durch die Gleichung gegeben ist

6) $$\frac{1}{e} = a \cdot \cos(\alpha + \varphi),$$

was aber *nur für den Grenzfall* $a = \frac{1}{e}$ eintreten kann.

Was nun die Entscheidung unserer Hauptfrage nach dem Durchschneiden der beiden Curven 5) betrifft, so ist zunächst wichtig, zu bemerken, dass die beiden vorhin gefundenen Richtungen $\pi-\alpha$ und $\frac{\pi}{2}-\alpha$ auf einander senkrecht stehen. Auch wird der aufmerksame Leser gefunden haben, dass der Ausdruck: „eine Seite des Strahles" nur der Kürze wegen in dieser Unbestimmtheit belassen ist.

Wir wollen jetzt diesen Zweifel heben und zwar indem wir die Curven, wie es schon im Texte geschehen ist, mit A und B bezeichnen, in folgender anschaulicher Form, welche ohne nähere Beschreibung unzweifelhaft verständlich ist, wenn gesagt wird, dass in dem Winkelraume links oben die Curve A gar nicht und B in einfachem Zuge vorkommt. Man sieht sofort, dass der ins Unendliche verlaufende Zweig von B in dem Quadranten rechts unten die sämmtlichen Zweige von A durchsetzen muss. Interessante Fragen, ob im Quadranten rechts oben, überhaupt, ob auf dem endlichen Zweige von B Schnittpunkte liegen, übergehe ich, da ja die Hauptfrage in bejahendem Sinne entschieden ist.



Nehmen wir endlich $a>\frac{1}{e}$ an, so erhalten wir für $\varphi=\frac{3\pi}{2}-\alpha$ wie oben zwei Werthe des ϱ, nämlich 1 und ∞; wächst φ, so liegt $\alpha+\varphi$ im vierten Quadranten, sein Cosinus ist positiv und für jeden Winkel existiren zwei Curvenpunkte, bis φ den Werth erreicht, welcher durch die Gleichung gegeben ist

$$6)\qquad \frac{1}{e}=a.\cos(\alpha+\varphi),$$

Hier liegt ein Haltepunkt der Curve, der zugleich eine Spitze ist. Ein liegt symmetrisch im ersten Quadranten. Ist derselbe überschrit- sehen wieder jedem Winkel zwei Werthe des ϱ also zwei

Curvenpunkte, bis $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ wird, wo der eine Zweig ins Unendliche ausläuft und der andere den übrigen Halbkreis in einem einfachen Bogen durchläuft.

Auch hier ist die Hauptfrage wieder ohne Schwierigkeit in bejahendem Sinne zu entscheiden.

Das Resultat unserer Untersuchung lässt sich daher kurz dahin zusammenfassen:

Die Gleichung $\frac{\log x}{x} = A$, wo A irgend eine complexe Grösse bedeutet, ist in jedem Falle durch unzählige complexe Werthe von x lösbar. Ist $x = \varrho . e^{\varphi i}$ und $A = a . e^{\alpha i}$, so hat man für grosse Werthe des ϱ den Winkel φ in der Nähe des Werthes $\gtrless 2m\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$, wo m ganzzahlig, aufzusuchen. Irgend ein derartiges Werthepaar für x giebt eine Lösung der Gleichung $x^y = y^x$. Es braucht wohl kaum erinnert zu werden, dass diese Gleichung, für sich betrachtet, unbestimmt ist.

Ein besonderes Interesse bietet noch der Specialfall

$$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{e}$$

dar, indem bei reellen Werthen hier ein Maximum $x = e$ vorhanden ist. Da jedoch die Methoden zur genaueren Erörterung dieselben bleiben, mag dieser Hinweis dem geneigten Leser genügen.

Brilon. Dr. K. SCHWERING.

Berichtigung.

In dem Aufsatze: „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung“ im XXI. Bande dieser Zeitschrift kommen einige Versehen vor, die durch folgende Zeilen berichtigt werden sollen.

Für den Beweis in 2 auf S. 428 tritt der folgende ein:

Die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ mögen ihre homologen Strahlen $s_1 s_2 s_3 \ldots$ in $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... schneiden. Durch die beiden Punktgruppen $A B E_1 F_1 E_3$ und $A B E_2 F_2 E_3$ lege man die Kegelschnitte λ_1^2 und λ_2^2; sie mögen sich noch in E schneiden und constituiren ein Büschel $(ABE_3E)\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots\}$. Ein Kegelschnitt desselben, λ_3^2, geht durch F_3. Wenn man die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2$ und $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ einander zuordnet, so sind die Büschel $(\varkappa^2 \ldots)$ und $(\lambda^2 \ldots)$ projectivisch auf einander und letzteres auch auf das Strahlenbüschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ bezogen. — Zieht man durch M irgend einen Strahl s_x, so wird er von jedem der Kegelschnittbüschel in einer Involution geschnitten. In dem beiden Involutionen gemeinsamen Punktpaare treffen sich zwei Kegelschnitte $\varkappa^2_x$ und λ^2_x; ordnet man je zwei einander zu, so sind die Büschel auf einander und auf das Strahlenbüschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ projectivisch bezogen. Da bei dieser Beziehung die Elemente $\varkappa_1^2$ und λ_1^2, $\varkappa_2^2$ und λ_2^2, $\varkappa_3^2$ und λ_3^2 homologe sind, so müssen die Kegelschnitte des Büschels $(\lambda^2 \ldots)$ die Strahlen des Büschels $M(s_1 s_2 \ldots)$ in denjenigen Punkten treffen, in denen diese von den ihnen homologen Kegelschnitten des *Büschels* $(\varkappa^2 \ldots)$ *getroffen* werden. Die Curve C^3, welche durch

Büschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ und $(ABCD)\{\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots\}$ erzeugt wird, kann demnach auch durch $M(s_1 s_2 \ldots)$ und $(ABE_3 E)\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots\}$ erzeugt werden. Unter den Grundpunkten des letzteren kommt ein beliebiger Punkt E_3 der Curve C^3 vor; zwei der Grundpunkte AB sind schon im ersten Büschel vorhanden. Das zweite Büschel ersetze man durch ein drittes mit den Grundpunkten AE_3P_3P und dieses durch ein viertes mit den Grundpunkten $E_3P_3Q_3Q$, von denen noch P_3 und Q_3 ganz beliebige Punkte von C^3 sind. Daraus aber ergiebt sich: Legt man durch die Punktpaare E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, ... und drei ganz beliebige Punkte $E_3P_3Q_3$ von C^3 Kegelschnitte, so treffen sie sich noch in einem Punkte Q von C^3.

Durch einen beliebigen Punkt S von C^3 ziehe man einen Strahl g_1, der C^3 noch in S_1T_1 schneidet, und lege durch die vier Punkte $E_1F_1S_1T_1$ einen Kegelschnitt μ_1^2, der C^3 noch in HK trifft. Nach dem Vorigen lässt sich dann auch durch $E_2F_2S_1T_1HK$ ein Kegelschnitt ν_1^2 legen. Wenn μ_1^2 das Büschel (E_1F_1HK) durchläuft, so durchläuft ν_1^2 das Büschel (E_2F_2HK); je zwei Kegelschnitte dieser Büschel treffen sich noch in zwei Punkten S_2T_2, S_3T_3, ... von C^3 und sind dadurch projectivisch einander zugeordnet. Da die Geradenpaare (HK, E_1F_1) und (HK, E_2F_2) sich auch in zwei Punkten von C^3 schneiden, nämlich in M und dem dritten Schnittpunkt von HK mit C^3, so entsprechen sie einander in der projectivischen Beziehung und die Geraden S_1T_1, S_2T_2, S_3T_3, ... müssen sich nach 1, S. 427, in einem Punkte schneiden. Dieser muss auf C^3 liegen, denn diese Curve wird durch das Strahlenbüschel in ihm und das Kegelschnittbüschel (E_1F_1HK) erzeugt. Also ist S der Schnittpunkt. Das vorhin erhaltene Resultat wird also verallgemeinert: Ist S ein beliebiger Punkt von C^3 und schneiden die Strahlen durch S diese Curve in S_1T_1, S_2T_2, S_3T_3, ..., so treffen sich alle Kegelschnitte, welche durch diese Punktpaare und drei beliebige Punkte von C^3 gelegt werden, noch in einem Punkte von C^3.

Für den Satz 12, S. 436, hat Herr Professor Sturm in Münster mir folgenden Beweis mitgetheilt.

Durch A ziehe man zwei unendlich benachbarte Strahlen, welche die Curve in BC und $B'C'$ und die erste Polare A^2 in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ treffen; also laufen die drei Tangenten b, c, $\mathfrak{a}$ in B, C, $\mathfrak{A}$ an C^3 und A^2 in einen Punkt $\mathfrak{A}''$ zusammen; desgleichen die drei Tangenten a, c, $\mathfrak{b}$ in A, C, $\mathfrak{B}$ an C^3 und B^2 in den Punkt $\mathfrak{B}''$ zusammen, wenn B^2 die erste Polare von B und $\mathfrak{B}$ ihr Schnittpunkt mit AB ist. Es seien D, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$ die Schnittpunkte von a und b, a und $\mathfrak{a}$, b und $\mathfrak{b}$, so ist $A\mathfrak{B}''\mathfrak{A}'''D \barwedge B\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'''D$, weil beides harmonische Gruppen sind, also gehen AB, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''$ oder c, $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ durch denselben Punkt, d. i. C. Die letzte Gerade ist aber die gemeinsame Polare von A nach B^2 und von B nach A^2; denn erstens müssen beide Polaren durch C gehen, weil C von B durch $A\mathfrak{A}$ und von A durch $B\mathfrak{B}$ harmonisch getrennt ist. Andererseits ist $\mathfrak{A}'''$ der Schnittpunkt der Tangenten a und $\mathfrak{a}$ an A^2 in A und $\mathfrak{A}$, liegt also auf der Polare von B nach A^2; ebenso $\mathfrak{B}'''$ auf der Polare von A nach B^2.

Auf S. 433 schreibe man in Z. 5: „in o_n“ statt „mit o_m“ und statt „ein gemeinschaftlicher ...“ schreibe man „und $(o_m o_n)$ conjugirte Punkte für beide Büschel wären“.

Auf S. 436 in Satz 13, Z. 8 schreibe man: „P^2 und Q^2 die ihnen ...henden Kegelschnitte“ statt „P^2 und Q^2 ihre ersten Polaren“.

...140 Z. 7 von unten und S. 441 Z. 16, 17 von oben g statt l.

Milinowski.

XV.

Ueber die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung.

Von

Dr. Ad. Hochheim,

Professor.

(Fortsetzung.)

Enveloppen der Polarebenen.

15. **Die zweite Polarfläche einer Geraden** G. Construirt man zu jedem Punkte einer Geraden G die Polarebene bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so wird dieses Ebenensystem von einer abwickelbaren Fläche zweiter Ordnung eingehüllt, der zweiten Polarfläche dieser Geraden.*

Ein Punkt k auf der Geraden G besitze die Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, ein zweiter Punkt k' die Coordinaten $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, dann lassen sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf derselben bezeichnen durch $\xi_1 + \lambda\xi'_1$, $\xi_2 + \lambda\xi'_2$, ... und das System der Polarebenen aller Punkte von G bezüglich einer windschiefen Fläche 1) entspricht demnach der Gleichung

$$\begin{aligned} &(\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4) \\ 29)\quad &+ 2\lambda\{\xi_4\xi'_4 x_1 - \xi_3\xi'_3 x_2 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)x_3 + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_4\} \\ &+ \lambda^2(\xi'^2_4 x_1 - \xi'^2_3 x_2 - 2\xi'_2\xi'_3 x_3 + 2\xi'_1\xi'_4 x_4) = 0, \end{aligned}$$

in der λ als Veränderliche zu betrachten ist. Setzt man das Differential dieser Gleichung gleich Null und eliminirt mit Hilfe der so erhaltenen Relation die Grösse λ, so ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe des Ebenensystems

$$\begin{aligned} &(\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2\xi_3 x_3 + 2\xi_1\xi_4 x_4)(\xi'^2_4 x_1 - \xi'^2_3 x_2 - 2\xi'_2\xi'_3 x_3 + 2\xi'_1\xi'_4 x_4) \\ &\quad - (\xi_4\xi'_4 x_1 - \xi_3\xi'_3 x_2 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)x_3 + (\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_4)^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(\xi_3\xi'_4 - \xi_4\xi'_3)^2 x_1 x_2 + 2(\xi_2\xi'_4 - \xi_4\xi'_2)(\xi_3\xi'_4 - \xi_4\xi'_3)x_1 x_3 \\ 30)\quad &+ 2(\xi_3\xi'_1 - \xi_1\xi'_3)(\xi_3\xi'_4 - \xi_4\xi'_3)x_2 x_4 \\ &+ 2(2\xi_1\xi_4\xi'_2\xi'_3 + 2\xi_2\xi_3\xi'_1\xi'_4 - (\xi_2\xi'_3 + \xi_3\xi'_2)(\xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1))x_3 x_4 \\ &+ (\xi_2\xi'_3 - \xi_3\xi'_2)^2 x_3^2 + (\xi_1\xi'_4 - \xi_4\xi'_1)^2 x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

---

* Cremona, Theorie d. Oberfl. S. 78.

Die zweite Polarfläche einer Geraden G bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist demnach ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze im Durchschnittspunkte der drei Ebenen Pe_{k}, $Pe_{k'}$, $Pe_{kk'}$ liegt. Diese Fläche wird auch der Polarkegel der Geraden G * genannt.

Von der Coordinatenebene $x_3 = 0$ wird der Polarkegel der Geraden G in einer Hyperbel geschnitten, und zwar ist dieselbe eine gleichseitige, wenn die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in der Unendlichkeit liegt.

Aus der Gleichung 30) lassen sich folgende bemerkenswerthe Specialfälle ableiten.

α) Schneidet die Gerade G die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche, so degenerirt der Polarkegel in eine Doppelebene, welche die Doppellinie in sich enthält.

β) Ist die Gerade G eine Generatrix der windschiefen Fläche, so schneiden sich alle Ebenen des Systems in derselben.

γ) Liegt die Gerade G in der Ebene $x_1 = 0$,

so ist der Polarkegel derselben bezüglich der windschiefen Fläche $W_{d.e}$ ein parabolischer Cylinder, dessen Generatrix der Axe $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ parallel läuft.

so liegt die Spitze des Polarkegels bezüglich der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$ in dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

δ) Befindet sich die Gerade G in der Ebene $x_2 = 0$, so ist der Polarkegel derselben ein hyperbolischer Cylinder.

ε) Liegt die Gerade G in der Ebene $x_3 = 0$, so degenerirt der Polarkegel derselben in eine Doppelebene, die mit $x_4 = 0$ zusammenfällt; liegt G dagegen in der Ebene $x_4 = 0$, so geht der Polarkegel über in eine Doppelebene, welche mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfällt.

Mit Hilfe von 5) lassen sich die beiden folgenden Sätze ableiten:

Die Spitze des Polarkegels der Geraden G ist der Pol derjenigen quadratischen Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), welche durch G hindurchgeht.

Der Polarkegel der Geraden G ist der geometrische Ort aller Pole, deren quadratische Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) von der Geraden G berührt werden.

16. **Die gemischte Polarfläche zweier Geraden G und G'.** Construirt man zu jedem Punkte einer Geraden G die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) und zu jedem Punkte einer Geraden G' die Polarebene bezüglich jeder jener quadratischen Polarflächen, so wird das Ebenensystem von einer Fläche zweiter Ordnung, der gemisch-

* Cremona, *Theorie d. Oberfl.* S. 153.

ten Polarfläche der Geraden G und G',* eingehüllt. Nach 12) ist diese Fläche zugleich die Enveloppe der gemischten Polarebenen zweier Punkte k und h, von denen der eine auf der Geraden G, der andere auf der Geraden G' fortgleitet.

Gegeben seien auf jeder der Geraden G und G' zwei feste Punkte, auf G nämlich k und k', auf G' dagegen k'' und k'''. Die Coordinaten dieser Punkte seien

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \ \xi'_1,\ \xi'_2,\ \ldots,\ \ \xi''_1,\ \xi''_2,\ \ldots,\ \ \xi'''_1,\ \xi'''_2,\ \xi'''_3,\ \xi'''_4;$$

dann sind die Coordinaten irgend eines Punktes auf der Geraden G

$$\xi_1+\lambda\xi'_1,\quad \xi_2+\lambda\xi'_2,\quad \xi_3+\lambda\xi'_3,\quad \xi_4+\lambda\xi'_4,$$

und die eines beliebigen Punktes auf der Geraden G'

$$\xi''_1+\mu\xi'''_1,\quad \xi''_2+\mu\xi'''_2,\quad \xi''_3+\mu\xi'''_3,\quad \xi''_4+\mu\xi'''_4.$$

Das System der gemischten Polarebenen der Punkte auf den Geraden G und G' besitzt demnach die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\xi_4\xi''_4x_1-\xi_3\xi''_3x_2-(\xi_2\xi''_3+\xi_3\xi''_2)x_3+(\xi_1\xi''_4+\xi_4\xi''_1)x_4\\
&+\lambda\{\xi'_4\xi''_4x_1-\xi'_3\xi''_3x_2-(\xi'_2\xi''_3+\xi'_3\xi''_2)x_3+(\xi'_1\xi'_4+\xi'_4\xi''_1)x_4\}\\
31)\quad &+\mu\{\xi_4\xi'''_4x_1-\xi_3\xi'''_3x_2-(\xi_2\xi'''_3+\xi_3\xi'''_2)x_3+(\xi_1\xi'''_4+\xi_4\xi'''_1)x_4\}\\
&+\lambda\mu\{\xi'_4\xi'''_4x_1-\xi'_3\xi'''_3x_2-(\xi'_2\xi'''_3+\xi'_3\xi'''_2)x_3\\
&\qquad\qquad+(\xi'_1\xi'''_4+\xi'_4\xi'''_1)x_4\}=0,
\end{aligned}$$

in der λ und μ alle möglichen Werthe besitzen können. Differentiirt man diese Gleichung nach λ und μ, setzt diese Differentiale gleich Null und eliminirt mit Hilfe dieser beiden Relationen die veränderlichen Grössen λ und μ, so ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe des Ebenensystems

$$\begin{aligned}
&\{\xi_4\xi''_4x_1-\xi_3\xi''_3x_2-(\xi_2\xi''_3+\xi_3\xi''_2)x_3+(\xi_1\xi''_4+\xi_4\xi''_1)x_4\}\\
32)\quad &\times\{\xi'_4\xi'''_4x_1-\xi'_3\xi'''_3x_2-(\xi'_2\xi'''_3+\xi'_3\xi'''_2)x_3+(\xi'_1\xi'''_4+\xi'_4\xi'''_1)x_4\}\\
&-\{\xi_4\xi'''_4x_1-\xi_3\xi'''_3x_2-(\xi_2\xi'''_3+\xi_3\xi'''_2)x_3+(\xi_1\xi'''_4+\xi_4\xi'''_1)x_4\}\\
&\times\{\xi'_4\xi''_4x_1-\xi'_3\xi''_3x_2-(\xi'_2\xi''_3+\xi'_3\xi''_2)x_3+(\xi'_1\xi''_4+\xi'_4\xi''_1)x_4\}=0.
\end{aligned}$$

Die gemischte Polarfläche der beiden Geraden G und G' bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist also ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche.

Bezeichnen wir die Gleichung der gemischten Polarebene der Punkte k und k'' mit $\underset{kk''}{Pe}=0$, die der Punkte k' und k'' mit $\underset{k'k''}{Pe}=0$ u. s. f., so lässt sich die Gleichung 32) auf die Gestalt bringen

$$33)\qquad \underset{kk''}{Pe}\,.\,\underset{k'k'''}{Pe}-\underset{kk'''}{Pe}\,.\,\underset{k'k''}{Pe}=0.$$

Die gemischte Polarfläche der beiden Geraden G und G' kann demnach betrachtet werden als der geometrische Ort der Systeme von geraden Linien, welche den Gleichungen

---

* …ie d. Oberfl. S. 153.

$$\text{34)} \quad \begin{cases} \underset{kk'}{Pe} = v . \underset{kk'''}{Pe}, & v . \underset{k'k'''}{Pe} = \underset{k'k''}{Pe}, \\ \underset{kk''}{Pe} = v . \underset{k'k'}{Pe}, & v . \underset{k'k'''}{Pe} = \underset{kk'''}{Pe} \end{cases}$$

entsprechen.

Lässt man k mit k'' und k' mit k''' zusammenfallen, so decken sich die beiden Geraden G und G', die Gleichung 32) geht dann über in die Gleichung 30).

Fallen also die beiden Geraden G und G' zusammen, so erhalten wir einen Kegel zweiter Ordnung, nämlich den Polarkegel der Geraden G.

Fällt die eine der beiden Geraden mit der doppelten Leitlinie der windschiefen Fläche zusammen, so geht die Gleichung 32) über in

$$x_3 x_4 = 0,$$

d. h. die gemischte Polarfläche der beiden Geraden besteht aus den beiden Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$.

Für $\xi_3 = \xi'_3 = \xi''_3 = \xi'''_3 = 0$ geht die Gleichung 32) über in

$$x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt: Verlegt man die beiden Geraden G und G' in die Ebene $x_3 = 0$, so degenerirt die gemischte Polarfläche derselben in zwei Ebenen, die beide mit $x_4 = 0$ zusammenfallen.

Setzt man $\xi_4 = \xi'_4 = \xi''_4 = \xi'''_4 = 0$, so geht die Gleichung 32) über in

$$x_3^2 = 0.$$

Befinden sich also die beiden Geraden in der Ebene $x_4 = 0$, so besteht die gemischte Polarfläche derselben aus zwei Ebenen, die beide mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfallen.

Die gemeine Polarfläche einer Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 1).

17. Die Enveloppe der Polarebenen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) aller Punkte, welche sich auf einer Ebene E befinden, ist eine Fläche dritter Ordnung und wird die gemeine oder kubische Polarfläche der Ebene E* genannt.

Wir benutzen zur Ableitung der Gleichung dieser Polarfläche die Methode der unbestimmten Multiplicatoren. Gegeben sei die Gleichung der Ebene E

$$\text{35)} \quad a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0. \quad (V).$$

Die Gleichung der Polarebene eines Punktes k mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 bezüglich einer beliebigen Fläche dritter Ordnung (u) ist

$$\text{36)} \quad \begin{aligned} (U) = \xi_1^2 u_{11} + \xi_2^2 u_{22} + \xi_3^2 u_{33} + \xi_4^2 u_{44} + 2 \xi_1 \xi_2 u_{12} + 2 \xi_1 \xi_3 u_{13} \\ + 2 \xi_1 \xi_4 u_{14} + 2 \xi_2 \xi_3 u_{23} + 2 \xi_2 \xi_4 u_{24} + 2 \xi_3 \xi_4 u_{34} = 0. \end{aligned}$$

---

* *Salmon*, Analyt. Geometrie des Raumes S. 411.

Bilden wir die Differentiale der Relation

$$U + 2\lambda V = 0$$

nach ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, so ergeben sich die Gleichungen

$$37)\quad \begin{cases} \xi_1 u_{11} + \xi_2 u_{12} + \xi_3 u_{13} + \xi_4 u_{14} + \lambda a_1 = 0, \\ \xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{22} + \xi_3 u_{23} + \xi_4 u_{24} + \lambda a_2 = 0, \\ \xi_1 u_{31} + \xi_2 u_{32} + \xi_3 u_{33} + \xi_4 u_{34} + \lambda a_3 = 0, \\ \xi_1 u_{41} + \xi_2 u_{42} + \xi_3 u_{43} + \xi_4 u_{44} + \lambda a_4 = 0, \end{cases}$$

aus denen sich mit Hilfe von 36) die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 eliminiren lassen. U ist nun bezüglich derselben homogen vom zweiten Grade und demnach muss auch

$$38)\quad 2U = \xi_1 \frac{dU}{d\xi_1} + \xi_2 \frac{dU}{d\xi_2} + \xi_3 \frac{dU}{d\xi_3} + \xi_4 \frac{dU}{d\xi_4} = 0$$

sein. Da nach den Gleichungen 37)

$$\frac{dU}{d\xi_1} : \frac{dU}{d\xi_2} : \frac{dU}{d\xi_3} : \frac{dU}{d\xi_4} = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

ist, so lässt sich die Gleichung 38) überführen in

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0.$$

Führt man die Elimination aus, so erhält man als Gleichung der Enveloppe

$$39)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ a_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ a_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ a_4 & u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Einsetzung der Werthe für u_{11}, u_{12}, ... erhält man demnach die Gleichung der gemeinen Polarfläche der Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 1), nämlich

$$40\text{a})\quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ a_2 & 0 & 0 & -2x_3 & 0 \\ a_3 & 0 & -2x_3 & -2x_2 & 0 \\ a_4 & 2x_4 & 0 & 0 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$40\text{b})\quad a_1^2 x_1 x_3^2 - a_2^2 x_2 x_4^2 - 2a_1 a_4 x_3^2 x_4 + 2a_2 a_3 x_3 x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt:

Die Enveloppe der Polarebenen aller Punkte, welche auf der Ebene E liegen, ist eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren doppelte Leitlinie die Gerade $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und deren einfache Leitlinie die Schnittkante der beiden Ebenen

$$a_1 x_1 - 2a_4 x_4 = 0, \quad a_2 x_2 - 2a_3 x_3 = 0$$

ist.

18. Nach 4 ist die Polarebene eines Punktes k bezüglich einer Fläche zugleich auch die Polarebene bezüglich der quadratischen Polarfläche desselben Punktes. Bestimmt man also für jeden Punkt auf der Ebene E die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) und ausserdem für jeden dieser Punkte die Polarebene in Bezug auf die zugehörige quadratische Polarfläche, so wird das Ebenensystem von der gemeinen Polarfläche der Ebene E eingehüllt.

Nach den Erklärungen in 15 und 17 ist die gemeine Polarfläche einer Ebene E auch die Enveloppe der Polarkegel aller Geraden, welche in der Ebene E liegen.

Gegeben seien zwei Ebenen E und E', welche sich in einer Geraden G schneiden mögen. Bestimmt man den Polarkegel der Geraden G, so ist derselbe Tangentenkegel sowohl der gemeinen Polarfläche der Ebene E, als auch der der Ebene E', und zwar liegt sein Scheitel in jeder dieser beiden Polarflächen.

Eine Ebene E schneidet eine windschiefe Fläche 1) im Allgemeinen in einer Curve dritter Ordnung. Die Polarebenen aller Punkte dieser Schnittcurve sind zugleich Tangentialebenen der windschiefen Fläche an diesen Punkten. Daraus lässt sich schliessen: Die abwickelbare Fläche, welche von den Tangentialebenen längs der Schnittcurve gebildet wird, ist der gemeinen Polarfläche der Ebene E umgeschrieben.

Ist die Ebene E Tangentialebene der windschiefen Fläche 1), so liegt auch die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix derselben auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E.

Durch einen beliebigen Punkt k sei ein System von Ebenen E_1, E_2, E_3, ... gelegt und zu jeder derselben die gemeine Polarfläche construirt. Da der Punkt k auf jeder dieser Ebenen liegt, so muss die Polarebene desselben bezüglich einer windschiefen Fläche 1) zu jedem der Systeme von Ebenen gehören, dessen Enveloppe eine jener gemeinen Polarflächen ist.

Gehen demnach die Ebenen E_1, E_2, E_3, ... alle durch einen Punkt k, so ist die Polarebene des Punktes k bezüglich einer windschiefen Fläche 1) die gemeinschaftliche Tangentialebene der gemeinen Polarflächen der Ebenen E_1, E_2, E_3, ...

19. Gegeben sei eine Ebene E, welche der Gleichung

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0$$

entsprechen möge. Wenn man für jeden Punkt derselben als Pol die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) bestimmt, so ergiebt sich als Gleichung dieses Systems von Hyperboloiden

$$a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4) x_4^2 + a_1 \xi_2 x_3^2 + 2 a_1 \xi_3 x_2 x_3 - 2 a_1 \xi_4 x_1 x_4 = 0,$$

in der die Verhältnisse $\frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ alle beliebigen Werthe besitzen können. Wird nun die Ebene E als Polarebene jeder dieser quadratischen Polarflächen betrachtet, so müssen die tetraedrischen Coordinaten $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ jedes entsprechenden Poles den Relationen

$$a_2\xi'_4\xi_2 + a_3\xi'_4\xi_3 + (2a_4\xi'_4 - a_1\xi'_1)\xi_4 = 0,$$
$$a_2^2\xi'_4\xi_2 + (a_2a_3\xi'_4 - a_1a_4\xi'_3)\xi_3 + (a_2a_4\xi'_4 - a_1a_2\xi'_1)\xi_4 = 0,$$
$$(a_2a_3\xi'_4 - a_1a_4\xi'_3)\xi_2 + (a_3^2\xi'_4 - a_1a_4\xi'_2)\xi_3 + (a_3a_4\xi'_4 - a_1a_3\xi'_1)\xi_4 = 0$$

genügen. Eliminirt man die veränderlichen Verhältnisse $\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$41\text{ a)}\quad \begin{vmatrix} a_2\xi'_4 & a_3\xi'_4 & 2a_4\xi'_4 - a_1\xi'_1 \\ a_2^2\xi'_4 & a_2a_3\xi'_4 - a_1a_4\xi'_3 & a_2a_4\xi'_4 - a_1a_2\xi'_1 \\ a_2a_3\xi'_4 - a_1a_4\xi'_3 & a_3^2\xi'_4 - a_1a_4\xi'_2 & a_3a_4\xi'_4 - a_1a_3\xi'_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$41\text{ b)}\quad a_1^2\xi'_1\xi'^2_3 - a_2^2\xi'_2\xi'^2_4 - 2a_1a_4\xi'^2_3\xi'_4 + 2a_2a_3\xi'_3\xi'^2_4 = 0.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser letzteren Gleichung mit 40b) folgt:

Bestimmt man für jeden Punkt der Ebene E die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) und betrachtet dann die Ebene als Polarebene bezüglich jedes der Hyperboloide, so ist der geometrische Ort der zugehörigen Pole die gemeine Polarfläche der Ebene E in Bezug auf die windschiefe Fläche.

20. Betrachtet man alle Punkte einer gemeinen Polarfläche der Ebene E als Pole und bildet zu jedem derselben die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so entspricht das System von Hyperboloiden der Gleichung

$$a_2^2\xi_1\xi_4^2x_4^2 + 2a_1a_4\xi_3^2\xi_4x_4^2 - 2a_2a_3\xi_3\xi_4^2x_4^2 - a_1^2\xi_2\xi_3^2x_3^2 - 2a_1^2\xi_3^3x_2x_3$$
$$+ 2a_1^2\xi_3^2\xi_4x_1x_4 = 0,$$

in der die Verhältnisse $\frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ alle möglichen Werthe besitzen können. Eliminirt man diese veränderlichen Verhältnisse mit Hilfe der beiden Relationen

$$a_2^2\xi_4^2x_4^2 - a_1^2\xi_3^2x_3^2 = 0,$$
$$4a_1a_4\xi_3\xi_4x_4^2 - 2a_2a_3\xi_4^2x_4^2 - 2a_1^2\xi_2\xi_3x_3^2 - 6a_1^2\xi_3^2x_2x_3$$
$$+ 4a_1^2\xi_3\xi_4x_1x_4 = 0,$$

so ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe des Flächensystems

$$42)\quad x_3^4x_4^4 = 0, \quad a_1x_1 \mp a_2x_2 \mp a_3x_3 + a_4x_4 = 0.$$

Die Enveloppe des Systems von Hyperboloiden wird also von zehn Ebenen gebildet, von denen eine mit der Ebene E, vier mit der Ebene $x_3 = 0$, vier mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammenfallen.

Die quadratischen Polarflächen aller Punkte, welche auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E liegen, haben diese Ebene selbst zur gemeinschaftlichen Tangentialebene.

Umgekehrt ist die gemeine Polarfläche der Ebene E der geometrische Ort aller Punkte, deren quadratische Polarflächen von der Ebene E berührt werden.

Die gemeine Polarfläche der Ebene

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

bezüglich einer windschiefen Fläche 1) fällt mit der der Ebene E zuzusammen.

21. Auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 1) befinde sich ein Punkt k. Die quadratische Polarfläche dieses Punktes bezüglich einer windschiefen Fläche 1) wird nach dem Vorigen von der Ebene E in einem Punkte k' berührt, aber ausserdem in zwei Geraden, welche durch k' gehen, geschnitten. Bildet man die Polarebenen aller Punkte der Geraden G und G', so muss jede derselben eine Tangentialebene der gemeinen Polarfläche der Ebene E sein und durch den Punkt k hindurchgehen. Von den Berührungspunkten dieser Tangentialebenen fällt nur der der Polarebene $\underset{k'}{Pe}$ mit k zusammen. Die beiden Polarkegel der Geraden G und G' haben demnach ihre Scheitelpunkte in k und sind Tangentenkegel der gemeinen Polarfläche der Ebene E.

22. Durch einen beliebigen Punkt k seien alle möglichen Tangentialebenen an die gemeine Polarfläche einer Ebene bezüglich einer windschiefen Fläche 1) gelegt. Werden diese Tangentialebenen als Polarebenen bezüglich der windschiefen Fläche 1) betrachtet, so muss der Pol einer jeden sich auf der Ebene E befinden. Da nun die quadratische Polarfläche des Punktes k der geometrische Ort aller Pole ist, deren Polarebenen durch den Punkt k hindurchgehen, so lassen sich folgende Sätze aufstellen.

Beschreibt man von einem Punkte k aus einen Tangentenkegel um die gemeine Polarfläche einer Ebene E und betrachtet die Tangentialebenen desselben als Polarebenen der windschiefen Fläche, so befinden sich alle Pole derselben auf einem Kegelschnitte, nämlich auf der Schnittcurve der quadratischen Polarfläche $\underset{k}{Pq}$ und der Ebene E.

Bildet man zu allen Punkten der Schnittcurve der Ebene E und einer quadratischen Polarfläche $\underset{k}{Pq}$ in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) die Polarebenen, so werden dieselben [illegible] egel eingehüllt, welcher der gemeinen Polar-

fläche der Ebene E umschrieben ist, und dessen Spitze im Punkte k liegt.

23. Das Ebenensystem, dessen gemeine Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) durch einen Punkt mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 hindurchgehen, entspricht der Gleichung

43) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

in der a_1, a_2, a_3, a_4 veränderliche Constante sind, aber der Bedingung

44) $$a_1^2 \xi_1 \xi_3^2 - a_2^2 \xi_2 \xi_4^2 - 2 a_1 a_4 \xi_3^2 \xi_4 + 2 a_2 a_3 \xi_3 \xi_4^2 = 0$$

Genüge leisten müssen.

Setzt man den aus 44) sich ergebenden Ausdruck für a_3 in 43) ein, so nimmt die Gleichung des Ebenensystems die Gestalt an

$$2 a_1 a_2 \xi_3 \xi_4^2 x_1 + 2 a_2^2 \xi_3 \xi_4^2 x_2 + (a_2^2 \xi_2 \xi_4^2 + 2 a_1 a_4 \xi_3^2 \xi_4 - a_1^2 \xi_1 \xi_3^2) x_3 + 2 a_2 a_4 \xi_3 \xi_4^2 x_4 = 0.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung mit Hilfe der Relationen

$$a_2 \xi_4^2 x_1 - a_1 \xi_1 \xi_3 x_3 + a_4 \xi_3 \xi_4 x_3 = 0,$$
$$a_1 \xi_3 x_1 + 2 a_2 \xi_3 x_2 + a_2 \xi_2 x_3 + a_4 \xi_3 x_4 = 0$$

die veränderlichen Quotienten $\frac{a_1}{a_4}$, $\frac{a_2}{a_4}$, so erhält man

$$\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2 \xi_3 x_2 x_3 + 2 \xi_4 x_1 x_4 = 0.$$

Daraus folgt: Das System der Ebenen, deren gemeine Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) durch einen festen Punkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) hindurchgehen, werden von der quadratischen Polarfläche des festen Punktes in Bezug auf die Fundamentalfläche eingehüllt.

Aus diesem Satze lassen sich folgende Resultate ableiten:

Befinden sich auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E die beiden Punkte k und k', so ist die Ebene E gemeinschaftliche Tangentialebene der quadratischen Polarflächen der beiden Punkte k und k' bezüglich der Fundamentalfläche, und die Umkehrung:

Ist die Ebene E eine gemeinschaftliche Tangentialebene zweier quadratischen Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so liegen die Pole derselben auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E.

Eine Verallgemeinerung dieser Sätze führt zu den früher entwickelten Resultaten.

24. Für besondere Lagen der Ebene E lassen sich mit Hilfe der Gleichung 40b) folgende Resultate aufstellen.

α) Setzt man $a_1 = 0$, so geht die Gleichung 40b) über in

$$a_2^2 x_2 x_4^2 - 2 a_2 a_3 x_3 x_4^2 = 0$$

oder

$$a_2 x_2 - 2 a_3 x_3 = 0, \quad x_4^2 = 0.$$

Daraus erhellt:

Geht die Ebene E durch den Schnittpunkt der drei Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der Fläche $\underset{d.e}{W}$ aus drei Ebenen, von denen die eine die Gerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ enthält, die beiden anderen mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammenfallen.

Steht die Ebene E auf der Ebene $x_1 = 0$ lothrecht, so wird die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der Fläche $\underset{d.\infty}{W}$ von drei Ebenen gebildet, von denen die eine die Gerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ enthält, die beiden anderen mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn die Ebene E die Gerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ enthält.

β) Für $a_2 = 0$ erhält man

$$a_1^2 x_1 x_3^2 - 2 a_1 a_4 x_3^2 x_4 = 0$$

oder

$$x_3^2 = 0, \quad a_1 x_1 - 2 a_4 x_4 = 0.$$

Steht also die Ebene E lothrecht auf der Ebene $x_2 = 0$,

so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der windschiefen Fläche $\underset{d.e}{W}$ aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfallen, die dritte der Ebene $x_4 = 0$ parallel läuft.

so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der windschiefen Fläche $\underset{d.\infty}{W}$ aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfallen, die dritte der Ebene $x_1 = 0$ parallel läuft.

Diese Resultate bleiben unverändert, wenn man $a_2 = a_3 = 0$ setzt.

γ) Enthält die Ebene E die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche, so verschwindet die Gleichung 40b).

δ) Setzt man $a_3 = a_4 = 0$, so erhält die Gleichung 40b) die einfachere Gestalt

$$a_1^2 x_1 x_3^2 - a_2^2 x_2 x_4^2 = 0.$$

Enthält demnach die Ebene E die einfache Leitlinie der Fundamentalfläche, so ist die gemeine Polarfläche derselben ebenfalls eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren doppelte Leitlinie mit der Geraden $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, deren einfache Leitlinie mit der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zusammenfällt, deren singuläre Erzeugende aber in den Schnittkanten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ liegen.

ε) Für $a_1 = a_3 = 0$ ergiebt sich

$$x_2 x_4^2 = 0 \text{ oder } x_2 = 0, \; x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt:

Geht die Ebene E durch die Doppelgeneratrix der windschiefen Fläche $\underset{d.e}{W}$, so wird die ge-

Läuft die Ebene E der Ebene $x_2 = 0$ parallel, so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüg-

meine Polarfläche derselben von drei Ebenen gebildet, von denen zwei mit der Ebene $x_4=0$, eine mit der Ebene $x_2=0$ zusammenfallen.

lich der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$ aus drei Ebenen, von denen eine mit der Ebene $x_2=0$, zwei mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

Zu denselben Resultaten gelangt man, wenn man der Ebene E die Lage $x_2=0$ ertheilt.

ζ) Setzt man endlich $a_2=a_4=0$, so erhält man

$$x_1 x_3^2=0 \text{ oder } x_1=0,\ x_3^2=0.$$

Daraus lässt sich schliessen:

Ist die Ebene E der Ebene $x_3=0$ parallel, so degenerirt die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der windschiefen Fläche $W_{d.e}$ in drei Ebenen, von denen eine mit der unendlich fernen Ebene, die beiden anderen mit der Ebene $x_3=0$ zusammenfallen.

Enthält die Ebene E die endliche Doppelgeneratrix der windschiefen Fläche $W_{d.\infty}$, so besteht die gemeine Polarfläche derselben aus drei Ebenen, von denen eine mit der Ebene $x_1=0$, die beiden anderen mit der Ebene $x_3=0$ zusammenfallen.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn E die Lage $x_1=0$ erhält. Die Ebenen $x_1=0$, $x_3=0$ bilden demnach die Enveloppe aller Diametralebenen der windschiefen Fläche $W_{d.e}$.

Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 1).

25. Gegeben seien zwei Ebenen E und E'. Bestimmt man zu jedem Punkte der Ebene E die quadratische Polarfläche in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) und betrachtet die Ebene E' als Polarebene jeder dieser quadratischen Polarflächen, so ist der geometrische Ort der Pole die gemischte Polarfläche der Ebenen E und E'* bezüglich der windschiefen Fläche.

Es sei die Gleichung der Ebene E

45 a) $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0,$$

die der Ebene E'

45 b) $$a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4=0.$$

Bezeichnet man die Gleichung der Fundamentalfläche kurz durch $u=0$, so kann man der Gleichung der quadratischen Polarfläche eines Punktes k bezüglich derselben, indem man x_1, x_2, x_3, x_4 als Constante, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ als Variabele betrachtet, die Gestalt geben

* Cremona, *Theorie d. Oberfl.* S. 154.

$$\text{F)}\quad u_{11}\xi_1^2+u_{22}\xi_2^2+u_{33}\xi_3^2+u_{44}\xi_4^2+2u_{12}\xi_1\xi_2+2u_{13}\xi_1\xi_3+2u_{14}\xi_1\xi_4 \\ +2u_{23}\xi_2\xi_3+2u_{24}\xi_2\xi_4+2u_{34}\xi_3\xi_4=0.$$

Wird die Ebene E' als Polarebene dieser quadratischen Polarfläche angenommen, so müssen bekanntlich die Coordinaten des zugehörigen Poles der Proportion

$$\frac{dF}{d\xi_1}:\frac{dF}{d\xi_2}:\frac{dF}{d\xi_3}:\frac{dF}{d\xi_4}=a'_1:a'_2:a'_3:a'_4$$

genügen, woraus sich die Relationen ergeben

$$\text{46)}\quad \left\{\begin{array}{l} u_{11}\xi_1+u_{12}\xi_2+u_{13}\xi_3+u_{14}\xi_4=\lambda a'_1, \\ u_{21}\xi_1+u_{22}\xi_2+u_{23}\xi_3+u_{24}\xi_4=\lambda a'_2, \\ u_{31}\xi_1+u_{32}\xi_2+u_{33}\xi_3+u_{34}\xi_4=\lambda a'_3, \\ u_{41}\xi_1+u_{42}\xi_2+u_{43}\xi_3+u_{44}\xi_4=\lambda a'_4. \end{array}\right.$$

Durch Elimination der Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 aus den Gleichungen 45a) und 46) findet man demnach die Gleichung des geometrischen Ortes der Pole. Die Gleichungen 46) ändern sich indessen nicht, wenn man ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 mit x_1, x_2, x_3, x_4 vertauscht. Man gelangt daher zu demselben Resultate, wenn man aus den Gleichungen 46) und

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4=0$$

die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 eliminirt. Durch diese Operation findet man

$$\text{47)}\quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ a'_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ a'_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ a'_4 & u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}=0.^{*}$$

Setzt man die entsprechenden Werthe statt u_{11}, u_{12}, ... ein, so erhält man für den vorliegenden Fall

$$\text{48a)}\quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ a'_2 & 0 & 0 & -2x_3 & 0 \\ a'_3 & 0 & -2x_3 & -2x_2 & 0 \\ a'_4 & 2x_4 & 0 & 0 & 2x_1 \end{vmatrix}=0$$

oder

$$\text{48b)}\quad a_1a'_1x_1x_3^2-a_2a'_2x_2x_4^2-(a_1a'_4+a_4a'_1)x_3^2x_4 \\ +(a_2a'_3+a_3a'_2)x_3x_4^2=0$$

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist demnach ebenfalls eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren doppelte Leitlinie mit der Geraden $x_3=0$, $x_4=0$ zusammenfällt, und deren einfache Leitlinie die Schnittkante der beiden Ebenen

---

*) *Curven dritter* Ordnung S. 187.

$$a_1 a'_1 x_1 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_4 = 0, \quad a_2 a'_2 x_2 - (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 = 0$$

ist.

26. Setzt man

$$a'_1 = \nu a_1, \quad a'_2 = \nu a_2, \quad a'_3 = \nu a_3, \quad a'_4 = \nu a_4,$$

so gehen die Gleichungen 48a) und 48b) in die 40a) und 40b) über. Daraus folgt:

Lässt man die beiden Ebenen E und E' in eine Ebene zusammenfallen, so geht die gemischte Polarfläche über in die gemeine Polarfläche dieser Ebene bezüglich der windschiefen Fläche.

Aus diesem Satze ergiebt sich zugleich die in 19 entwickelte Eigenschaft der gemeinen Polarfläche einer Ebene E.

Die Relation 48b) bleibt unverändert, wenn man in derselben die Constanten a_1, a_2, a_3, a_4 mit a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 vertauscht.

Die gemischte Polarfläche der Ebenen E und E' verändert sich also nicht, wenn die beiden Ebenen E und E' ihre Functionen mit einander vertauschen.

27. Die Gleichung der quadratischen Polarfläche eines Punktes f mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist

$$\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0,$$

die beiden Ebenen E und E', deren Gleichungen in 45a) und 45b) gegeben sind, mögen in Bezug auf diese quadratische Polarfläche conjugirt sein, also jede derselben möge den Pol der andern bezüglich der quadratischen Polarfläche enthalten. Bestimmt man die Polarebene eines beliebigen Punktes x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_f q$, so ist die Gleichung derselben

$$49)\quad x'_4 \xi_4 x_1 - x'_3 \xi_3 x_2 - (x'_2 \xi_3 + x'_3 \xi_2) x_3 + (x'_1 \xi_4 + x'_4 \xi_1) x_4 = 0.$$

Wird diese Relation in Einklang gebracht mit der Gleichung

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0,$$

so müssen die daraus sich ergebenden Coordinaten des zugehörigen Poles nach der ursprünglichen Annahme der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

Genüge leisten. Durch Substitution der betreffenden Werthe erhält man

$$50)\quad a_1 a'_1 \xi_1 \xi_3^2 - a_2 a'_2 \xi_2 \xi_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) \xi_3^2 \xi_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) \xi_3 \xi_4^2 = 0.$$

Da diese Gleichung mit der 48b) übereinstimmt, so lässt sich schliessen:

Sind die Ebenen E und E' conjugirt bezüglich der quadratischen Polarfläche eines Punktes k, so liegt der Punkt k auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E' in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1).

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen E und E' ist der geometrische Ort der Pole derjenigen quadratischen

Polarflächen [bezüglich einer windschiefen Fläche 1)], zu denen die Ebenen E und E' conjugirt sind.

Demnach lassen sich folgende Sätze aufstellen:

Bestimmt man zu jedem Punkte der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E' die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so sind die Ebenen E und E' bezüglich jeder der quadratischen Polarflächen conjugirt, jede geht durch den Pol der andern.

Jedem Punkte f auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E' entspricht ein Punkt k auf der Ebene E und ein Punkt k' auf der Ebene E', und zwar ist k der Pol der Ebene E' und k' der Pol der Ebene E bezüglich der quadratischen Polarfläche $P_f q$.

28. Die beiden Ebenen E und E' mögen sich in der Geraden G schneiden. Einem Punkte k auf dieser Geraden entspricht, weil er auf der Ebene E liegt, ein bestimmter Punkt f auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E', ferner ein zweiter Punkt f' auf derselben Fläche, weil k auch auf der Ebene E' liegt. Da nun aber k der Ebene E' angehört, so befindet sich der Punkt f auch auf der gemeinen Polarfläche von E', und zwar wird dieselbe in diesem Punkte von der Polarebene des Punktes k bezüglich der Fundamentalfläche berührt. Entsprechend ist auch f' der Pol der Ebene E bezüglich der quadratischen Polarfläche $\underset{k}{P}q$ und muss, da k auch auf der Ebene E liegt, sich auf der gemeinen Polarfläche von E befinden, wo dieselbe von der Polarebene des Punktes k berührt wird.

Daraus folgt:

In der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E' befinden sich zwei Punktreihen, welche den Punkten der Schnittkante der Ebenen E und E' entsprechen, und zwar sind diese die Punkte, in welchen die beiden gemeinen Polarflächen der Ebenen E und E' von den Polarebenen, deren Enveloppe der Polarkegel der Geraden G ist, berührt werden.

29. Durch die Gerade G, in der die beiden Ebenen E und E' sich schneiden, möge eine dritte Ebene gelegt sein. Die Gleichung derselben sei

$$(a_1 + \lambda a'_1)\xi_1 + (a_2 + \lambda a'_2)\xi_2 + (a_3 + \lambda a'_3)\xi_3 + (a_4 + \lambda a'_4)\xi_4 = 0.$$

Durch den Werth der Grösse λ ist die Lage der Ebene bestimmt. Die gemeine Polarfläche dieser Ebene bezüglich einer windschiefen Fläche 1) entspricht nach 18) der Gleichung

$$\text{51a)}\quad \begin{aligned}(a_1 + \lambda a'_1)^2 x_1 x_3^2 - (a_2 + \lambda a'_2)^2 x_2 x_4^2 - 2(a_1 + \lambda a'_1)(a_4 + \lambda a'_4) x_3^2 x_4 \\ + 2(a_2 + \lambda a'_2)(a_3 + \lambda a'_3) x_3 x_4^2 = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{51 b)}\qquad & a_1^2 x_1 x_3^2 - a_2^2 x_2 x_4^2 - 2 a_1 a_4 x_3^2 x_4 + 2 a_2 a_3 x_3 x_4^2 \\
& + 2\lambda \{ a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3^2 x_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4^2 \} \\
& + \lambda^2 (a'^2_1 x_1 x_3^2 - a'_2 x_2 x_4^2 - 2 a'_1 a'_4 x_3^2 x_4 + 2 a'_2 a'_3 x_3 x_4^2) = 0.
\end{aligned}
$$

Betrachtet man λ als Variabele, so entspricht dieser Gleichung das System der gemeinen Polarflächen aller Ebenen, welche durch die Gerade G gehen. Durch Elimination von λ mit Hilfe der Gleichung

$$
\begin{aligned}
& 2 \{ a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3^2 x_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4^2 \} \\
& \quad + 2\lambda (a'^2_1 x_1 x_3^2 - a'^2_2 x_2 x_4^2 - 2 a'_1 a'_4 x_3^2 x_4 + 2 a'_2 a'_3 x_3 x_4^2) = 0
\end{aligned}
$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
& (a_1^2 x_1 x_3^2 - a_2^2 x_2 x_4^2 - 2 a_1 a_4 x_3^2 x_4 + 2 a_2 a_3 x_3 x_4^2) \\
\text{52)}\quad & \times (a'^2_1 x_1 x_3^2 - a'^2_2 x_2 x_4^2 - 2 a'_1 a'_4 x_3^2 x_4 + 2 a'_2 a'_3 x_3 x_4^2) \\
& = \{ a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3^2 x_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4^2 \}^2.
\end{aligned}
$$

Die Enveloppe der gemeinen Polarflächen aller Ebenen, welche sich in der Geraden G schneiden, ist demnach eine Fläche sechster Ordnung, und zwar geht dieselbe durch diejenigen Punkte, in denen sich die gemeine Polarfläche von E, die von E' und die gemischte Polarfläche von E und E' durchschneiden.

Die Schnittpunkte der gemeinen und der gemischten Polarfläche zweier beliebigen Ebenen, welche durch die Gerade G gehen, liegen auf der Fläche, welche der Gleichung 52) entspricht.

30. Die Ebene E sei fest, die Ebene E' dagegen bewege sich um die Gerade G, in der sie von einer Ebene E'', deren Gleichung

$$a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 = 0$$

sein möge, geschnitten wird. Das System der gemischten Polarflächen der Ebenen E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 1) entspricht dann der Gleichung

$$
\begin{aligned}
& a_1 (a'_1 + \lambda a''_1) x_1 x_3^2 - a_2 (a'_2 + \lambda a''_2) x_2 x_4^2 \\
\text{53 a)}\qquad & - \{ a_1 (a'_4 + \lambda a''_4) + a_4 (a'_1 + \lambda a''_1) \} x_3^2 x_4 \\
& + \{ a_2 (a'_3 + \lambda a''_3) + a_3 (a'_2 + \lambda a''_2) \} x_3 x_4^2 = 0
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
& a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3^2 x_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4^2 \\
\text{53 b)}\quad & + \lambda \{ a_1 a''_1 x_1 x_3^2 - a_2 a''_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a''_4 + a_4 a''_1) x_3^2 x_4 + (a_2 a''_3 + a_3 a''_2) x_3 x_4^2 \} \\
& = 0,
\end{aligned}
$$

worin λ jeden beliebigen Werth besitzen kann. Daraus folgt:

Bleibt die Ebene E fest, und bewegt sich die Ebene E' um die Gerade G, so bilden die gemischten Polarflächen der Ebenen E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ein Flächenbüschel, welches als Basis die Raumcurve besitzt, in der sich die gemischte Polarfläche von E und E' und die von E und E'' durchschneiden.

Durch Elimination von x_2 aus den Gleichungen der gemischten Polarfläche von E und E' und der von E und E'' erhält man

$$54)\quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ a_1(a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)x_1 x_3 + \{a_1(a'_2 a''_4 - a'_4 a''_2) - a_4(a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)\} x_3 x_4 \\ \qquad - a_2(a'_2 a''_3 - a'_3 a''_2) x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Die Projection der Basis des Flächenbüschels 53b) auf $x_2 = 0$ besteht demnach aus einer Geraden und einem Kegelschnitte.

31. Zu jedem Punkte der gemischten Polarfläche der Ebenen E und E' sei die quadratische Polarfläche bezüglich der zugehörigen windschiefen Fläche construirt. Das System der Hyperboloide entspricht dann der Gleichung

$$\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0,$$

in der die Verhältnisse $\frac{\xi_1}{\xi_4}, \frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$ der Relation

$$55)\quad a_1 a'_1 \xi_1 \xi_3^2 - a_2 a'_2 \xi_2 \xi_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1)\xi_3^2 \xi_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2)\xi_3 \xi_4^2 = 0$$

genügen müssen. Als Gleichung der Enveloppe dieses Systems findet man

$$x_3^4 x_4^4 = 0, \quad 2A\sqrt{B}x_1 \mp 2B\sqrt{A}x_2 \mp D\sqrt{A}x_3 + C\sqrt{B}x_4 = 0,$$

d. h.: **Das System der quadratischen Polarflächen, deren Pole auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen E und E' liegen, wird von zehn Ebenen eingehüllt, von denen vier mit der Ebene $x_3 = 0$, vier mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammenfallen.**

32. Für besondere Lagen der Ebenen E und E' kann die Gleichung 48b) eine einfachere Gestalt annehmen.

α) Setzt man $a_1 = 0$, so erhält man

$$56a)\quad x_4 = 0, \quad a_2 a'_2 x_2 x_4 + a_4 a'_1 x_3^2 - (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4 = 0.$$

Daraus folgt:

Geht die Ebene E durch den Schnittpunkt P der drei Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, so besteht die gemischte Polarfläche von E und E' bezüglich der Fläche $W_{d.e}$ aus der Ebene $x_4 = 0$ und einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Scheitel im Punkte P liegt.

Steht die Ebene E auf der Ebene $x_1 = 0$ lothrecht, so besteht die gemischte Polarfläche von E und E' bezüglich der Fläche $W_{d.\infty}$ aus der unendlich fernen Ebene und einem parabolischen Cylinder, dessen Generatrix der Kante $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ parallel läuft.

Da die Gleichungen 56a) unabhängig sind von a'_4, so werden die vorstehenden Resultate unverändert bleiben, wenn man E' alle Lagen ertheilt, welche den verschiedenen Werthen von a'_4 entsprechen.

β) Für $a_2 = 0$ geht die Gleichung 48b) über in

$$56b)\quad x_2 = 0, \quad a_1 a'_1 x_1 x_3 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3 x_4 + a_3 a'_2 x_4^2 = 0.$$

Steht demnach die Ebene E auf der Ebene $x_2=0$ lothrecht, so degenerirt die gemischte Polarfläche von E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 1) in die Ebene $x_3=0$ und einen hyperbolischen Cylinder.

Ertheilt man in diesem Falle der Ebene E' alle möglichen Lagen, welche den verschiedenen Werthen von a'_3 entsprechen, so bleibt die gemischte Polarfläche unverändert.

γ) Setzt man $a_1=0$, $a_2=0$, so ergiebt sich

56c) $$x_3=0, \quad x_4=0, \quad a_4 a'_1 x_3 - a_3 a'_2 x_4 = 0,$$

d. h.: Enthält die Ebene E die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in sich, so besteht die gemischte Polarfläche aus drei Ebenen, die sich in dieser Leitlinie schneiden.

δ) Ist $a_3=a_4=0$ und $a'_3=a'_4=0$, so nimmt die Gleichung 48b) die Gestalt an

56d) $$a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt:

Schneiden sich die beiden Ebenen E und E' in der einfachen Leitlinie einer windschiefen Fläche 1), so ist die gemischte Polarfläche derselben ebenfalls eine windschiefe Fläche, deren doppelte Leitlinie mit $x_3=0$, $x_4=0$, und deren einfache Leitlinie mit $x_1=0$, $x_2=0$ zusammenfällt, deren singuläre Erzeugende aber in den Kanten $x_2=0$, $x_3=0$ und $x_1=0$, $x_4=0$ liegen.

(Schluss folgt.)

XVI.

Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale.

Von

G. Erdmann,

Gymnasiallehrer in Königsberg.

Hierzu Taf. VI, Fig. 1—12.

Einleitung.

Der Zweck meiner Untersuchung ist erstens, gewisse, meines Wissens bisher noch nicht behandelte Ausnahmefälle in Betracht zu ziehen, die bei der Untersuchung der zweiten Variation eintreten können; zweitens, die Kriterien des Maximums und Minimums für Integrale mit variablen Grenzen festzustellen.

Was den zweiten Punkt betrifft, so giebt Herr Professor Mayer* an, man könne bei nicht constanten Grenzwerthen die Aufgabe so lösen, dass man zunächst die Grenzwerthe als gegeben ansieht, den Maximal- oder Minimalwerth des Integrals als Function der Grenzwerthe bestimmt und von dieser Function das Maximum oder Minimum in Bezug auf die Grenzwerthe sucht. Indessen dürfte es doch immerhin zweckmässig sein, für diese Aufgabe feststehende Formeln abzuleiten, und ausserdem ist die von Herrn Mayer angegebene Methode meiner Ansicht nach auch nicht unbedingt genau. Hat man nämlich eine begrenzte Curve gefunden, welche y als Function von x so ausdrückt, dass ein gegebenes Integral mit variablen Grenzwerthen jenen Kriterien zufolge ein Minimum werden müsste, wenn man es zwischen den Endpunkten der Curve nimmt und für y seinen Werth in x einsetzt, so ist damit nur Folgendes bewiesen: Der Werth des Integrals muss zunehmen, wenn man die Grenzpunkte unverändert lässt und die sie verbindende Curve ändert; er muss ferner zunehmen, wenn man die Grenzpunkte ändert und sie mit einer

* *Crelle's* Journal Bd. 69.

Curve verbindet, die den Differentialgleichungen des Problems ebenfalls genügt. Wenn man aber die Curve so ändert, dass sie aufhört, dieser Differentialgleichung zu genügen, und zugleich auch andere Endpunkte erhält, so bliebe die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass das Integral abnähme, dass somit kein wirkliches Minimum stattfände.

---

§ 1.

Umformung der zweiten Variation.

Setze ich y' für $\frac{dy}{dx}$ und

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx,$$

so habe ich, wenn ich

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m\, \partial y'^n} \varphi(x, y, y') = a_{mn},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (a_{10} + a_{01})\, dx = J,$$

$$\varphi(x_1, y_1, y'_1)\, \delta x_1 - \varphi(x_0, y_0, y'_0)\, \delta x_0 = K$$

setze, folgende Gleichungen:

1) $$\delta V = J + K,$$

2) $$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [a_{20}\, \delta y^2 + 2 a_{11}\, \delta y\, \delta y' + a_{02}\, \delta y'^2 + a_{10}\, \delta^2 y + a_{01}\, \delta^2 y']\, dx + |a_{10}\, \delta x\, \delta y + a_{01}\, \delta x\, \delta y'|_0^1,$$

wobei in dem zwischen den Strichen stehenden Ausdruck erst $x = x_1$ und dann $x = x_0$ zu setzen und darauf das Resultat der letzteren Substitution von dem der ersteren abzuziehen ist. — Wenn ich δK bilde, so muss ich die vollständigen Variationen $[\delta y]$ und $[\delta y']$ in Anwendung bringen; ich habe demnach

$$\delta K = |a_{10}\, \delta x\, [\delta y] + a_{01}\, \delta x\, [\delta y'] + \varphi'(x)\, \delta x^2 + \varphi(x, y, y')\, \delta^2 x|_0^1,$$

oder, wenn ich $[\delta y] = \delta y + y'\, \delta x$ und $[\delta y'] = \delta y' + y''\, \delta x$ setze,

3) $$\delta K = \left| a_{10}\, \delta x\, \delta y + a_{01}\, \delta x\, \delta y' + \frac{d}{dx} \varphi(x, y, y')\, \delta x^2 + \varphi(x, y, y')\, \delta^2 x \right|_0^1.$$

Setze ich jetzt noch

4) $$\Omega = a_{20}\, \delta y^2 + 2 a_{11}\, \delta y\, \delta y' + a_{02}\, \delta y'^2,$$

so erhalte ich vermöge der [illegible] und 3) folgenden Ausdruck für die zweite Vari[illegible]

$$5)\quad \begin{cases} \delta^2 V = \delta J + \delta K \\ \quad = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Omega\, dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{10} - a'_{01}]\, \delta^2 y\, dx \\ \quad + \Big| a_{01}\, \delta^2 y + 2 a_{10}\, \delta x\, \delta y + 2 a_{01}\, \delta x\, \delta y' + \frac{d}{dx}\varphi(x,y,y')\, \delta x^2 \\ \qquad\qquad + \varphi(x,y,y')\, \delta^2 x \Big|_0^1 . \end{cases}$$

Soll die erste Variation von V verschwinden, so muss bekanntlich die Differentialgleichung

$$a_{10} - a'_{01} = 0$$

erfüllt werden. Das zweite Integral in unserem Ausdrucke für $\delta^2 V$ verschwindet also. — Wenn ich dieselbe Bezeichnungsweise, wie in einer früheren Abhandlung von mir* anwende, so erhalte ich die Gleichung

$$6)\qquad (a_{20} - a'_{01})\, u - a'_{02} u' - a_{02} u'' = 0,$$

mit Hilfe welcher sich das erste Integral in 5) in folgender Weise umformen lässt:

$$7)\qquad \int\limits_{x_0}^{x_1} \Omega\, dx = \varepsilon^2 \int\limits_{x_0}^{x_1} a_{02}\, g'^2 u^2\, dx + \Big|\Big[a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'}{u}\Big]\, \delta y^2 \Big|_0^1,$$

welche Transformation jedoch nur giltig ist, wenn u zwischen den Grenzen x_0 und x_1 weder verschwindet, noch unendlich wird. Daher folgt aus 5) und 7)

$$8)\qquad \begin{aligned} \delta^2 V = \varepsilon^2 \int\limits_{x_0}^{x_1} a_{02}\, g'^2 u^2\, dx + \Big|\Big[a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'}{u}\Big]\, \delta y^2 + 2 a_{10}\, \delta x\, \delta y + 2 a_{01}\, \delta x\, \delta y' \\ + \frac{d}{dx}\varphi(x,y,y')\, \delta x^2 + a_{01}\, \delta^2 y + \varphi(x,y,y')\, \delta^2 x \Big|_0^1 . \end{aligned}$$

Wir können die Formel 8) umformen, wenn wir die partialen Variationen δy und $\delta^2 y$ durch die totalen $[\delta y]$ und $[\delta^2 y]$ ersetzen. Die übliche Metaphysik der Variationsrechnung sieht bekanntlich y als Function von x und einem Parameter α an und definirt die partiale Variation von y als den Zuwachs, den y erhält, wenn nur α variirt, die totale als den Zuwachs von y, wenn α und x sich ändern. Demnach hat man

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, \delta \alpha,$$

$$\delta^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\, \delta \alpha^2,$$

$$[\delta y] = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, \delta \alpha + \frac{\partial y}{\partial x}\, \delta x,$$

---

* *Diese Zeitschrift* XXII, 5.

$$[\delta^2 y] = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\delta\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial x}\delta\alpha\,\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial y}{\partial x}\delta^2 x,$$

folglich

$$\delta y = [\delta y] - y'\delta x,$$
$$\delta^2 y = [\delta^2 y] - 2\delta x\,\delta y' - y''\delta x^2 - y'\delta^2 x.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalte ich aus 8)

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2\,dx + \left|\left[a_{11} + a_{02}\cdot\frac{u'}{u}\right][\delta y]^2\right|_0^1 \\ + 2\left|\left[a_{10} - a_{11}y' - a_{02}y'\cdot\frac{u'}{u}\right]\delta x\,[\delta y]\right|_0^1 \\ + \left|\left[\varphi'(x) - a_{10}y' + a_{11}y'^2 + a_{02}y'^2\cdot\frac{u'}{u}\right]\delta x^2\right|_0^1 \\ + |a_{01}[\delta^2 y]|_0^1 + |[\varphi(x,y,y') - a_{01}y']\,\delta^2 x|_0^1. \end{aligned} \right.$$

§ 2.

Die Grenzwerthe sind gegeben.

Sind x_0 und x_1, sowie die Grenzwerthe von y, y_0 und y_1, gegeben, so verschwinden ihre Variationen und somit alle in 8) und 9) ausserhalb des Integralzeichens stehenden Glieder. Es wird daher ein Maximum oder Minimum stattfinden, wenn das Integral $\int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2\,dx$ für alle möglichen Werthe von g dasselbe Zeichen hat. Die Willkürlichkeit der Function g wird nur durch die Bedingungen $\delta y_0 = 0$ und $\delta y_1 = 0$ beschränkt. Unsere ganze Transformation beruht indessen auf der Voraussetzung, dass $u = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2$ zwischen x_0 und x_1 weder verschwindet, noch unendlich wird. Nehme ich zunächst den Fall an, dass weder r_1, noch r_2 unendlich wird, so kann auch u nicht unendlich werden, und es ist nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass u zwischen x_0 und x_1 nirgends verschwindet. Ich bestimme nun γ_1 und γ_2 so, dass u für $x = x_0$ verschwindet (da $\delta y_0 = 0$, ist dies gestattet). Wenn nun der Ausdruck $\frac{r_2}{r_1}$ weder an einem Punkte zwischen den Integrationsgrenzen, noch für $x = x_1$ denselben Werth annimmt, wie für $x = x_0$, so verschwindet u für keinen andern Werth von x, als für $x = x_0$. In diesem Falle wäre also unsere Transformation giltig und Gleichung 9) ginge über in

$$\delta^2 V = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2\,dx.$$

Wenn nun ausserdem a_{02} auf dem Integrationswege sein Zeichen nicht wechselt, so hat $\delta^2 V$ für jeden beliebigen Werth von g dasselbe Zeichen,

wie a_{02}. Ich will hier, wie in allen folgenden Fällen annehmen, dass a_{02} positiv ist. Demnach wäre auch $\delta^2 V > 0$ und könnte nur dann verschwinden, wenn g' identisch Null, d. h. wenn g eine Constante wäre; da aber δy und somit auch g für $x = x_1$ verschwinden muss, so kann g keine andere Constante, als Null sein, woraus folgt, dass δy identisch Null sein müsste. Für einen andern Werth von δy kann $\delta^2 V$ nicht verschwinden, es findet daher ein Minimum statt.

Unsere Transformation ist auch noch giltig, wenn u zwar für keinen Punkt zwischen x_0 und x_1, aber für $x = x_1$ verschwindet. In diesem Falle kann jedoch g gleich einer von 0 verschiedenen Constanten angenommen werden, da die Bedingung $\delta y_1 = 0$ dann auf jeden Fall erfüllt wird; $\delta^2 V$ kann also zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass δy identisch $= 0$ ist, und es wird im Allgemeinen kein Minimum stattfinden.

Wenn das Integral sich noch weiter erstreckt, als über den Punkt, in welchem u verschwindet, so bietet nach Hesse* das Princip der Continuität wenigstens eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Variation auch ihr Zeichen wechseln könne. Es lässt sich dies indess auch genauer beweisen, wie später gezeigt werden soll.

Ich setze jetzt noch

$$u^1 = \gamma_1{}^1 r_1 + \gamma_2{}^1 r_2,$$

wo $\gamma_1{}^1$ und $\gamma_2{}^1$ zwei beliebige neue Constanten sind, und werde dann den Ausdruck $\frac{u^1}{u}$ näher untersuchen. Ich bezeichne ihn zu diesem Zwecke mit p. Da Gleichung 6) auch gelten muss, wenn ich für u einsetze u^1 oder pu, so ergiebt sich aus derselben

$$10)\qquad a'_{02} u \frac{dp}{dx} + 2 a_{02} u' \frac{dp}{dx} + a_{02} u \frac{d^2 p}{dx^2} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{A}{a_{02} u^2},$$

wo A eine Constante bezeichnet.

Da a_{02} nach unserer Annahme stets > 0 ist, so folgt aus 10), dass auch $\frac{dp}{dx}$ stets dasselbe Zeichen behalten muss. Setze ich $\gamma_2 = \gamma_1{}^1 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2{}^1 = 1$, so sehe ich, dass dasselbe auch von $\frac{d}{dx}\frac{r_2}{r_1}$ gilt. Ich bezeichne $\frac{r_2}{r_1}$ mit q und nehme an, $\frac{dq}{dx}$ sei stets grösser als 0, da, wenn dieser Ausdruck stets < 0 ist, ganz die entsprechenden Betrachtungen gelten. Es wird dann q stets zunehmen und denselben Werth, wie für $x = x_0$ zum zweiten Mal nur dann erhalten können, wenn es, bis ins Unendliche gewachsen, in das negativ Unendliche umschlägt und dann wieder zunimmt. Wenn dann q für $x = x'$ wieder denselben Werth annimmt, wie für $x = x_0$, so darf nach den Auseinandersetzungen dieses

* Crelle's Journal Bd. 54.

Paragraphen die obere Grenze des Integrals nicht weiter, als bis x' ausgedehnt werden, wenn ein Minimum stattfinden soll.

Im Vorstehenden ist nämlich bewiesen, dass die zweite Variation nur >0 sein kann, wenn $x_1 < x'$, dass sie dagegen auch verschwinden kann, wenn $x_1 = x'$. Wenn nun $x_1 > x'$, so kann $\delta^2 V$ auch <0 werden, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Nimmt q für $x = x'$ zum zweiten, für $x = x''$ zum dritten Male den Werth q_0 an, so möge x_1 zwischen x' und x'' liegen. Kann ich nämlich für diesen Fall beweisen, dass kein Minimum stattfindet, so wird ein solches um so weniger vorhanden sein, wenn x_1 grösser als x'' ist. Die in u und u^1 enthaltenen Constanten bestimme ich so, dass u, wie früher, für $x = x_0$ und u^1 für $x = x_1$ verschwindet. Dann wird q zwischen x' und x_1 nirgends denselben Werth annehmen, wie für $x = x_1$, wohl aber wird es zwischen x_0 und x' einen und nur einen Werth x'_1 geben, für den q denselben Werth erhält, wie für $x = x_1$. Dem entsprechend wird auch u^1 für x'_1 und x_1, aber für keinen dazwischen liegenden Werth verschwinden, folglich auch sein Zeichen zwischen diesen Grenzen nicht wechseln, ebenso wenig wie u zwischen den Grenzen x_0 und x'. Ist nun (x) ein beliebiger Werth zwischen x'_1 und x', so kann ich mir die Constanten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^1, \gamma_2^1$ so bestimmt denken, dass u und u^1 für $x = (x)$ denselben und zwar positiven Werth haben; dann wird auch u zwischen x_0 und (x), sowie u^1 zwischen (x) und x_1 stets >0 sein. Jetzt ertheile ich der Variation von y zwischen x_0 und (x) den Werth εu, zwischen (x) und x_1 den Werth εu^1, wo ε eine unendlich kleine Constante ist. Dann haben wir, entsprechend der Formel 8), in welcher δx und $\delta^2 x = 0$, $g = 1$, also $g' = 0$ zu setzen ist:

$$11)\quad \delta^2 \int_{x_0}^{(x)} \varphi(x, y, y')\, dx = \left| \left[a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'}{u} \right] \delta y^2 + a_{01}\, \delta^2 y \right|_{x=(x)},$$

$$12)\quad \delta^2 \int_{(x)}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx = - \left| \left[a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u^{1\prime}}{u^1} \right] \delta y^2 + a_{01}\, \delta^2 y \right|_{x=(x)},$$

folglich

$$13)\quad \delta^2 \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx = \left| \frac{u' u^1 - u u^{1\prime}}{u u^1}\, a_{02}\, \delta y^2 \right|_{x=(x)} = \left| \frac{u^1}{u}\, a_{02}\, \delta y^2 \frac{d}{dx} \frac{u}{u_1} \right|_{x=(x)}.$$

Nach 10) ist das Zeichen von $\frac{d}{dx}\frac{u}{u^1}$ ein constantes. Da u für $x = x'$ verschwindet, für die nächst kleineren Werthe von x aber ebenso wie u^1 positiv ist, so folgt, dass $\frac{d}{dx}\frac{u}{u^1}$ für $x = x'$ negativ ist; dieser Diffe-

rentialquotient muss also auch für $x=(x)$ negativ sein; da ferner $u^1=u$, so sehen wir, dass $\delta^2 V$ für die angenommenen Werthe von δy negativ wird, dass also auf keinen Fall ein Minimum existiren kann.

§ 3.

Betrachtung eines Ausnahmefalles.

Es ist jetzt noch der Fall zu betrachten, dass eine der Grössen r_1 und r_2 zwischen x_0 und x_1 unendlich wird, für welchen Fall unsere Schlussweise ungiltig ist, wie Herr Professor Mayer* in einer allgemeineren Untersuchung bemerkt hat. Es werde r_1 für $x=(x)$ unendlich, dann ist zunächst möglich, dass r_2 zwischen x_0 und x_1 weder verschwindet, noch unendlich wird. Dann kann ich $u=\gamma_2 r_2$ setzen, wobei die Transformation 8) giltig bleibt; es wird also ein Minimum stattfinden, wenn nur a_{02} positiv bleibt. Verschwindet dagegen r_2 für einen Werth zwischen x_0 und (x), den ich mit ξ bezeichnen will, so wird der Ausdruck $q=\frac{r_2}{r_1}$ an dieser Stelle 0, und wenn sich x der Grenze (x) nähert, so nähert q sich wiederum der Grenze 0, da sein Nenner ∞ wird. Wenn wir voraussetzen, dass a_{02} stets positiv bleibt, so behält der Differentialquotient von q stets dasselbe Zeichen, q muss also zwischen ξ und (x) durch ∞ hindurchgegangen sein. Nehmen wir, wie früher, an, dass q stets zunimmt, so wird für einen Werth (ξ), der zwischen x_0 und ξ, und zwar sehr nahe an ξ liegt, q etwas kleiner als 0 sein; da aber q aus dem negativ Unendlichen bis 0 zunimmt, wenn x sich der Grenze (x) nähert, so muss es einen Werth ξ' zwischen x_0 und (x) geben, für welchen q denselben Werth annimmt, wie für $x=(\xi)$. Da zwischen (ξ) und ξ' die Differentialquotienten von y nach c_1 und c_2 nicht ∞ werden, so gelten für ein von (ξ) bis ξ' ausgedehntes Integral unsere früheren Betrachtungen, d. h.: die zweite Variation dieses Integrals kann zum Verschwinden gebracht werden, und es wird auf keinen Fall ein Minimum stattfinden, wenn das Integral noch weiter ausgedehnt wird; das Integral $\int_{x_1}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx$ wird also in dem betrachteten Falle kein Minimum haben.

Ganz das Entsprechende gilt, wenn r_2 an einer Stelle zwischen (x) und x_1 verschwindet. Nur der Fall, dass r_2 an derselben Stelle verschwindet, an welcher r_1 unendlich wird, sowie der, dass jeder der beiden Differentialquotienten an einer Stelle zwischen x_0 und x_1 unendlich wird, entzieht sich noch unseren Betrachtungen.

* Crelle's Journal Bd. 69.

Es ist bemerkenswerth, dass die von Hesse angegebene Bedingung für das Stattfinden eines Minimums nicht giltig ist, wenn r_1 an einer Stelle ∞ wird. Wir sehen dies an dem Beispiele

$$V=\int_{x_0}^{x_1} y'^2 \cos^2 x \, dx.$$

Dasselbe führt auf die Differentialgleichung

$$y' \cos^2 x = c_1,$$

welche ergiebt

$$y = c_1 \, tg\, x + c_2,$$

und hieraus folgt $q = \cot x$; nach der Hesse'schen Regel würde also ein Minimum nicht mehr stattfinden, wenn x_0 und x_1 um mehr als π von einander verschieden wären. Aber $r_1 = tg\, x$ wird in einem solchen Falle zwischen den Integrationsgrenzen unendlich; und da $r_2 = 1$ nie verschwinden kann, so muss nach den eben entwickelten Regeln stets ein Minimum stattfinden.

Der einzige Fall, der hier in Betracht kommen kann, ist der, dass die Grenzwerthe von y, y_0 und y_1, einander gleich sind, weil nur dann $c_1 = 0$ zu setzen ist; denn in jedem andern Falle würde y zwischen den Integrationsgrenzen unendlich werden und wir würden keine zusammenhängende Curve erhalten. In diesem Falle aber ist $y = c_2$, $y' = 0$, und somit wird das Integral $V = 0$, was in der That der kleinste Werth, den es erhalten kann, also immer ein Minimum ist, abweichend von der Hesse'schen Regel.

§ 4.

Die oberen Grenzen sind variabel.

Es soll im Folgenden immer angenommen werden, dass r_1 und r_2 endlich bleiben. — Sind die Grenzwerthe nicht gegeben, so müssen dieselben Bedingungen, die bei gegebenen Grenzwerthen stattfinden, natürlich auch erfüllt werden, d. h. es muss $a_{02} > 0$ sein und es darf der Ausdruck q weder für einen Werth von x zwischen x_0 und x_1, noch für $x = x_1$ denselben Werth annehmen, wie für $x = x_0$. Setzen wir diese Bedingungen als erfüllt voraus und nehmen wir x_0 und y_0 als fest, x_1 und y_1 dagegen als variabel an, so ist die Transformation des § 1 giltig und das Integral des Ausdrucks 8) oder 9) kann nicht negativ werden; wohl aber kann das Integral zum Verschwinden gebracht werden, wenn q gleich einer beliebigen Constanten gesetzt wird, denn die Bedingung $\delta y_1 = 0$ findet hier nicht statt. Ob somit ein Minimum stattfindet, wird davon abhängen, ob der ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck für alle zulässigen Werthe von δy_1 und δx_1 grösser als 0 ist. Ist keine Bedingung [illegible]n x_1 und y_1 vorhanden, so müssen,

damit die erste Variation verschwinde, die Ausdrücke a_{01} und $\varphi(x, y, y')$ für $x = x_1$ verschwinden. Der in 8) ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck geht somit über in

$$14)\qquad \left[a_{11} + a_{02}.\frac{u'_1}{u_1}\right] \delta y_1^2 + 2 a_{10}\, \delta x_1\, \delta y_1 + \frac{d}{dx}\, \varphi(x, y, y')\, \delta x_1^2,$$

wobei in den Ausdrücken a_{11}, a_{02} u. s. w. $x = x_1$ zu setzen ist. Der Ausdruck 14) muss, wenn ein Minimum stattfinden soll, eine positive quadratische Form in Bezug auf δx_1 und δy_1 sein. Die in u vorkommenden Constanten γ_1 und γ_2 sind, wie früher, so zu bestimmen, dass u für $x = x_0$ verschwindet.

Ist x_1 gegeben, y_1 aber nicht, so ist leicht zu sehen, dass die gesuchten Kriterien durch das Zeichen des Ausdrucks

$$15)\qquad a_{11} + a_{02}.\frac{u'_1}{u_1}$$

gegeben werden.

Wären die oberen Grenzwerthe fest und die unteren gegeben, so ist offenbar in dem Ausdrucke 14) x_0 und y_0 an die Stelle von x_1 und y_1 zu setzen und das Vorzeichen des Ausdrucks umzukehren.

§ 5.

Beispiel für die Regeln des vorigen Paragraphen.

Ein geometrisches Beispiel ist folgendes. Es sei eine Curve gegeben und ein Punkt auf derselben; an dem Punkte ist der eine Endpunkt eines Fadens von gegebener Länge befestigt, während der andere Endpunkt sich auf der Curve bewegen kann; der Faden soll so gelegt werden, dass der Flächenraum, den er mit der gegebenen Curve einschliesst, ein Maximum wird.

Die Länge des Fadens sei l; ich betrachte den Bogen s als unabhängige und den von dem gegebenen Punkte ausgehenden Radius vector r als abhängige Variable und setze $\frac{dr}{ds} = r'$; ferner sei $f(r)$ der Inhalt der zwischen dem Radius vector und der gegebenen Curve liegenden Fläche, so habe ich das Maximum zu suchen von

$$16)\qquad V = \int_0^l \varphi(s, r, r')\, ds,$$

wo

$$17)\qquad \varphi(s, r, r') = r\sqrt{1 - r'^2} + 2f'(r).r'.$$

Dies Problem führt auf die Differentialgleichung

$$18)\qquad r = c_1\sqrt{1 - r'^2},$$

welche integrirt giebt

19) $$r = c_1 \sin \frac{s - c_2}{c_1}.$$

Es ist dies die Gleichung eines Kreises, dessen Durchmesser gleich c_1 ist. Die Grenzgleichung ist, da der Grenzwerth der unabhängigen Variablen gegeben und der der abhängigen veränderlich ist,

20) $$2f'(r_1) - \frac{r_1 r'_1}{\sqrt{1 - r'^2_1}} = 0,$$

und mit Berücksichtigung von 19)

21) $$2f'(r_1) = c_1 \cos \frac{s_1 - c_2}{c_1} = c_1 \cos \frac{l}{c_1}.$$

Wenn r und φ die Polarcoordinaten der gegebenen Curve bezeichnen, so muss ich haben

$$f(r) = \tfrac{1}{2} \int r^2 \, \delta \varphi$$

und somit

22) $$f'(r) = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\delta \varphi}{\delta r}.$$

Ist (Fig. 1) A der feste Endpunkt und Q der variable, ziehe ich in Q eine Tangente an die gegebene Curve und errichte in A auf AQ eine Senkrechte, die die Tangente in F schneide, so ist $AQ = r_1$, $AF = r_1^2 \frac{\delta \varphi}{\delta r}$. — Ist ferner M der Mittelpunkt des Kreises und bezeichne ich den Winkel AMQ mit 2χ, so ist $\frac{l}{c_1} = \chi$, und aus den Gleichungen 21) und 22) ergiebt sich

$$AF = c_1 \cos \chi = 2 MQ \cos \chi.$$

Daraus aber folgt, dass M in der Linie QF liegt, d. h. der Kreisbogen AQ muss die gegebene Curve senkrecht schneiden.

Um die zweite Variation zu untersuchen, beachten wir, dass

$$a_{02} = - \frac{r}{\sqrt{(1 - r'^2)^3}}$$

stets negativ ist.

Wir haben ferner

23) $$\frac{\partial r}{\partial c_1} = \sin \frac{s - c_2}{c_1} - \frac{s - c_2}{c_1} \cos \frac{s - c_2}{c_1},$$

24) $$\frac{\partial r}{\partial c_2} = - \cos \frac{s - c_2}{c_1},$$

25) $$\frac{\partial r}{\partial c_1} : \frac{\partial r}{\partial c_2} = \frac{s - c_2}{c_1} - tg \frac{s - c_2}{c_1}.$$

$\frac{s - c_2}{c_1}$ ist für den Anfangspunkt gleich 0; der Ausdruck $\frac{s - c_2}{c_1} - tg \frac{s - c_2}{c_1}$ darf also an keinem andern Punkte verschwinden, was auch nie geschieht, da $\frac{s - c_2}{c_1}$ kleiner als π bleibt. Ich habe ferner für die obere Grenze

26) $$a_{11} = -\cot\chi + 2f''(r_1, r_1),$$

27) $$a_{02} = -\frac{c_1}{\sin^2\chi}.$$

$$u = \sin\frac{s-c_2}{c_1} - \frac{s-c_2}{c_1}\cos\frac{s-c_2}{c_1},$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{s-c_2}{c_1^2}\sin\frac{s-c_2}{c_1} : \sin\frac{s-c_2}{c_1} - \frac{s-c_2}{c_1}\cos\frac{s-c_2}{c_1},$$

28) $$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{\chi\, tg\chi}{c_1(tg\chi - \chi)}.$$

Der Ausdruck 15) wird somit für unsern Fall

29) $$a_{11} + a_{02}\cdot\frac{u'_1}{u_1} = -\cot\chi + 2f''(r_1, r_1) - \frac{\chi}{\sin^2\chi - \chi\sin\chi\cos\chi}.$$

Nun folgt durch Differentiation der Gleichung 22)

$$2f''(r, r) = 2r\frac{\delta\varphi}{\delta r} + r^2\frac{\delta^2\varphi}{\delta r^2}$$

oder, wenn wir $\frac{\delta r}{\delta\varphi}$, abweichend von der früheren Bezeichnungsweise, mit r', $\frac{\delta^2 r}{\delta\varphi^2}$ mit r'' bezeichnen,

30) $$2f''(r, r) = \frac{2r}{r'} - \frac{r^2 r''}{r'^3}.$$

Nun ist, wenn ϱ der Krümmungsradius der gegebenen Curve ist,

$$\varrho = \frac{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \quad \frac{r}{r'} = \cot\chi.$$

Dadurch geht 30) über in

$$2f''(r_1, r_1) = -\cot^3\chi + \frac{r}{\varrho\sin^3\chi},$$

und gemäss 29) wird die Bedingung für das Stattfinden eines Maximums

31) $$\frac{r}{\varrho} < \frac{\sin 2\chi - 2\chi\cos 2\chi}{2(\sin\chi - \chi\cos\chi)}.$$

Der Krümmungsradius QC, welcher den vom Faden gebildeten Kreisbogen berührt, ist hierbei als negativ anzusehen, wenn er die Fortsetzung des Fadens bildet (Fig. 2), und als positiv, wenn er die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 3).

Nehmen wir zunächst den Fall an, dass die gegebene Curve aus zwei sich schneidenden geraden Linien AT und TQ besteht (Fig. 4), so ist $\varrho = \infty$ und es wird darauf ankommen, ob der in 31) rechts stehende usdruck positiv oder negativ ist. Da χ nicht grösser als π sein kann, sonst der Faden mehr als einen Umkreis vollenden müsste, so bleibt Nenner der rechten Seite von 31) stets positiv; der Zähler ist gleich- positiv, so lange $2\chi < 257^\circ 27' 12''$ ist, dagegen negativ, sobald 2χ im ersten Falle wird also ein Maximum stattfinden.

In dem allgemeinen Falle, wenn eine beliebige Curve gegeben ist, lässt die Ungleichung 31) gleichfalls eine geometrische Deutung zu. Trägt man nämlich (Fig. 5 u. 6) auf der in Q errichteten Normale der gegebenen Curve die Länge des Fadens in positiver Richtung ab, so dass QS gleich dem Bogen QA ist, und beschreibt einen Kreis, der durch S geht und den Kreis des Fadens in A senkrecht schneidet, und ist R der zweite Treffpunkt dieses Kreises mit der Normale, so ist

$$32) \qquad QR = \pm \frac{2r(\sin\chi - \chi\cos\chi)}{\sin 2\chi - 2\chi\cos 2\chi},$$

je nachdem 2χ kleiner oder grösser als $257^0\,27'\,12''$ ist. Bezeichne ich nämlich im ersteren Falle den Treffpunkt von der in A auf AM errichteten Senkrechten und der durch R zu AM gezogenen Parallelen mit D und fälle von R auf AQ die Senkrechte RB, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und AQS die Proportion

$$r : r\cos\chi - QR.\cos 2\chi = l : r - QR.\cos\chi,$$

aus der sich die Gleichung 32) ergiebt.

Das Entsprechende lässt sich für den Fall $2\chi > 257^0\,27'\,12''$ nachweisen.

Die Bedingung 31) zeigt daher, dass im ersten Falle der Krümmungsmittelpunkt nicht zwischen Q und R fallen darf, im zweiten Falle dagegen zwischen Q und R fallen muss, wenn ein Maximum stattfinden soll.

§ 6.

Es sind zwischen x_1 und y_1 Bedingungsgleichungen gegeben.

Sind, wie im § 4, x_0 und y_0 fest, x_1 und y_1 dagegen variabel, aber von einer Bedingungsgleichung abhängig, so ist das Vorzeichen des in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehenden Ausdrucks zu untersuchen. Da man bei zwei von einander abhängigen Variablen die erste Variation der einen als constant, also ihre zweite Variation als verschwindend ansehen kann, so kann ich $\delta^2 x = 0$ setzen und erhalte somit folgende Bedingung für das Stattfinden eines Minimums:

$$33) \left\{ \begin{aligned} &\left[a_{11} + a_{02}.\frac{u'_1}{u_1}\right][\delta y_1]^2 + 2\left[a_{10} - a_{11}y'_1 - a_{02}y'_1.\frac{u'_1}{u_1}\right]\delta x_1\,[\delta y_1] \\ &+\left[\varphi'(x_1) - a_{10}y'_1 + a_{11}y'^2_1 + a_{02}y'^2_1.\frac{u'_1}{u_1}\right]\delta x_1^2 + a_{01}[\delta^2 y_1] > 0, \end{aligned}\right.$$

wobei $x = x_1$ zu setzen ist.

Das einfachste Beispiel, das hierfür angeführt werden kann, ist, von einem gegebenen Punkte an eine gegebene Curve die kürzeste Linie zu ziehen.

Wir haben hier

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Dies führt auf

$$y = c_1 x + c_2.$$

Ich will in diesem Beispiel die vollständigen Variationen einfach mit δy_1, $\delta^2 y_1$ bezeichnen, da die partialen gar nicht vorkommen. Dann habe ich für die Grenzwerthe die Gleichung

$$\varphi'(y'_1)\,\delta y_1 + [\varphi(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 \varphi'(y'_1)]\,\delta x_1 = 0,$$

$$\frac{y'_1}{\sqrt{1+y'^2_1}}\,\delta y_1 + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_1}}\,\delta x_1 = 0,$$

34) $$y'_1 = -\frac{\delta x_1}{\delta y_1},$$

woraus sich der bekannte Satz ergiebt, dass die Linie eine Normale der Curve sein muss.

Um zu untersuchen, wann ein wirkliches Minimum stattfindet, bilde ich mir den Ausdruck 33). Da $\frac{\partial y}{\partial c_1} = x$, $\frac{\partial y}{\partial c_2} = 1$, also $u = x - x_0$ ist, so erhalte ich mit Berücksichtigung von 34)

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\cdot\frac{\delta y_1^5}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}} - \frac{\delta x_1\,\delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} + \frac{1}{x_1 - x_0}\cdot\frac{\delta x_1^2\,\delta y_1^3}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}}$$
$$+ \frac{1}{x_1 - x_0}\cdot\frac{\delta x_1^4\,\delta y_1}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}} > 0$$

oder

35) $$\frac{\delta y_1}{x_1 - x_0}\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2} - \frac{\delta x_1\,\delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} > 0.$$

Da $\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}}{\delta y_1}$ positiv zu nehmen ist, so muss $\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}$ dasselbe Zeichen wie δy_1 haben. Der Ausdruck 35) giebt mir daher die Bedingung

36) $$\frac{1}{x_1 - x_0} > \frac{\delta x_1\,\delta^2 y_1}{\delta y_1 (\delta x_1^2 + \delta y_1^2)},$$

woraus sich ergiebt, dass ein Minimum jedenfalls dann stattfindet, wenn die Curve convex gegen den gegebenen Punkt ist; ist sie concav, so ist ein Minimum nur in dem Falle vorhanden, wenn der gegebene Punkt zwischen der Curve und ihrem Krümmungsmittelpunkte liegt, wie sich dieses Resultat auch mittelst der elementaren Theorie der Maxima und Minima finden lässt [Herr Prof. Dienger behandelt in seinem „Grundriss der Variationsrechnung" dies Problem und kommt zu einem Ausdruck, der dasselbe besagt, wie 36); doch giebt er die geometrische Bedeutung seines Resultats nicht an].

§ 7.

Sowohl die oberen, als die unteren Grenzen sind variabel.

Der Ausdruck 8) oder 9) muss für alle Werthe, welche die δy, δx annehm[illegible]en, positiv sein. Ich denke mir jetzt irgend zwei Werthe

von δy_0 und δy_1. Die Constanten γ_1 und γ_2 kann ich beliebig bestimmen. Der Ausdruck 9) muss positiv bleiben für alle Werthe von g, bei welchen $g_0 u_0 = \delta y_0$ und $g_1 u_1 = \delta y_1$ ist. Werden die Bedingungen des § 2 erfüllt, so bleibt das Integral in 9) für alle Werthe von g positiv. Wenn nun auch der ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck positiv ist, so wird $\delta^2 V$ sein Zeichen nicht wechseln können; diese Bedingung wird eine nothwendige dann sein, wenn g so bestimmt werden kann, dass das Integral verschwindet. Ich werde somit die Constanten γ_1 und γ_2 in jedem Falle so zu bestimmen suchen, dass das Integral zum Verschwinden gebracht werden kann.

Ich nehme nun zunächst an, dass die partiellen Variationen δy_1 und δy_0 verschiedenes Vorzeichen haben. Dann muss δy an einem Punkte zwischen x_0 und x_1 verschwinden. Ich bezeichne den entsprechenden Werth von x mit x' und bestimme γ_1 und γ_2 so, dass u für diesen Punkt verschwindet. Dann kann ich statt des Integrals in 9) setzen

$$\int_{x_0}^{x'} a_{02}\, g'^2 u^2\, dx + \int_{x'}^{x_1} a_{02}\, g'^2 u^2\, dx,$$

und ich kann g gleich einer in beiden Integralen verschiedenen Constanten setzen, was die Continuität von $\delta y = \varepsilon g u$ nicht beeinträchtigt. Diese constanten Werthe denke ich mir für jedes zulässige Werthepaar von δy_0 und δy_1 verschieden bestimmt, und zwar jedesmal derartig, dass $\varepsilon g_0 u_0 = \delta y_0$ und $\varepsilon g_1 u_1 = \delta y_1$ wird. Dann werden die Integrale verschwinden und wir haben als nothwendige Bedingung für das Stattfinden eines Minimums:

Der in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck muss positiv sein für alle Werthe von δx_0 und δx_1, und für alle diejenigen Werthe von δy_0 und δy_1, die verschiedenes Zeichen haben, wobei die in u vorkommenden Constanten γ_1 und γ_2 alle Werthe erhalten können, für welche u an einem zwischen x_0 und x_1 gelegenen Punkte verschwindet.

Nehmen wir ferner an, dass δy_0 und δy_1 dasselbe Zeichen haben, so dürfen wir g gleich einer Constanten setzen und hierdurch das Integral $\int_{x_0}^{x_1} a_{02}\, g'^2 u^2\, dx$ zum Verschwinden bringen, wenn wir γ_1 und γ_2 so bestimmen, dass

37) $$u_0 : u_1 = \delta y_0 : \delta y_1,$$

da $\varepsilon g u_0 = \delta y_0$ und $\varepsilon g u_1 = \delta y_1$ sein muss. Setze ich für u_0 und u_1 ihre Werthe ein, so ergiebt sich aus dieser Bedingung zur Bestimmung von γ_1 und γ_2 die Proport

$$38)\qquad \gamma_1:\gamma_2=\delta y_0\frac{\partial y_1}{\partial c_2}-\delta y_1\frac{\partial y_0}{\partial c_2}:-\delta y_0\frac{\partial y_1}{\partial c_1}+\delta y_1\frac{\partial y_0}{\partial c_1}.$$

Dass u bei diesen Werthen von γ_1 und γ_2 zwischen x_0 und x_1 nicht verschwinden kann, dass wir somit $\delta y=\varepsilon g u$ setzen dürfen, folgt aus folgender Betrachtung. Da δy_0 und δy_1, nach 37) also auch u_0 und u_1, dasselbe Zeichen haben, so müsste u, wenn es überhaupt zwischen den Grenzen verschwindet, sein Zeichen an dieser Stelle nicht wechseln, oder es müsste an mehr als einer Stelle verschwinden. Das Letztere ist dadurch ausgeschlossen, dass die Bedingungen des § 2 erfüllt sein müssen. Dass u verschwindet, ohne sein Zeichen zu wechseln, ist gleichfalls unmöglich, denn alsdann müsste auch u' verschwinden und wir hätten die beiden Gleichungen

$$\gamma_1\frac{\partial y}{\partial c_1}+\gamma_2\frac{\partial y}{\partial c_2}=0,\quad \gamma_1\frac{\partial y'}{\partial c_1}+\gamma_2\frac{\partial y'}{\partial c_2}=0,$$

woraus sich ergeben würde

$$\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial y'}{\partial c_2}-\frac{\partial y}{\partial c_2}\frac{\partial y'}{\partial c_1}=0$$

und folglich $\frac{dq}{dx}=0$, was nach § 2 unmöglich ist.

Wir haben somit als fernere nothwendige Bedingung für ein Minimum:

Der in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck muss positiv sein für alle Werthe von δx_0 und δx_1 und für diejenigen Werthe von δy_0 und δy_1, welche gleiches Zeichen haben, wobei γ_1 und γ_2 so zu bestimmen sind, dass $u_0:u_1=\delta y_0:\delta y_1$.

§ 8.

Beispiel für den vorigen Paragraphen.

Um ein Beispiel zu geben, behandle ich das Problem, die kürzeste Linie zwischen zwei Curven zu ziehen.

Ebenso, wie in dem entsprechenden einfacheren Problem des § 6, folgt, dass die gesuchte Linie die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven ist. — Um die zweite Variation zu untersuchen, bilde ich den in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehenden Ausdruck. Hierbei kann ich $\delta^2 x=0$ setzen und $u=x-x'$, wo x' eine noch zu bestimmende Constante ist; dann erhalte ich, ähnlich wie in § 6, für das Stattfinden eines Minimums folgende Bedingung:

$$39)\qquad \left|\frac{[\delta y]}{x-x'}\sqrt{\delta x^2+[\delta y]^2}-\frac{\delta x\,[\delta^2 y]}{\sqrt{\delta x^2+[\delta y]^2}}\right|_0^1>0.$$

Die Quadratwurzel hat hierbei wieder dasselbe Zeichen, wie $[\delta y]$. Nehmen wir an, dass δy_0 und δy_1 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so muss x' so bestimmt werden, dass u zwischen x_0 und x_1 ver-

schwindet; also muss die Bedingung 39) für alle zwischen x_0 und x_1 gelegenen Werthe von x' erfüllt werden. Dies wird der Fall sein, wenn wir die folgenden beiden Ungleichungen haben:

$$40)\qquad \frac{[\delta y_1]}{x_1-x'}\sqrt{\delta x_1^2+[\delta y_1]^2}-\frac{\delta x_1\,[\delta^2 y_1]}{\sqrt{\delta x_1^2+[\delta y_1]^2}}>0,$$

$$41)\qquad \frac{[\delta y_0]}{x_0-x'}\sqrt{\delta x_0^2+[\delta y_0]^2}-\frac{\delta x_0\,[\delta^2 y_0]}{\sqrt{\delta x_0^2+[\delta y_0]^2}}<0,$$

was zunächst nothwendige Bedingungen für das Stattfinden eines Minimums sind. — Nehmen wir an, dass δy_0 und δy_1 gleiches Vorzeichen haben, so ist x' aus Gleichung 37) zu bestimmen, d. h. wir haben

$$x_0-x':x_1-x'=\delta y_0:\delta y_1,\quad x'=\frac{x_0\,\delta y_1-x_1\,\delta y_0}{\delta y_1-\delta y_0},$$

$$x_1-x'=\frac{(x_1-x_0)\,\delta y_1}{\delta y_1-\delta y_0},\quad x_0-x'=\frac{(x_1-x_0)\,\delta y_0}{\delta y_1-\delta y_0}$$

und wenn ich

$$\delta y_1=[\delta y_1]-y'_1\,\delta x_1=[\delta y_1]+\frac{\delta x_1^2}{[\delta y_1]},\quad \delta y_0=[\delta y_0]+\frac{\delta x_0^2}{[\delta y_0]}$$

setze,

$$x_1-x'=\frac{(x_1-x_0)(\delta x_1^2+[\delta y_1]^2)\,[\delta y_0]}{(\delta x_1^2+[\delta y_1]^2)[\delta y_0]-(\delta x_0^2+[\delta y_0]^2)\,[\delta y_1]},$$

$$x_0-x'=\frac{(x_1-x_0)(\delta x_0^2+[\delta y_0]^2)\,[\delta y_1]}{(\delta x_1^2+[\delta y_1]^2)[\delta y_0]-(\delta x_0^2+[\delta y_0]^2)[\delta y_1]}.$$

Wenn ich dies in 39) einsetze und der einfacheren Schreibweise wegen die Klammern, in denen die Variationen stehen, fortlasse, so erhalte ich

$$42)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta y_1}{(x_1-x_0)\sqrt{\delta x_1^2+\delta y_1^2}}\,[(\delta x_1^2+\delta y_1^2)\,\delta y_0-(\delta x_0^2+\delta y_0^2)\,\delta y_1]\\
&-\frac{\delta x_1\,\delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2+\delta y_1^2}}\\
&-\frac{\delta y_0}{(x_1-x_0)\,\delta y_1\sqrt{\delta x_0^2+\delta y_0^2}}\,[(\delta x_1^2+\delta y_1^2)\,\delta y_0-(\delta x_0^2+\delta y_0^2)\,\delta y_1]\\
&+\frac{\delta x_0\,\delta^2 y_0}{\sqrt{\delta x_0^2+\delta y_0^2}}>0.
\end{aligned}\right.$$

Sind die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes α_0, β_0, resp. α_1, β_1, und die Krümmungsradien ϱ_0 und ϱ_1, so habe ich allgemein

$$43)\qquad \frac{\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}{\delta x}=-\frac{\varrho}{y-\beta},$$

$$44)\qquad \frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{x-\alpha}{y-\beta},$$

$$45)\qquad \frac{\delta^2 y}{\ }=-\frac{\varrho^2}{(\ \ -\beta)^3}.$$

Hierdur[illegible] über in

[illegible] 27

$$46)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varrho_1(x_0-\alpha_1)}{(y_1-\beta_1)^2(x_1-x_0)}\,\delta x_1^2-\frac{(x_1-\alpha_1)^3\varrho_0^3+(x_0-\alpha_0)^3\varrho_1^3}{\varrho_0\varrho_1(x_1-x_0)(y_0-\beta_0)(y_1-\beta_1)(x_0-\alpha_0)(x_1-\alpha_1)}\,\delta x_0\,\delta y_1\\ &\qquad +\frac{\varrho_0(x_1-\alpha_0)}{(y_0-\beta_0)^2(x_1-x_0)}\,\delta x_0^2>0.\end{aligned}\right.$$

Damit dieser Ausdruck eine definite quadratische Form ist, muss man haben

$$47)\quad \left\{\begin{aligned} &\varrho_0^3\varrho_1^3(x_0-\alpha_0)^2(x_1-\alpha_1)^2[(x_0-\alpha_1)(x_1-\alpha_0)-\tfrac{1}{2}(x_0-\alpha_0)(x_1-\alpha_1)]\\ &\qquad -\tfrac{1}{4}\varrho_0^6(x_1-\alpha_1)^6-\tfrac{1}{4}\varrho_1^6(x_0-\alpha_0)^6>0.\end{aligned}\right.$$

Beachtet man, dass $\frac{x_0-\alpha_0}{\varrho_0}=\frac{x_1-\alpha_1}{\varrho_1}$, so geht 47) über in

$$48)\qquad (x_0-\alpha_0)^5(x_1-\alpha_1)^5(x_1-x_0)(\alpha_1-\alpha)<0.$$

Damit 46) nun auch eine positive Form wird, muss $\varrho_1(x_0-\alpha_1)>0$ sein. Da die Quadratwurzel des Ausdrucks 42) dasselbe Zeichen haben muss, wie δy, so folgt aus 43) und 44), dass das Zeichen von ϱ gleich dem von $x-\alpha$ zu nehmen ist. Die letztere Bedingung kann ich also auch schreiben

$$49)\qquad (x_1-\alpha_1)(x_0-\alpha_1)>0.$$

Zu diesen Bedingungen kommen noch die früher gefundenen 40) und 41), welche sich schreiben lassen

$$50)\qquad \frac{1}{x_1-\alpha_1}<\frac{1}{x_1-x'},$$

$$51)\qquad \frac{1}{x_0-\alpha_0}>\frac{1}{x_0-x'}$$

und für alle zwischen x_0 und x_1 liegenden Werthe von x' erfüllt werden müssen. Die vier Ungleichungen 48) bis 51) bilden somit die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Stattfinden eines Minimums.

AB sei die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven, a der Krümmungsmittelpunkt der ersten Curve im Punkte A, b der der zweiten Curve im Punkte B. Sind die beiden Curven convex gegen einander, wie in Fig. 7, so ist $x_0>\alpha_0$, $x_1<\alpha_1$, $\alpha_1>\alpha_0$; folglich werden sämmtliche Bedingungen erfüllt und es findet sicher ein Minimum statt. Sind die Curven concav gegen einander, wie in Fig. 8, so ist $x_0<\alpha_0$, $x_1>\alpha_1$, soll somit die Bedingung 48) erfüllt werden, so muss $\alpha_1>\alpha_0$ sein; in diesem Falle wäre aber x_0 sicher kleiner als α_1, folglich würde die Bedingung 49) nicht erfüllt werden; es kann somit kein Minimum stattfinden.

Ist die Curve, auf welcher der Anfangspunkt liegt, concav gegen diejenige, auf der der Endpunkt liegt, diese aber gegen jene convex, wie in Fig. 9 und 10, so haben wir $x_0<\alpha_0$, $x_1<\alpha_1$, somit sind die Bedingungen 49) und 50) erfüllt; die Bedingung 48) dagegen wird nur dann erfüllt sein, wenn $\alpha_0>\alpha_1$, wie in Fig. 10, und da dann auch $x_0>x_1$, so ist auch 51) erfüllt. Nur Fig. 10, nicht aber Fig. 9 wird uns liefern.

Ist umgekehrt, wie in Fig. 11 und 12, die Anfangscurve gegen die Endcurve convex und diese gegen jene concav, so habe ich $x_0 > \alpha_0$, $x_1 > \alpha_1$, also Bedingung 51) ist erfüllt; Bedingung 48) wird wieder nur dann erfüllt sein, wenn $\alpha_0 > \alpha_1$, wie in Fig. 12, und da in diesem Falle $x_0 > \alpha_1$, so sind auch die Bedingungen 49) und 50) erfüllt. Nur Fig. 12, nicht aber Fig. 11 wird ein Minimum geben.

Die Figuren 7, 10 und 12 stellen uns somit die Fälle dar, in welchen ein Minimum stattfindet, und die Figuren 8, 9 und 11 diejenigen Fälle, in welchen ein Minimum nicht vorhanden ist. Das Resultat unserer Untersuchung ist daher folgendes:

Die Strecke AB wird das Minimum des Entfernung der beiden Curven stets dann darstellen, wenn dieselben in den Punkten A und B convex gegen einander sind; es wird nie ein Minimum stattfinden, wenn beide Curven concav gegen einander sind; ist die eine gegen die andere concav und diese gegen jene convex, so wird ein Minimum nur dann statthaben, wenn A und a beide zwischen B und b, oder B und b beide zwischen A und a liegen.

Königsberg, 3. März 1878.

XVII.

Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoids infolge der Anziehung eines weit entfernten Punktes.

Von

Dr. Arnold Giesen.

Hierzu Taf. VI, Fig. 13—15.

§ 1. Bestimmung der an dem Ellipsoid wirkenden Kräfte.

Auf ein homogenes, verlängertes Rotationsellipsoid (Fig. 13), welches um seinen festen Mittelpunkt drehbar ist, wirkt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze ein weit entfernter materieller Punkt. Der Radius des Aequators des Ellipsoids sei a, die halbe Rotationsaxe sei c. Wir legen ferner ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen xy-Ebene in die Aequatorebene des Ellipsoids fällt und dessen xz-Ebene den anziehenden Punkt μ enthält; die Coordinaten des letzteren seien α und γ (entsprechend x und z). Dabei ist der Mittelpunkt des Ellipsoids der Coordinatenanfangspunkt und die Coordinatenaxen sind Hauptträgheitsaxen. Ein Punkt des Ellipsoids habe die Coordinaten x, y, z, dann ist die Entfernung desselben von μ, welche wir r nennen wollen,

$$r = \sqrt{(\gamma - z)^2 + y^2 + (\alpha - x)^2}.$$

Die Anziehung, welche der fragliche Punkt von μ erleidet, ist also

$$\frac{\mu . dm . f}{r^2},$$

wenn μ und dm die Massen der beiden Punkte und f die constante Elementaranziehung bedeuten. Die Componenten dieser Anziehung nach den drei Axen sind

$$\frac{\mu f\, dm(\alpha - x)}{r^3}, \quad -\frac{\mu f\, dm\, y}{r^3}, \quad \frac{\mu f\, dm(\gamma - z)}{r^3}.$$

Für r wollen wir jetzt einen genäherten Ausdruck setzen. Dazu nennen wir die Entfernung des Punktes μ vom Mittelpunkte des Ellipsoids R und haben dann

$$r=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-2(\alpha x+\gamma z)+x^2+y^2+z^2}$$
$$=R\sqrt{1-\frac{2(\alpha x+\gamma z)}{R^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}},$$

demnach also

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{R^3}\left\{1-\frac{2(\alpha x+\gamma z)}{R^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}\right\}^{-3/2}.$$

Nach unserer Annahme, dass μ sehr weit entfernt sei, ist, da α, γ und R von derselben Ordnung, dagegen x, y, z gegen die ersteren Grössen sehr klein sind,

$$\frac{2(\alpha x+\gamma z)}{R^2}$$

sehr klein von der ersten,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}$$

dagegen von der zweiten Ordnung. Letztere Grösse kann also ausser Acht bleiben. Entwickeln wir nun den vorliegenden Ausdruck nach dem binomischen Satze und lassen diejenigen Glieder der Entwickelung weg, welche klein von höherer Ordnung sind, so kommt

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right]$$

und daraus endlich folgen durch Substitution in obige Gleichungen der drei Anziehungscomponenten, welche der Punkt (x, y, z) von μ erleidet,

$$\text{I)}\quad\left\{\begin{aligned}X&=\mu f dm\frac{\alpha-x}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right],\\Y&=-\mu f dm\frac{y}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right],\\Z&=\mu f dm\frac{\gamma-z}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Solche Kräfte wirken an jedem Punkte des Ellipsoids. Sie setzen sich zu einer Resultante im Ursprunge zusammen, deren mit den Axen parallele Componenten folgende sind:

$$\Sigma X,\ \Sigma Y,\ \Sigma Z,$$

und zu einem Paare, dessen nach den Axen gerichtete Componenten der Grösse und dem Zeichen nach durch folgende Ausdrücke dargestellt werden:

$$L=\Sigma(yZ-zY),\quad M=\Sigma(zX-xZ),\quad N=\Sigma(xY-yX)$$

oder nach Substitution obiger Ausdrücke für die Kraftcomponenten

$$L=\Sigma\quad\mu f dm\frac{\gamma y}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right],$$
$$M=\Sigma\quad\mu f dm\frac{\alpha z-\gamma x}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right],$$
$$N=\Sigma-m f dm\frac{\alpha y}{R^3}\left[1+3\frac{\alpha x+\gamma z}{R^2}\right].$$

Die Summen sind natürlich über die ganze Masse des Ellipsoids auszudehnen. Beachten wir nun, dass der Ursprung im Schwerpunkte des Ellipsoids liegt und dass die Coordinatenaxen die Hauptträgheitsaxen des Ellipsoids sind, so sieht man, dass folgende Summen

$$\Sigma x\, dm,\quad \Sigma y\, dm,\quad \Sigma z\, dm,$$
$$\Sigma xy\, dm,\ \Sigma xz\, dm,\ \Sigma yz\, dm$$

sämmtlich gleich Null werden. Demnach werden obige Componenten des Gegenpaares:

$$\text{II)}\qquad L=0,\quad M=3\mu f\frac{\alpha\gamma}{R^5}\Sigma(z^2-x^2)\, dm,\quad N=0.$$

Diese Werthe zeigen, dass die Axe des resultirenden Gegenpaares nach der y-Axe gerichtet ist, das Gegenpaar demnach in der Ebene liegt, welche durch die Axe des Ellipsoids und den angrenzenden Punkt geht. Bezeichnen wir dasselbe fortan mit G, um mit M die Masse des Ellipsoids bezeichnen zu können, so haben wir weiter

$$G=3\mu f\frac{\alpha\gamma}{R^5}\Sigma[(z^2+y^2)\, dm-(x^2+y^2)\, dm]$$

oder weiter

$$G=3\mu f\frac{\alpha\gamma}{R^5}\left[\frac{M}{5}(a^2+c^2)-\frac{M}{5}(a^2+a^2)\right],$$

indem $\Sigma(z^2+y^2)\, dm$ und $\Sigma(x^2+y^2)\, dm$ die Trägheitsmomente des Ellipsoids bezüglich nach der x- und z-Axe sind, welche die Werthe haben $\frac{M}{5}(a^2+c^2)$ und $\frac{M}{5}(a^2+a^2)$.

Nennt man ϑ den Winkel, welchen die Linie R mit der Rotationsaxe c bildet, so ist

$$\gamma=R\cos\vartheta,\quad \alpha=R\sin\vartheta,$$

so dass wir endlich für das Gegenpaar folgenden Ausdruck erhalten:

$$\text{III)}\qquad G=\frac{3\mu f M(c^2-a^2)}{5R^3}\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Ein positives Paar strebt bekanntlich eine Drehung hervorzubringen, durch welche die positive z-Axe in die positive x-Axe gelangt. Ist also das Ellipsoid ein abgeplattetes, so strebt G, die ungleiche Axe des Ellipsoids senkrecht zu stellen zur Verbindungslinie R; ist dagegen das Ellipsoid verlängert, so strebt das Paar, die ungleiche Axe in jene Verbindungslinie zu drehen. Der letztere Fall ist es, welcher uns hier angeht. In beiden Fällen ist das Ellipsoid im Gleichgewichte, sowohl wenn seine ungleiche Axe in die gedachte Linie R fällt, als wenn beide auf einander senkrecht stehen. Bei abgeplatteten Ellipsoiden ist ersteres die labile, letzteres die stabile Gleichgewichtslage, umgekehrt bei verlängerten Ellipsoiden.

§ 2. Zweite Bestimmungsmethode der an dem Ellipsoid wirkenden Kräfte.

Wir wollen jetzt sehen, wie sich dieselbe Formel für das Gegenpaar aus der allgemeinen Formel für das Potential eines Ellipsoids ableiten lässt.

Das Potential eines homogenen Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c in einem äussern Punkte (x, y, z) wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel

$$V_a = abc\pi \int_\sigma^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right),$$

wenn σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+c} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} = 1$$

darstellt.

Hieraus findet man zunächst, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)} = D$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = -\, abc\pi \int_\sigma^\infty \frac{dt}{D} \frac{2x}{a^2+t},$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial y} = -\, abc\pi \int_\sigma^\infty \frac{dt}{D} \frac{2y}{b^2+t}.$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial z} = -\, abc\pi \int_\sigma^\infty \frac{dt}{D} \frac{2z}{c^2+t}.$$

Multiplicirt man diese drei Ausdrücke noch mit der constanten Dichtigkeit ϱ des Ellipsoids, der Masse μ des angezogenen Punktes und der constanten Elementaranziehung f, so erhält man die Componenten der Kraft, welche das Ellipsoid auf den Punkt μ ausübt.

Sowie aber das Ellipsoid den Punkt μ anzieht, zieht auch dieser das Ellipsoid an, beide Kräfte sind entgegengesetzt gleich. Die Richtung der Kraft, der das Ellipsoid unterworfen ist, geht durch (x, y, z) und ihre Componenten sind entgegengesetzt gleich den vorherbestimmten. Für unsern Fall ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, wir setzen daher $a = b$; der Punkt (x, y, z) liegt in der xz-Ebene, seine y-Coordinate ist daher gleich Null und folglich auch die y-Componente der Anziehung. Für die beiden anderen Componenten erhalten wir also die Ausdrücke

$$X = 2\mu f \varrho a^2 c\pi . x \int_\sigma^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^2 (c^2+t)^{\frac{1}{2}}},$$

Die beiden Anfangsglieder in den Ausdrücken für X und Z, welche wir, indem wir wieder mit M die Masse des Ellipsoids bezeichnen, auch so schreiben können:

$$\frac{M\mu f}{R^2}\,\frac{x}{R} \quad \text{und} \quad \frac{M\mu f}{R^2}\,\frac{z}{R}$$

stellen die Componenten der Anziehung dar, welche das Ellipsoid erleiden würde, wenn seine Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre; ihre Resultante trägt natürlich zur Bildung des Gegenpaares nichts bei. Ebenso wenig die folgenden beiden Glieder:

$$2\mu f\varrho a^2 c\pi x\,\frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7} \quad \text{und} \quad 2\mu f\varrho a^2 c\pi z\,\frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7}.$$

Die Resultante, welche ihnen entspricht, geht offenbar auch durch den Mittelpunkt des Ellipsoids. In Bezug auf das Gegenpaar hätten wir also, wie wir jetzt sehen, keinen Fehler gemacht, wenn wir ursprünglich $\sigma = x^2 + z^2$ gesetzt hätten; im Ausdruck für die Kraftcomponenten würden aber dadurch die Glieder, welche mit denjenigen, von welchen das Gegenpaar herrührt, von gleichem Range sind, fehlerhaft geworden sein. Da es uns also zunächst auf die Berechnung des Gegenpaares ankommt, so brauchen wir blos die letzten Theile der Componenten in Betracht zu ziehen und setzen darum

$$(X) = -\tfrac{2}{5}\mu f\varrho a^2 c\pi\,\frac{(4a^2+c^2)x}{R^5}, \quad (Z) = -\tfrac{2}{5}\mu f\varrho a^2 c\pi\,\frac{(2a^2+3c^2)z}{R^5}.$$

Bedenkt man nun, dass das Gegenpaar den Werth hat

$$G = zX - xZ,$$

so erhält man für dasselbe den Ausdruck

$$\text{III)} \qquad G = \tfrac{3}{5} M\mu f\,\frac{c^2-a^2}{R^5}\,xz,$$

wie in § 1.

Wenn es sich um den Druck handelt, welchen der feste Mittelpunkt des Ellipsoids auszuhalten hat, so ist derselbe gleich der Resultante aus den oben bestimmten vollständigen Componenten X und Z; in erster Annäherung kann man sich hier auf die Glieder der höchsten Dimension beschränken, also den Druck gleich setzen der Resultante von

$$\frac{M\mu f}{R^2}\,\frac{x}{R} \quad \text{und} \quad \frac{M\mu f}{R^2}\,\frac{z}{R},$$

nämlich gleich

$$\frac{M\mu f}{R^2}.$$

Derselbe ist dann vom Mittelpunkte nach dem anziehenden Punkte gerichtet. Infolge der durch die Bewegung entstehenden Schwungkräfte erleidet die Drehaxe keinen Druck, weil sie eine Hauptträgheitsaxe ist, *auch nicht* einmal der feste Mittelpunkt, weil er der Schwerpunkt ist.

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \left[-\tfrac{2}{3}\frac{1}{t^{3/2}}+\tfrac{1}{5}\frac{4a^2+c^2}{t^{5/2}}\right]_\sigma^\infty = \tfrac{2}{3}\frac{1}{\sigma^{3/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5}\frac{1}{\sigma^{5/2}}$$

und, indem wir für σ den obigen Werth setzen,

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \tfrac{2}{3}\frac{1}{\left(x^2+z^2-\frac{a^2x^2+c^2z^2}{x^2+z^2}\right)^{3/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5}\frac{1}{(x^2+z^2)^{5/2}},$$

wobei im letzten Gliede für σ einfach x^2+z^2 gesetzt wurde, welches jedenfalls gestattet ist. Hieraus folgt nun durch Entwickelung des ersten Gliedes

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \tfrac{2}{3}\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} + \frac{a^2x^2+c^2z^2}{(x^2+z^2)^{7/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5}\frac{1}{(x^2+z^2)^{5/2}}.$$

Das zweite Glied ist seines Zählers wegen von derselben Ordnung wie das letzte. Aus dieser Formel ergiebt sich sogleich X, wenn wir die Entfernung des anziehenden Punktes vom Mittelpunkte wieder mit R bezeichnen:

$$\text{I)}\quad X = \tfrac{4}{3}\mu f\varrho a^2 c\pi \frac{x}{R^3} + 2\mu f\varrho a^2 c\pi x\frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7} - \tfrac{2}{5}\mu f\varrho a^2 c\pi x\frac{4a^2+c^2}{R^5}.$$

Nun müssen wir z bilden. Wir haben ganz wie vorhin

$$\frac{1}{(a^2+t)(c^2+t)^{1/2}} = t^{-1}\left(1+\frac{a^2}{t}\right)^{-1}.\,t^{-1/2}\left(1+\frac{c^2}{t}\right)^{-1/2}$$

$$= t^{-3/2}\left(1-\frac{a^2}{t}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{t}\right) = t^{-3/2}\left(1-\frac{a^2}{t}-\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{t^{3/2}} - \tfrac{1}{2}\frac{2a^2+3c^2}{t^{5/2}}$$

und hieraus durch Integration

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(a^2+t)(c^2+t)^{1/2}} = \tfrac{2}{3}\frac{1}{\sigma^{3/2}} - \tfrac{1}{5}\frac{2a^2+3c^2}{\sigma^{5/2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}\frac{1}{\left(x^2+z^2-\frac{a^2x^2+c^2z^2}{x^2+z^2}\right)^{3/2}} - \tfrac{1}{5}\frac{2a^2+3c^2}{(x^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}\frac{1}{R^3} + \frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7} - \tfrac{1}{5}\frac{2a^2+3c^2}{R^5}$$

und demnach

$$\text{II)}\quad Z = \tfrac{4}{3}\mu f\varrho a^2 c\pi \frac{z}{R^3} + 2\mu f\varrho a^2 c\pi z\frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7} - \tfrac{2}{5}\mu f\varrho a^2 c\pi z\frac{2a^2+3c^2}{R^5}.$$

Hätten wir früher σ direct $= x^2+z^2$ gesetzt, so würden die Formeln für X und Z die zweiten Glieder

durch eine massenlose Linie, beiderseits vom Ursprunge gleichweit entfernt, verbunden sind, die sich um den Ursprung drehen kann. Die halbe Länge des Hebels sei l, ϑ und R behalten ihre Bedeutung (Fig. 14). Die Componenten der Anziehung, welche A erleidet, sind

$$\frac{m\mu f}{r_1^2}\frac{\alpha}{r_1} \text{ und } \frac{m\mu f}{r_2^2}\frac{\gamma}{r_2};$$

diejenigen, welche B erleidet, sind

$$\frac{m\mu f}{r_2^2}\frac{\alpha}{r_2} \text{ und } \frac{m\mu f}{r_2^2}\frac{\gamma}{r^2},$$

wenn r_1 und r_2 die Entfernungen bezüglich der Punkte A und B vom anziehenden Punkte μ bedeuten. Die letzteren, d. h. die z-Componenten, erzeugen kein Paar. Nun ist

$$r_1^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\vartheta, \quad r_2^2 = R^2 + l^2 + 2Rl\cos\vartheta,$$

also

$$\frac{1}{r_1^3} = (R^2 + l^2 - 2Rl\cos\vartheta)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} + \frac{3l\cos\vartheta}{R^4},$$

$$\frac{1}{r_2^3} = (R^2 + l^2 + 2Rl\cos\vartheta)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} - \frac{3l\cos\vartheta}{R^4},$$

also sind die x-Componenten der an A und B wirkenden Kräfte

$$\frac{m\mu f\alpha}{R^3} + \frac{3m\mu f\alpha l\cos\vartheta}{R^4} \text{ und } \frac{m\mu f\alpha}{R^3} - \frac{3m\mu f\alpha l\cos\vartheta}{R^4}.$$

Die beiden Componenten

$$\frac{m\mu f\alpha}{R^3}$$

an beiden Punkten erzeugen kein Paar, sondern halten sich das Gleichgewicht. Die beiden Theile, welche das Paar erzeugen, sind also nur

$$+\frac{3m\mu f\alpha l\cos\vartheta}{R^4} \text{ und } -\frac{3m\mu f\alpha l\cos\vartheta}{R^4}.$$

Der Hebelarm des Paares ist $2l$ und also das Paar selbst

$$\frac{6m\mu f l^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{R^3}.$$

Das aus der stattfindenden Bewegung abgeleitete Paar ist

$$-J\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

wenn J das Trägheitsmoment der beiden Punkte in Bezug auf die Drehaxe ist; dieses ist $= 2ml^2$. Daher wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{3\mu f\cos\vartheta\sin\vartheta}{R^3}.$$

Die Bewegung hängt hiernach also gar nicht von der Masse der beiden Punkte A und B, auch nicht von ihrer Entfernung l ab, sondern **nur** *von der Lage* **des anziehenden Punktes, seiner Masse und der constan-**

ten Elementaranziehung (und der Anfangsamplitude), was für elektrometrische Beobachtungen interessant sein kann. Ein solches System ist daher nicht geeignet, die Bewegung unseres Ellipsoids darzustellen. Bemerken wir noch, dass eine homogene Linie von beliebiger Länge, welche im Mittelpunkte unterstützt ist, gerade so schwingt, wie die beiden Punkte A und B, indem alle ihre Punkte, wie vorhin bemerkt, gleiche Winkelgeschwindigkeit haben. —

Versuchen wir jetzt, ob sich die Bewegung des Ellipsoids nicht durch ein System von vier Punkten von gleicher Masse m darstellen lässt, welche durch zwei massenlose Linien verbunden sind und beiderseits vom Durchschnittspunkte dieser Linien gleichweit abliegen. Ueber die zwei Verbindungslinien machen wir zwei verschiedene Voraussetzungen. Erstlich seien dieselben gleich lang, aber der von ihnen eingeschlossene Winkel 2φ sei noch unbestimmt. Die Halbirungslinie dieses Winkels nehmen wir zur z-, die seines Nebenwinkels zur x-Axe; der Punkt μ liegt natürlich in der Ebene des Systems. An der Linie AB wirkt nun das Paar

$$\frac{6 m \mu f l^2 \cos(\vartheta - \varphi) \sin(\vartheta - \varphi)}{R^3}$$

und an der Linie $A'B'$ das Paar

$$\frac{6 m \mu f l^2 \cos(\vartheta + \varphi) \sin(\vartheta + \varphi)}{R^3},$$

am ganzen System wirkt demnach das Paar

$$\frac{3 m \mu f l^2}{R^3}[\sin 2(\vartheta - \varphi) + \sin 2(\vartheta + \varphi)] = \frac{12 m \mu f l^2 \cos^2 \varphi}{R^3} \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Das Trägheitsmoment des Systems ist $4 m l^2$, also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - \frac{3 \mu f \cos^2 \varphi}{R^3} \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Die Bewegung dieses Systems ist daher ebenfalls unabhängig von der Länge der Hebelarme, weshalb zwei gleich lange, in ihrer Mitte an einander befestigte homogene Linien ebenso wie die vier Punkte schwingen. Da die Bewegung aber von dem Winkel φ abhängt, so lässt sich diese Gleichung mit jener für das Ellipsoid identificiren. Wir brauchen nämlich nur $\cos 2\varphi = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}$ zu setzen, woraus sogleich folgt

$$tg\, \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}} = \frac{a}{c}.$$

Verbindet man also einen Pol unseres Ellipsoids mit einem beliebigen Punkte des Aequators, so bildet diese Verbindungslinie mit der Polaraxe den gesuchten Winkel φ. Noch ist zu bemerken, dass wir nicht nothwendig homogene Linien zu nehmen brauchen; die Dichtigkeit kann vielmehr von Null aus ganz beliebig variiren, wenn sie nur zu beiden Seiten von Null aus gleichmässig variirt.

Wir machen jetzt die zweite Voraussetzung, dass nämlich die beiden Verbindungslinien auf einander senkrecht stehen, aber das Verhältniss ihrer Längen noch unbestimmt ist. Nimmt man die Linien selbst zu den Axen der x und z und lässt ϑ und R ihre frühere Bedeutung, so wird das Paar, welches an der Linie AB wirkt, nach dem Obigen dargestellt durch

$$+\frac{6 m \mu f l^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{R^3},$$

das an der Linie $A'B'$ wirkende dagegen durch

$$-\frac{6 m \mu f l'^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{R^3},$$

also das am ganzen System wirkende durch

$$\frac{6 m \mu f (l^2 - l'^2) \cos\vartheta \sin\vartheta}{R^3}.$$

Das Trägheitsmoment ist $2m(l^2+l'^2)$, also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{3\mu f (l^2 - l'^2)}{R^3 (l^2+l'^2)} \cos\vartheta \sin\vartheta,$$

wir haben also nur zu setzen

$$\frac{l^2-l'^2}{l^2+l'^2} = \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \text{ oder } \frac{l}{l'} = \frac{c}{a},$$

um sofort wieder die Bewegungsgleichung unseres Ellipsoids zu erhalten.

Nach dieser Digression kehren wir nun zur Bewegungsgleichung zurück und schreiten zur Integration derselben.

Schreiben wir dieselbe in der Form

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{3\mu f (c^2-a^2)}{2R^3(c^2+a^2)} \sin 2\vartheta,$$

so kommt nach Multiplication mit $2d\vartheta$

$$2\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\tfrac{3}{2}\frac{\mu f (c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)} \sin 2\vartheta \, d(2\vartheta)$$

oder durch Integration

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\frac{\mu f (c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)} \cos 2\vartheta + C.$$

Hierbei ist $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit; die Constante bestimmt sich daher durch die Bedingung, dass beim Anfange der Bewegung der Elongation ϑ_0 die Winkelgeschwindigkeit Null entsprechen soll, was die Bedingung giebt

$$0 = \tfrac{3}{3}\frac{\mu f (c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)} \cos 2\vartheta_0 + C.$$

Durch Subtraction von der vorigen Gleichung kommt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\frac{\mu f (c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)} (\cos 2\vartheta - \cos 2\vartheta_0)$$

und weiter

$$\pm\, dt = R\sqrt{\frac{2R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta - \cos 2\vartheta_0}}.$$

Setzen wir einstweilen den constanten Factor der rechten Seite gleich A, so wird die vorige Gleichung durch eine einfache Transformation

$$\pm\, dt = \frac{A}{\sqrt{2}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta_0^2 - \sin\vartheta^2}} = \frac{A}{\sin\vartheta_0\sqrt{2}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\sin\vartheta^2}{\sin\vartheta_0^2}}}.$$

Führen wir für ϑ die neue Variable φ ein mittelst der Gleichung

$$\sin\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0},$$

woraus folgt

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0\sin\varphi,\quad \cos\vartheta\, d\vartheta = \sin\vartheta_0\cos\varphi\, d\varphi$$

und weiter also

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\sin\vartheta^2}{\sin\vartheta_0^2}}} = \frac{\sin\vartheta_0\, d\varphi}{\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta_0\, d\varphi}{\sqrt{1-\sin\vartheta_0^2\sin\varphi^2}};$$

dadurch erhalten wir also

$$\pm\, dt = \frac{A}{\sqrt{2}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin\vartheta_0^2\sin\varphi^2}}.$$

Wählt man nun das Zeichen so, dass t positiv wird, und rechnet die Zeit vom Anfange der Bewegung aus, so dass $t=0$, $\vartheta=\vartheta_0$ und also auch $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ einander entsprechende Werthe sind, so kommt durch Integration vorstehender Gleichung

$$t = -\frac{A}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin\vartheta_0^2\sin\varphi^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\int\limits_{\arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin\vartheta_0^2\sin\varphi^2}}$$

oder, wenn wir für A seinen Werth setzen, das Integral mit F, das vollständige aber nach Jacobi mit K bezeichnen,

$$\text{I)}\quad t = R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\left\{K(\sin\vartheta_0) - F\left[\sin\vartheta_0,\ \arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right)\right]\right\}.$$

Für die Zeit vom Anfange der Bewegung bis dahin, wo das Ellipsoid durch die Gleichgewichtslage geht, also für den vierten Theil der ganzen Oscillationsdauer, die wir mit T bezeichnen wollen, haben wir

$$\tfrac{1}{4}T = \frac{A}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin\vartheta_0^2\sin\varphi^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\,K(\sin\vartheta_0),$$

also ist

$$\text{II)}\quad T = 4R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\,K(\sin\vartheta_0).$$

Rechnen wir dagegen die Zeit von dem Punkte aus, wo das Ellipsoid durch die stabile Gleichgewichtslage geht, und bezeichnen dann dieselbe mit t', so kommt

$$t' = \tfrac{1}{4} T - t = \frac{A}{\sqrt{2}} F\left[\sin\vartheta_0,\ \arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right)\right]$$

oder

$$\text{III)} \qquad t' = R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\, F\left[\sin\vartheta_0,\ \arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right)\right].$$

Nun handelt es sich aber weniger darum, die Zeit aus dem Elongationswinkel zu finden, als vielmehr umgekehrt, den Elongationswinkel aus der gegebenen Zeit zu finden. Kehren wir daher die vorige Gleichung um, wozu uns die elliptischen Functionen die Mittel bieten, so kommt

$$\arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right) = am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right),$$

$$\text{IV)} \qquad \sin\vartheta = \sin\vartheta_0 \sin am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right)_{mod=\sin\vartheta_0}.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich weiter

$$\text{V)} \qquad \cos\vartheta = \Delta am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right)_{mod=\sin\vartheta_0}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit. Da nämlich

$$\frac{d \sin am u}{du} = \cos am u\ \Delta am u,$$

so folgt aus IV)

$$\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \sin\vartheta_0 \cos am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right)\Delta am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right)$$
$$\times\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}},$$

folglich

$$\text{VI)} \quad \frac{d\vartheta}{dt'} = \frac{\sin\vartheta_0}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\cos am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right)_{mod=\sin\vartheta_0}.$$

Setzen wir $t'=0$ oder $=\tfrac{1}{2}T$ oder überhaupt $=\frac{n}{2}T$, wo n eine positive ganze Zahl ist, so erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit im tiefsten Punkte. Für $t'=0$ wird zunächst

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt'}\right) = \frac{\sin\vartheta_0}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}},$$

da $\cos am\, 0 = 1$ ist. Setzen wir $t' = \frac{n}{2}T$, so kommt zuerst

$$\cos am\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,.\,t'\right) = \cos am[2n\,K(\sin\vartheta_0)] = \cos n\pi = \pm 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Daher kommt für die Winkelgeschwindigkeit im tiefsten Punkte jedesmal derselbe Werth, nur einmal positiv, das andere Mal negativ, wie zu erwarten war,

$$\text{VII)} \qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt'}\right)_{\vartheta=0} = \pm \frac{\sin\vartheta_0}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}.$$

Gleichung IV) lässt sich mit Benutzung von II) auch so schreiben:

$$\text{VIII)} \qquad \sin\vartheta = \sin\vartheta_0 \sin am\left(\frac{4K}{T}.t'\right).$$

Setzen wir in dieser Gleichung nacheinander

$$t' = 0,\ \tfrac{1}{4}T,\ \tfrac{1}{2}T,\ \tfrac{3}{4}T,\ T,\ \tfrac{5}{4}T,\ \ldots,$$

so kommt offenbar

$$\vartheta = 0,\quad \vartheta = \vartheta_0,\quad \vartheta = 0,\quad \vartheta = -\vartheta_0,\quad \vartheta = 0,\quad \vartheta = \vartheta_0,\ \ldots.$$

Für zwei Zeitpunkte, welche um $\frac{T}{2}$ auseinander liegen, für welche also $t'_2 = t'_1 + \frac{T}{2}$, kommt, wenn die entsprechenden Amplituden mit ϑ_1 und ϑ_2 bezeichnet werden,

$$\sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_0 \sin am\left(\frac{4K}{T}t'_1\right),$$

$$\sin\vartheta_2 = \sin\vartheta_0 \sin am\left(2K + \frac{4K}{T}t'_1\right) = \sin\vartheta_0 \sin\left[\pi + am\left(\frac{4K}{T}t'_1\right)\right],$$

woraus folgt

$$\vartheta_2 = -\vartheta_1.$$

Ebenso können wir auch die Formel für die Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe von II) umformen:

$$\text{IX)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt'} = \sin\vartheta_0 \frac{4K}{T} \cos am\left(\frac{4K}{T}t'\right).$$

Für zwei um $\frac{1}{2}T$ auseinander liegende Zeitpunkte liefert diese Formel offenbar, wie die vorhergehende, Werthe von entgegengesetztem Zeichen, da die Function $\cos am\,u$ ebenso wie $\sin am\,u$ das Zeichen wechselt, wenn das Argument um $2K$ wächst.

Aus diesen Bemerkungen ist nun die Periodicität der Bewegung klar. Aus II) folgt noch, wenn $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$, $T = \infty$, was sich daraus erklärt, dass dann das Ellipsoid im Gleichgewichte ist.

Die bisherigen Formeln sind für jede Elongationsweite des Ellipsoids giltig, wenn es nur nicht ganz herumschwingt. Nehmen wir im Folgenden an, dass die Elongationsweite beständig sehr klein bleibe; es wird dies der Fall sein, wenn die anfängliche Excursionsweite ϑ_0 sehr klein ist. Zu dem Ende kehren wir zunächst zur Gleichung für $\pm dt$ zurück und ersetzen $\sin\vartheta_0$ und $\sin\vartheta$ durch resp. ϑ_0 und ϑ, wodurch wir erhalten

$$\pm\, dt = R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\,\frac{\frac{d\vartheta}{\vartheta_0}}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2}}},$$

also durch Integration

$$t = -R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\,arc\sin\frac{\vartheta}{\vartheta_0} + C.$$

Rechnen wir die Zeit von der Anfangslage des Ellipsoids aus, so entspricht $t=0$ $\vartheta=\vartheta_0$ und es wird daher vorige Formel

X) $$t = R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\left\{\frac{\pi}{2} - arc\sin\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right\},$$

oder wenn wir die Zeit vom Durchgangspunkte des Ellipsoids durch die stabile Gleichgewichtslage an rechnen, wobei sich $t=0$ und $\vartheta=0$ entsprechen,

XI) $$t' = R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\,arc\sin\frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

Für die ganze Oscillationsdauer kommt

XII) $$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}.$$

Aus dieser Formel ersieht man besonders, dass bei kleinen Ausschlägen, für welche sie nur gilt, die Oscillationsdauer wie beim ebenen Pendel unabhängig ist von der Oscillationsweite; dieselbe ist ferner proportional mit der Potenz $\frac{3}{2}$ der Entfernung des anziehenden Punktes von Mittelpunkte des Ellipsoids, und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Masse des anziehenden Punktes und ebenso aus der constanten Elementaranziehung. Weniger einfach ist, wie die Formel zeigt, der Zusammenhang zwischen der Oscillationsdauer und den Axen des Ellipsoids.

Kehren wir die Formel XI) um, so kommt

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,t'\right)$$

und durch Differentiation

$$\frac{d\vartheta}{dt'} = \vartheta_0\cos\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\,t'\right).\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}.$$

Diese beiden Ausdrücke können wir endlich durch Einführung der Oscillationsdauer auch wieder so schreiben:

XIII) $$\vartheta = \vartheta_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t'\right),$$

XIV) $$\frac{d\vartheta}{dt'} = \frac{2\pi}{T}\vartheta_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t'\right).$$

Für die Winkelgeschwindigkeit im tiefsten Punkte kommt, indem wir *$t'=0$ setzen,*

XV) $$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{v=0}=\frac{\vartheta_0}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}=\frac{2\pi}{T}\vartheta_0.$$

Dieser Ausdruck geht, wie man sieht, aus dem früheren, für jede Oscillationsweite geltenden hervor, indem man in letzterem $\sin\vartheta_0$ durch ϑ_0 ersetzt.

§ 4. Oscillation mit Anfangsgeschwindigkeit.

Alle Umstände sollen ganz dieselben bleiben, wie im vorhergehenden Paragraphen, nur soll die Anfangsgeschwindigkeit nicht Null sein. Die Gleichung der Bewegung bleibt

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\sin\vartheta\cos\vartheta=-\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{2R^3(c^2+a^2)}\sin 2\vartheta,$$

welche durch Integration ergab

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\cos 2\vartheta+C.$$

Der anfänglichen Amplitude des Ellipsoids entspreche als Anfangsdrehung um die y-Axe die Geschwindigkeit v_0; dann giebt die vorstehende Gleichung für den Anfang der Bewegung

$$v_0^2=\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\cos 2\vartheta_0+C.$$

Durch Subtraction entsteht

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}(\cos 2\vartheta-\cos 2\vartheta_0)+v_0^2.$$

Wenn nun

$$\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\cos 2\vartheta_0-v_0^2=\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^2(c^2+a^2)}\cos 2\theta_0$$

gesetzt werden kann, wo θ_0 einen gewissen Winkel bezeichnet, d. h. wenn sich aus dieser Gleichung für $\cos 2\theta_0$ ein Werth $<\pm 1$ ergiebt, so ist klar, dass vorige Bewegungsgleichung in folgende übergeht:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=\tfrac{3}{2}\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}(\cos 2\vartheta-\cos 2\theta_0).$$

Dass θ_0 jetzt die grösste Amplitude des Ellipsoids bedeutet, zeigt auch der Umstand, dass für $\vartheta=\theta_0$ $\frac{d\vartheta}{dt}$ verschwindet, ϑ also ein Maximum oder Minimum ist. Obige Gleichung zeigt nun, dass die Bewegung gerade so geschieht, als wenn das Ellipsoid von der Anfangsamplitude θ_0 aus ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgegangen wäre. Dieser Winkel θ_0 bestimmt sich nach dem Obigen aus ϑ_0 und v_0. Auf diesen Fall brauchen wir also nicht weiter einzugehen.

Wenn sich nun aber für $\cos 2\theta_0$ ein Werth $>\pm 1$ ergiebt, welchen wir jetzt, da er als Cosinus keine Bedeutung hat, einfach mit $-C$ bezeichnen werden, so zeigt dieses, dass das Ellipsoid ganz herumschwingt. Die Gleichung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\,\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\,(\cos 2\vartheta + C),$$

wo $C > 1$ ist, zeigt dieses, indem ihr zufolge jetzt $\frac{d\vartheta}{dt}$ für keinen Werth von ϑ verschwinden kann. Die Amplitude hat daher keinen Maximal- und Minimalwerth und die Bewegung geht immer in demselben Sinne fort. Es ist dann

$$C = \tfrac{2}{3}\,\frac{R^2(c^2+a^2)}{\mu f(c^2-a^2)}\,v_0{}^2 - \cos 2\vartheta_0,$$

woraus erhellt, dass C stets positiv ist, wenn es überhaupt grösser als Eins sein soll. Wegen der Grösse von R im Vergleich mit c und a ist aus dieser Formel klar, dass schon eine geringe anfängliche Geschwindigkeit das Ellipsoid in ganz herumgehende Schwingungen versetzen kann, und diese erforderliche Winkelgeschwindigkeit ist offenbar desto kleiner, je näher $\cos 2\vartheta_0$ an -1, je näher also $2\vartheta_0$ an 180^0 und ϑ_0 an 90^0 (welche Amplitude der Lage des labilen Gleichgewichts entspricht) liegt.

Für die Geschwindigkeit v' in der stabilen Gleichgewichtslage kommt hiernach

$$v'^2 = \tfrac{3}{2}\,\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\,(1+C),$$

also

$$\frac{2v'^2 R^3(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)} = 1 + C;$$

soll also das Ellipsoid ganz herumschwingen, so muss sein

$$\frac{2v'^2 R^3(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)} > 2.$$

Die positive Grösse C kann nun als bekannt vorausgesetzt werden; dann ist weiter

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\,\frac{\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\,(1 + C - 2\sin\vartheta^2) = \frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)}\left(\frac{1+C}{2} - \sin\vartheta^2\right).$$

Bezeichnen wir nun die neue Constante $\frac{1+C}{2}$, welche offenbar wieder positiv und >1 ist, mit $c_1{}^2$, so kommt endlich

$$\pm\, dt = \frac{R\sqrt{R(c^2+a^2)}}{\sqrt{3\mu f(c^2-a^2)}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{c_1{}^2 - \sin\vartheta^2}}.$$

Nehmen wir jetzt die Zeit vom Durchgange des Ellipsoids durch die stabile Gleichgewichtslage an, so kommt durch Integration

$$t = \frac{R\sqrt{R(c^2+a^2)}}{\sqrt{3\mu f(c^2-a^2)}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{c_1{}^2 - \sin\vartheta^2}}.$$

Das elliptische Integral, welches uns hier begegnet, kann nicht in *derselben* Weise auf die Normalform gebracht werden, wie im früheren

Falle, da $c_1^2 > 1$ ist. Diese Zurückführung ergiebt sich indess noch leichter als damals; es ist nämlich

$$t = \frac{R\sqrt{R(c^2+a^2)}}{c_1\sqrt{3\mu f(c^2-a^2)}} \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{1}{c_1^2}\sin\vartheta^2}}.$$

Hierdurch ist die Normalform schon erreicht, da $\frac{1}{c_1^2} < 1$ ist und es kommt also das Resultat

$$\text{I)} \qquad t = \frac{R}{c_1}\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\, F\left(\frac{1}{c_1}, \vartheta\right).$$

Für die Zeit T eines ganzen Umschwunges haben wir $\vartheta = 2\pi$ zu setzen und es kommt

$$\text{II)} \quad T = \frac{R}{c_1}\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\, F\left(\frac{1}{c_1}, 2\pi\right) = \frac{4R}{c_1}\sqrt{\frac{R(c^2+a^2)}{3\mu f(c^2-a^2)}}\, K\left(\frac{1}{c_1}\right),$$

wo K nach Jacobi wieder das vollständige Integral bedeutet. Kehren wir nun die Gleichung 1) um, so erhalten wir die Amplitude durch die Zeit ausgedrückt

$$\vartheta = am\left(\frac{c_1 t}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\right)_{\left(mod\,\frac{1}{c_1}\right)}.$$

Hier kann also die Amplitude direct ausgedrückt werden, was im vorigen Falle nicht möglich war. K wird offenbar desto kleiner, je kleiner der Modulus $\frac{1}{c_1}$, je grösser also c_1 ist. Dadurch nimmt auch der constante Factor im Ausdrucke für T ab; T wird also desto kleiner, je grösser c_1, also je grösser v_0 wird, wie auch von selbst klar ist. Nach dem Vorhergehenden kann ϑ für jede Zeit berechnet werden. Es ergiebt sich noch für die Geschwindigkeit

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c_1}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\, \Delta\, am\left(\frac{c_1 t}{R}\sqrt{\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R(c^2+a^2)}}\right).$$

Die vorhergehenden Formeln können wir auch wieder durch Einführung der Umlaufszeit so darstellen:

$$\text{III)} \qquad \vartheta = am\left(\frac{4K}{T}t\right),$$

$$\text{IV)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{4K}{T}\,\Delta\, am\left(\frac{4K}{T}t\right),$$

aus welchen Formeln die Periodicität der Bewegung sich ganz einfach erschliessen lässt.

§ 5. Der anziehende Punkt besitzt selbst eine kleine Oscillation.

Wir wollen jetzt endlich noch die Voraussetzung machen, der anziehende Punkt μ oscillire selbst auf einem um den Mittelpunkt des Ellipsoids mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreise um eine Mittellage O, aber so, dass seine Amplitude ϑ immer sehr klein bleibt. (Fig. 15.) Der Winkel, welchen die Rotationsaxe des Ellipsoids mit dem nach O gezogenen Radius vector bildet, heisse τ, ferner möge t die Zeit, G das auf das Ellipsoid wirkende Gegenpaar, J sein Trägheitsmoment, c seine Rotations- und a seine Aequatorealhalbaxe, endlich f die Attractionsconstante bezeichnen.

Die Schwingungen des Punktes μ um seine Mittellage O seien ausgedrückt durch die Gleichung

$$\text{I)} \qquad \vartheta = \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

unter δ die Dauer einer ganzen Schwingung und unter ϑ_0 die grösste Winkeldistanz von der Mittellage O verstanden. Dann heisst die Bewegungsgleichung

$$J \frac{d^2\tau}{dt^2} - G = 0.$$

Nun ist nach III), § 1,

$$G = \tfrac{3}{5} \mu f M \frac{(c^2 - a^2)}{R^3} \sin(\vartheta - \tau) \cos(\vartheta - \tau).$$

Ferner ist

$$J = \frac{M}{5}(c^2 + a^2).$$

Dadurch kommt

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R^3(c^2 + a^2)} \sin(\vartheta - \tau) \cos(\vartheta - \tau) = 0.$$

Da nun nach Annahme ϑ und τ stets klein bleiben sollen, so setzen wir für eine angenäherte Behandlung

$$\cos(\vartheta - \tau) = 1, \quad \sin(\vartheta - \tau) = \vartheta - \tau$$

und ebenso der Kürze wegen

$$\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R^3(c^2 + a^2)} = H^2.$$

Dann wird die Bewegungsgleichung des Ellipsoids

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + H^2\tau = H^2\vartheta$$

oder

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + H^2\tau = H^2\vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t.$$

Wenn wir nun noch $\frac{2\pi}{\delta}$ mit α bezeichnen und für αt die neue Variable x einführen, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\alpha^2 \frac{d^2\tau}{dx^2} + H^2\tau = H^2\vartheta_0 \sin x$$

oder

$$\frac{\alpha^2}{H^2\vartheta_0} \frac{d^2\tau}{dx^2} + \frac{1}{\vartheta_0}\tau = \sin x.$$

Endlich setzen wir noch für $\frac{\alpha^2}{H^2\vartheta_0}\tau$ die neue Variable y und erhalten so

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{H^2}{\alpha^2}y = \sin x.$$

Die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

hat bekanntlich als Integral

$$y = \frac{\left(C_1 + \int f(x)\, e^{-m_1 x}\, dx\right) e^{m_1 x} - \left(C_2 + \int f(x)\, e^{-m_2 x}\, dx\right) e^{m_2 x}}{m_1 - m_2},$$

unter m_1 und m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 + am + b = 0$$

verstanden. Setzen wir $f(x) = \sin x$, so erhalten wir

$$y = \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} + \frac{e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} \sin x\, dx - e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} \sin x\, dx}{m_1 - m_2}.$$

Nun ist aber

$$\int e^{-mx} \sin x\, dx = -\frac{m \sin x + \cos x}{m^2 + 1}\, e^{-mx};$$

demnach kommt also

$$y = \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} - \frac{\frac{m_1 \sin x + \cos x}{m_1^2 + 1} - \frac{m_2 \sin x + \cos x}{m_2^2 + 1}}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} + \frac{(m_1 m_2 - 1)\sin x + (m_1 + m_2)\cos x}{(m_1^2 + 1)(m_2^2 + 1)}.$$

Nun ist in unserm Falle

$$m_1 = +\frac{H}{\alpha}i, \quad m_2 = -\frac{H}{\alpha}i,$$

$$m_1 m_2 = \frac{H^2}{\alpha^2}, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad m_1 - m_2 = 2\frac{H}{\alpha}i.$$

Daher kommt

$$y = \frac{(C_1 - C_2)\cos\frac{H}{\alpha}x + (C_1 + C_2)i \sin\frac{H}{\alpha}x}{2\frac{H}{\alpha}i} + \frac{\left(\frac{H^2}{\alpha^2} - 1\right)\sin x}{\left(\frac{H^2}{\alpha^2} - 1\right)^2}$$

$$= C' \sin\frac{H}{\alpha}(x + c') + \frac{\sin x}{\frac{H^2}{\alpha^2} - 1},$$

unter C' und c' die beiden Integrationsconstanten verstanden. Wir setzen nun nach dem Früheren

$$\tau = \frac{H^2 \vartheta_0}{\alpha^2} y \quad \text{und} \quad x = \alpha t = \frac{2\pi}{\delta} t$$

und erhalten, unter C und c zwei neue Integrationsconstanten verstanden,

$$\text{II)} \qquad \tau = \frac{H^2}{H^2 - \alpha^2} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin H (t + c).$$

Wenn der anziehende Punkt μ in seiner bisherigen Mittellage O festliegend gedacht wird, so ist $\vartheta_0 = 0$ zu setzen und die Bewegung wird dargestellt durch

$$\tau' = C \sin H (t + c),$$

woraus hervorgeht, dass man für die Oscillationsdauer $\varDelta$ des Ellipsoids in diesem Falle hat

$$\varDelta = \frac{2\pi}{H}$$

oder nach dem Obigen [übereinstimmend mit XII) in § 3]

$$\text{III)} \qquad \varDelta = 2\pi R \sqrt{\frac{R(c^2 + a^2)}{3\mu f (c^2 - a^2)}}.$$

Hiernach gestaltet sich Gleichung II) folgendermassen:

$$\text{IV)} \qquad \tau = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \varDelta^2} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin \frac{2\pi}{\varDelta} (t + c).$$

Für den Mond ist $\frac{v^2}{R} = \frac{\mu f}{R^2}$, also $\frac{v}{R}$ oder die Winkelgeschwindigkeit $= \sqrt{\frac{\mu f}{R^3}}$. Hiernach findet sich für seine Umlaufszeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mu f}}$$

und daraus weiter

$$\varDelta = T \sqrt{\frac{1}{3} \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2}}.$$

ϑ kann man als die Libration des Mondes in der Länge betrachten,* wobei dann für δ natürlich T zu setzen ist. Hierdurch kommt

$$\tau = -\frac{1}{\frac{1}{3}\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - 1} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin \frac{2\pi}{\varDelta} (t + c).$$

Ueber die Axenverhältnisse des Mondes vergleiche man des Verfassers Abhandlung: „Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellip-

* Man bedenke, dass für die entwickelten Formeln nur die relative Bewegung von Erde und Mond in Betracht kommt. Mit Rücksicht auf Gleichung man *Laplace, Méc. cél. T. III, l. 7, n. 21* und *T. II, l. 5, n. 15*.

soide mit kleinen Excentricitäten vorkommen", I. Theil § 2, Jahrgang XXI, 1 dieser Zeitschrift.* Offenbar erhielte man für τ eine Formel von derselben Gestalt bei der Annahme, dass die auf der Ebene des Winkels τ senkrecht stehende Axe des Ellipsoids die kürzeste sei.

Die Rotation des Mondes um seine Axe ist gleichförmig und ihre Dauer sehr nahe gleich der Umlaufszeit um die Erde. Da die letztere nicht gleichförmig ist, so wird durch diesen Unterschied die Libration in der Länge bedingt. Es ist unwahrscheinlich, dass die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit genau gleich der mittleren Umlaufsgeschwindigkeit war. Waren aber beide verschieden und hätte keine weitere Wirkung stattgefunden, so hätte im Laufe der Zeit eine merkliche Ablenkung der Mondaxe eintreten müssen. Aus dem Vorhergehenden leuchtet nun ein, wie dadurch, dass die grösste Mondaxe der Erde zugekehrt ist, diese Axe um die Lage, welche sie einnähme, wenn die Rotations- und Umlaufsgeschwindigkeit genau gleich und keine weiteren Wirkungen vorhanden wären, um Weniges herumschwankt, wofern nur der anfängliche Unterschied zwischen der Rotations- und mittleren Umlaufsgeschwindigkeit nicht allzu bedeutend war.

---

* Daselbst S. 52 Z. 2 v. o. lese man: „b steht" statt „besteht".

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Ueber die Verallgemeinerung einer Erzeugungsart der Curven zweiten Grades.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 16—18.)

Die Erzeugungsweisen der Curven lassen sich eintheilen in *metrische* und *projectivische*. Je nachdem die Curve *in ihrer Erzeugung* oder *als fertiges Gebilde* betrachtet wird, finden jene ihre analytische Darstellung vermittelst der *inneren* oder der *complexen*, diese vermittelst der *äusseren* oder der *algebraischen Multiplication*. — Nur die Curven zweiten Grades scheinen bis jetzt nach allen diesen Richtungen hin untersucht zu sein, und zwar waren es bei diesen die einfachen metrischen Erzeugungsweisen (des Kreises mittelst Zirkel, der Ellipse mittelst der bekannten Fadenconstruction), welche sich der Untersuchung zuerst darboten. Erst die neuere Zeit brachte für diese und bald auch für die höheren Curven die projectivischen Erzeugungsweisen, während die metrische Erzeugung der letzteren noch im Rückstand geblieben ist.

Im Folgenden soll eine Verallgemeinerung der metrischen Erzeugung der Curven zweiten Grades versucht werden, wobei es vorzugsweise darauf ankommen wird, im Allgemeinen festzustellen, welche Resultate sich von Untersuchungen dieser Art erwarten lassen.

Wenn die elementare Aufgabe gestellt wird, den Ort eines Punktes zu bestimmen, für welchen die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist, so dass

$$r_1 + r_2 = c,$$

so ergiebt sich bekanntlich als Lösung eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem r_1 und r_2 gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Und wenn e die Entfernung der beiden Punkte ist, so ist stets nur die Ellipse oder die Hyperbel reell, je nachdem $c >$ oder $< e$. Versteht man daher in obiger Aufgabe unter „Summe“ die *algebraische Summe* (beide Fälle: $r_1 + r_2$ und $r_1 - r_2$ umfassend), so ist der Ort des Punktes **ein Paar von Kegelschnitten, von denen der eine reell, der andere imaginär ist.** Oder: Für einen bestimmten Werth von c liefert stets nur *einer* der beiden Fälle $(r_1 + r_2)$ und $(r_1 - r_2)$ eine reelle Curve.

Verwandelt man die Gleichung $r_1+r_2=c$ in eine Gleichung zwischen rechtwinkligen oder Dreipunkt-Coordinaten, so erhält man die Form

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c,$$

worin a und b Functionen zweiten Grades der Coordinaten sind. Durch Entfernung der Wurzeln würde man eine Gleichung vierten Grades erhalten, wenn nicht Glieder auf beiden Seiten der Gleichung sich aufhöben.

Nach diesen Vorbemerkungen, deren Vergleichung später von Nutzen sein wird, wenden wir uns zu der Aufgabe: Den geometrischen Ort eines Punktes x zu bestimmen, für welchen die algebraische Summe der Entfernungen von drei gegebenen Punkten constant ist.

Unter der Annahme, dass die drei festen Punkte e_1, e_2, e_3 nicht in gerader Linie liegen, können wir den variablen Punkt x aus e_1, e_2, e_3 mittelst der Gleichung ableiten*

$$1) \qquad x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3,$$

worin x_1, x_2, x_3 Zahlen sind und $(e_1e_2e_3)=1$ ist. Wir können ferner annehmen, dass x ein einfacher Punkt (Punkt mit dem Coefficienten 1) sei, so dass

$$2) \qquad x_1+x_2+x_3=1.$$

Aus 1) ergeben sich dann sogleich die Entfernungen des Punktes x von e_1, e_2, e_3, wie folgt:

$$(x-e_1)=x_2(e_2-e_1)+x_3(e_3-e_1),$$
$$(x-e_2)=x_3(e_3-e_2)+x_1(e_1-e_2),$$
$$(x-e_3)=x_1(e_1-e_3)+x_2(e_2-e_3)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$(e_1-e_2)=\varepsilon_3, \quad (e_2-e_3)=\varepsilon_1, \quad (e_3-e_1)=\varepsilon_2$$

setzen,

$$(x-e_1)=x_3\varepsilon_2-x_2\varepsilon_3, \quad (x-e_2)=x_1\varepsilon_3-x_3\varepsilon_1, \quad (x-e_3)=x_2\varepsilon_1-x_1\varepsilon_2.$$

In diesen Ausdrücken sind aber nicht nur die numerischen Werthe der drei Strecken, sondern auch ihre Richtungen enthalten. Da nun der numerische Werth einer Ausdehnungsgrösse gleich der positiven Quadratwurzel aus ihrem innern Quadrat ist, so erhält man, wenn die Summe dieser numerischen Werthe mit s bezeichnet wird, als Gleichung des gesuchten Ortes zunächst

$$3) \qquad \sqrt{(x_3\varepsilon_2-x_2\varepsilon_3)^2}+\sqrt{(x_1\varepsilon_3-x_3\varepsilon_1)^2}+\sqrt{(x_2\varepsilon_1-x_1\varepsilon_2)^2}=s.$$

Es ist ferner, wenn wir die Buchstaben e wieder einführen,

$$(x_3\varepsilon_2-x_2\varepsilon_3)=x_3(e_3-e_1)-x_2(e_1-e_2)=x_2e_2+x_3e_3-(x_2+x_3)e_1$$

und nach den Gesetzen der Raumlehre

* Hier, wie in den unmittelbar folgenden Rechnungen setze ich die in den Grassmann'schen Werken, sowie in meiner „Raum ... stellten Begriffe und Gesetze voraus.

$$(x_3\varepsilon_2 - x_2\varepsilon_3)^2 = x_2^2 + x_3^2 + (x_2+x_3)^2.$$

Wenn wir diesen und die analog gebildeten Ausdrücke in der Gleichung 3) einsetzen, so geht sie über in

$$\sqrt{x_2^2+x_3^2+(x_2+x_3)^2}+\sqrt{x_3^2+x_1^2+(x_3+x_1)^2}+\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2}=s$$

oder, wenn wir die Klammern lösen, durch $\sqrt{2}$ dividiren und $s:\sqrt{2}=\lambda$ setzen,

4) $$\sqrt{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+\sqrt{x_3^2+x_3x_1+x_1^2}+\sqrt{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}=\lambda,$$

wobei man, um die Homogenität herzustellen, zu λ noch den Factor $(x_1+x_2+x_3)$ fügen kann.

Die Gleichung 4) ist nun die Gleichung einer Curve, welche den geometrischen Ort des Punktes x repräsentirt. Um diese Gleichung zu transformiren, schreiben wir sie in der Form

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\lambda,$$

schaffen $\sqrt{c}$ nach rechts und erhalten durch eine kurze Rechnung, wobei noch

$$c-a-b=d$$

gesetzt wird,

$$16\lambda^2(\lambda^2+d)^2c=[(\lambda^2+d)^2+4\lambda^2c-4ab]^2.$$

Löst man dann die Klammern, ordnet nach Potenzen von λ^2 und stellt die Coefficienten derselben durch die Ausdrücke $(d-2c)$ und (d^2-4ab) dar, so findet sich leicht, dass die Gleichung sich auf folgende Form bringen lässt:

5) $$[\lambda^4+2\lambda^2(d-2c)+(d^2-4ab)]^2=64\lambda^2abc.$$

Setzt man noch

6) $$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=v,$$

so ergiebt sich in Verbindung mit 2)

$$a=1-v-x_1,\quad b=1-v-x_2,$$
$$c=1-v-x_3,\quad d=v-2x_3,$$
$$(d-2c)=3v-2,\quad (d^2-4ab)=-3v^2,\quad abc=v^2-v^3-x_1x_2x_3.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in 5) erhält man

7) $$[\lambda^4+2\lambda^2(3v-2)-3v^2]^2=64\lambda^2(v^2-v^3-x_1x_2x_3).$$

Auch diese Gleichung kann man durch Hinzufügung passender Potenzen von $(x_1+x_2+x_3)$ homogen machen. Ihre Variablen sind dann die drei Functionen

$$(x_1+x_2+x_3),\quad (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1),\quad (x_1x_2x_3).$$

Die Curve besitzt im Allgemeinen den achten Grad. Daraus geht hervor, dass in der Gleichung 4) die Wurzeln mit allen möglichen Zeichencombinationen genommen werden können und dass die Gleichungen

$$+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\lambda,\quad +\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=\lambda,$$
$$+\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}=\lambda,\quad -\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\lambda$$

nicht vier verschiedene Curven (wie es die Analogie mit den Kegelschnitten fordern würde), sondern vier Zweige derselben Curve repräsentiren. Es ist ferner leicht zu sehen, dass die Curve (für endliche Werthe von λ) keine unendlich fernen Punkte besitzen kann, denn keine der vier Zeichencombinationen ist mit einem gleichzeitigen Wachsen der Grössen a, b, c ins Unendliche vereinbar.

Um zu erfahren, in welchem Falle die Curve durch die Ecken des gegebenen Dreiecks geht, setzen wir mit Rücksicht auf 1) $x_2 = x_3 = 0$. Dann ist auch $v = 0$ und die Gleichung 7) liefert die Bedingung

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0,$$

daher $\lambda = 0, +2, -2$. Da dieselbe Bedingung auch für die Annahmen $x_1 = x_2 = 0$ und $x_1 = x_3 = 0$ sich ergiebt, so folgt, dass in den Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = 2$ die Curve durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks geht.*

Für $\lambda = 2$ erhält Gleichung 7) die besondere Form

$$(24v - 3v^2)^2 = 256(v^2 - v^3 - x_1 x_2 x_3).$$

Setzt man hier $x_1 = 0$, so wird $v = x_2 x_3$. Und da alsdann die Gleichung durch v^2 theilbar ist, so sind zwei Werthe von $x_2 x_3$ gleich Null, d. h. die Punkte e_2 und e_3 sind Doppelpunkte der Curve. Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, von e_1. — Zur Veranschaulichung giebt Fig. 16 ein Bild der Curve für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks, entsprechend dem Werthe $\lambda = 2$.

Aus dieser Specialform der Curve kann man durch Anwendung eines einfachen Princips** allgemeinere Formen erhalten. Indem man zunächst das gleichseitige Dreieck beibehält, aber λ sich ändern lässt, werden auch die neun Doppelpunkte der Curve zum Theil sich auflösen. Im Allgemeinen gestattet jeder Doppelpunkt (Knotenpunkt) eine zweifache Durchschneidung des Knotens. Da jedoch die Curve in Bezug auf die Transversalen des gleichseitigen Dreiecks symmetrisch bleibt, so wird für je drei, ein gleichseitiges Dreieck bildende Knotenpunkte nur ein und dieselbe Auflösung des Knotens stattfinden. Ueberhaupt ist es fraglich, wieviele Combinationen dieser an den drei Tripeln zu vollziehenden Auflösungen und durch welche Variationen von λ dieselben entstehen.

Eine weitere Verallgemeinerung der Curvenform entsteht, wenn die drei Fundamentalpunkte nicht ein gleichseitiges, sondern ein beliebiges Dreieck bilden.

Für $\lambda = 0$ erhält Gleichung 7) die besondere Form

$$v = 0,$$

---

* Auch Gleichung 4) giebt in diesem Falle $\pm x_1 \pm x_1 = \lambda$, daher, weil die Zeichen links unabhängig von einander sind, $\lambda = 0, +2, -2$.

** Vergl. den Artik[illegible] den „Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societä[illegible] 1873.

d. h.: Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die algebraische Summe der Entfernungen von drei festen Punkten gleich Null ist, ist ein Kegelschnitt, und zwar (mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung hinsichtlich der unendlich fernen Punkte) eine Ellipse.

Ist das Dreieck gleichseitig, so geht die Ellipse durch die Ecken des Dreiecks und verwandelt sich in einen Kreis. Man erhält dann den bekannten elementaren Satz:

Verbindet man einen beliebigen Punkt der Kreislinie mit den Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, so ist die mittlere Verbindungslinie gleich der Summe der beiden anderen.

Hinsichtlich der oben gefundenen Curve achten Grades tritt uns nun sogleich eine wichtige Frage entgegen, die ich hier nur anregen will: Giebt es ausser dem Falle $\lambda = 0$ noch Werthe der gegebenen Summenstrecke, welche, in Verbindung mit einer besondern Form des Dreiecks, eine Reduction der Curve auf einen niederen Grad oder ein Zerfallen derselben in Curven niederen Grades bewirken? — Welche Modification erleidet die Curve in dem Falle, wo die drei gegebenen Punkte auf derselben Geraden liegen? (Ohne besondere Untersuchung ist nur zu erkennen, dass in diesem letzteren Falle die Curve in Bezug auf die Gerade symmetrisch liegt.) Es wird besonders interessant sein, zu erfahren, ob und für welche Curven niederen Grades eine mit den Kegelschnitten analoge metrische Erzeugung existirt.

Da von der oben besprochenen Erzeugung offenbar alle Curven mit unendlich fernen Punkten ausgeschlossen sind, so kann man ferner die Curven untersuchen, für deren Punkte die Summe der Entfernungen von vier Punkten constant ist. Diese Curven werden offenbar unendlich ferne Punkte besitzen, da die Summe von zwei positiv unendlichen Entfernungen sich gegen diejenige zweier negativ unendlichen bis auf eine beliebige endliche Grösse aufhebt.

Es können endlich alle diese Aufgaben im Gebiete des Raumes betrachtet werden. Man erhält dann, sobald die gegebenen festen Punkte auf derselben Geraden liegen, eine Rotationsfläche und, falls sie in derselben Ebene liegen, eine Fläche, welche in Bezug auf diese Ebene symmetrisch ist.

Zum Schluss möge noch eine Construction Erwähnung finden, welche, als Erweiterung der Fadenconstruction der Ellipse, für n beliebige feste Punkte denjenigen Zweig der Curve liefert, für welchen alle Entfernungen positiv sind.

Es seien die festen Punkte durch aufrechte, auf einer Tafel befestigte ... der die Curve erzeugende Punkt durch einen kleinen Ring dar-

gestellt. Legt man den Ring auf eine beliebige Stelle der Tafel, schlingt einen Faden abwechselnd um einen der Stifte und durch den Ring, bis sämmtliche Stifte benutzt sind, und verbindet endlich die beiden Enden des Fadens, so kann man bei straff gezogenem Faden in dem Ringe einen Bleistift bewegen, welcher die verlangte Curve erzeugt. Denn die Gesammtlänge des Fadens ist unveränderlich und gleich der doppelten Summe der Entfernungen des variablen Punktes x von den festen Punkten $p_1, p_2, \ldots$ (s. Fig. 17). Theoretisch gilt diese Construction auch für die oben erwähnten Flächen. — Auf die Ellipse angewendet, hat diese Construction vor der gewöhnlichen den Vorzug, dass die Reibung des Bleistiftes an dem Faden vermieden wird und dass ersterer nahezu immer an demselben Punkte des Ringes festliegt. Eine zweite, ähnliche Constructionsweise zeigt Fig. 18.

Waren, im April 1875. V. Schlegel.

XIX. Ueber die Verallgemeinerung der partiellen Integration.

Bezeichnet u eine von x abhängige Variabele, so ist bekanntlich

$$\frac{d\varphi(u,x)}{dx}=\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x}=\frac{d\varphi(u,x)}{dx}-\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx},$$

daher auch, wenn mit dx multiplicirt und integrirt wird,

$$1)\qquad \int\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x}\,dx=\varphi(u,x)-\int\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx.$$

Setzt man weiter

$$2)\qquad \frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x}=f(u,x),$$

so folgt

$$3)\qquad \varphi(u,x)=\int f(u,x)\,\partial x,$$

wobei sich die Integration [ebenso wie die Differentiation in 2)] partiell auf x bezieht, so dass für diese Integration u als Constante zu betrachten ist. Nach Substitution von 2) und 3) wird nun aus Nr. 1

$$4)\qquad \int f(u,x)\,dx=\int f(u,x)\,\partial x-\int\left\{\frac{\partial}{\partial u}\int f(u,x)\,\partial x\right\}\frac{du}{dx}\,dx,$$

die sich in folgendem Satze aussprechen lässt:

Bei der Integration einer Function kann man einen beliebigen variabelen Bestandtheil derselben vorläufig als constant ansehen und nachher den Fehler dadurch ausgleichen, dass man von dem vorläufigen *Integrationsresultate das Integral* derjenigen Function subtrahirt, welche

seine Derivirte sein würde, wenn in ihm nur der als Constante behandelte Bestandtheil variabel wäre.

In dem speciellen Falle, wo $f(u, x)$ von der Form $u F(x)$ ist, wird

$$\int f(u, x)\,\partial x = \int u\,F(x)\,\partial x = u\int F(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\int f(u, x)\,\partial x = \frac{\partial}{\partial u}\left(u\int F(x)\,dx\right) = \int F(x)\,dx,$$

und damit geht die Formel 4) über in

$$\int u\,F(x)\,dx = u\int F(x)\,dx - \int\left\{\int F(x)\,dx\right\}\frac{du}{dx}\,dx,$$

d. h. in die Formel für die partielle Integration.

Als Beispiel für die allgemeine Formel 4) diene das Integral

$$\int x(a + bx + cx^2)^m\,dx.$$

Setzt man $bx = u$ und betrachtet u vorläufig als Constante, so ist

$$\int x(a + u + cx^2)^m\,\partial x = \frac{(a + u + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\int x(a + u + cx^2)^m\,\partial x = \frac{(a + u + cx^2)^m}{2c},$$

mithin nach Nr. 4)

$$\int x(a + u + cx^2)^m\,dx = \frac{(a + u + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c} - \int\frac{(a + u + cx^2)^m}{2c}\cdot\frac{du}{dx}\,dx$$

und nach Restitution des Werthes $u = bx$

$$\int x(a + bx + cx^2)^m\,dx = \frac{(a + bx + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c} - \frac{b}{2c}\int(a + bx + cx^2)^m\,dx.$$

Ueberhaupt erweist sich die Formel dann als nützlich, wenn ein Factor der zu integrirenden Function die Derivirte des andern Factors sein würde, falls gewisse Bestandtheile des letzteren (wie vorhin bx) constant wären.

Hiernach unterliegt es auch keiner theoretischen Schwierigkeit, vorläufig mehrere Bestandtheile der Function f als Constanten zu betrachten; die allgemeine Formel dafür ist

$$\int f(u_1, u_2, \ldots u_n, x)\,dx$$

$$= \int f(u_1, u_2, \ldots u_n, x)\,\partial x - \sum_{p=1}^{p=n}\int\left\{\frac{\partial}{\partial u_p}\int f(u_1, u_2, \ldots u_n, x)\,\partial x\right\}\frac{du_p}{dx}\,dx.$$

(Aus einem Briefe des Herrn Dr. Worpitzky in Charlottenburg.)

———

XX. Ueber elliptische Integrale.

Bekanntlich genügen die Abel'schen Integrale linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten in Bezug auf ihre Classenmoduln. Diese Gleichungen enthalten im Allgemeinen ein von der Unbekannten freies Glied, sind also in gebräuchlicher Ausdrucksweise complete Differentialgleichungen. Die Differentialgleichung, welche man durch Fortlassung dieses Gliedes erhält, die reducirte, wird durch bestimmte Abel'sche Integrale, nämlich durch Periodicitätsmoduln befriedigt. Kennt man aber die Lösung einer linearen reducirten Differentialgleichung, so findet man daraus die der completen durch blose Quadratur, und man gewinnt somit eine Darstellung von Abel'schen Integralen durch andere, bei denen die Veränderliche der ersteren nur noch als Parameter auftritt, also durch bestimmte Integrale. Es ist mir nicht bekannt, dass eine solche Darstellung schon gegeben sei, obgleich die Differentialgleichungen wohlbekannt sind. Für das überall endliche elliptische Integral ergiebt sich auf diese Weise eine Darstellung durch zwei bestimmte Integrale dritter Gattung. Obgleich diese Relation mit Hilfe der Thetafunctionen ausserordentlich leicht aufgestellt werden kann, so scheint mir doch die Verfolgung des eben verzeichneten Weges nicht ohne Interesse, weshalb ich hier eine Herleitung jener Darstellung auf diesem Wege mittheile, die nachher noch durch Thetafunctionen verificirt wird.

Das überall endliche Integral sei

$$u(\xi) = u = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}.$$

Zur Abkürzung diene die Bezeichnung

$$\varkappa + \varkappa' = 1, \quad \sigma(\xi) = \sigma = \sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}, \quad u(1) = K, \quad u(\infty) = iK'.$$

Es ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} u, & \dfrac{\partial u}{\partial \varkappa}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2} \\ K, & \dfrac{\partial K}{\partial \varkappa}, & \dfrac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \\ K', & \dfrac{\partial K'}{\partial \varkappa}, & \dfrac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix}$$

eine zweiwerthige Function von ξ, die nur in algebraischer Weise unendlich wird, und folglich eine algebraische Function von ξ, welche durch die Art, wie sie unendlich wird, leicht construirt werden kann. Die hieraus entspringende [illegible]tialgleichung ist bekannt (vergl. meine Theorie der com[illegible]tionen, 2. Aufl., S. 116, wo-

selbst für den Factor $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite $\frac{1}{4}$ zu setzen ist), und schreibt sich

$$U = \varkappa(\varkappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2} + (2\varkappa-1)\frac{\partial u}{\partial \varkappa} + \tfrac{1}{4}u = \frac{\sigma}{4(1-\varkappa\xi)^2}.$$

Die reducirte Differentialgleichung $U=0$ wird durch die Periodicitätsmoduln K und K' oder durch $u(1)$ und $u(\infty)$ befriedigt, und man kann daher die Lösung der completen Differentialgleichung durch eine Quadratur nach $\varkappa$ (vergl. Baltzer, Determinanten, § 10, 4) finden. Berücksichtigen wir die bekannte Gleichung

$$K\frac{\partial K'}{\partial \varkappa} - K'\frac{\partial K}{\partial \varkappa} = \frac{-\pi}{4\varkappa\varkappa'},$$

so finden wir für u die Lösung

$$u = K'\int^{\varkappa}\frac{\sigma.K.d\varkappa}{\pi(1-\varkappa\xi)^2} - K\int^{\varkappa}\frac{\sigma.K'd\varkappa}{(1-\varkappa\xi)^2},$$

in welcher die unteren Grenzen der Integrale noch zu bestimmen, aber von $\varkappa$ unabhängig sind. Hieraus folgt

$$2\pi u = \sqrt{\xi(1-\xi)}\,K'\int^{\varkappa}d\varkappa\int_0^1\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\varkappa\xi)^3}\,\sigma(\lambda)}$$
$$+ i\sqrt{\xi(1-\xi)}\,K\int^{\varkappa}d\varkappa\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\varkappa\xi)^3}\,\sigma(\lambda)},$$

und durch Vertauschung der Integrationsreihenfolgen

$$2\pi u = \sqrt{\xi(1-\xi)}\,K'\int_0^1\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}\int^{\varkappa}\frac{d\varkappa}{(1-\varkappa\xi)\sqrt{(1-\varkappa\xi)(1-\varkappa\lambda)}}$$
$$+ i\sqrt{\xi(1-\xi)}\,K\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}\int^{\varkappa}\frac{d\varkappa}{(1-\varkappa\xi)\sqrt{(1-\varkappa\xi)(1-\varkappa\lambda)}}.$$

Die Integrationen nach $\varkappa$ lassen sich ausführen, da ja

$$\int^{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{(1-\varkappa\xi)\sqrt{(1-\varkappa\xi)(1-\varkappa\lambda)}} = \frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda}\,\frac{2}{\sqrt{(1-\varkappa\xi)(1-\varkappa\lambda)}} + const.$$

ist, und so folgt denn weiter, wenn $\alpha\pi$, $\alpha'\pi i$ von $\varkappa$ unabhängige Constanten sind,

$$u\pi + \alpha K\pi + \alpha' i K'\pi = \frac{\sigma.K'}{1-\varkappa\xi}\int_0^1\frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{i\sigma.K}{1-\varkappa\xi}\int_0^{\infty}\frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)},$$

und die gesuchte Darstellung von u durch bestimmte Integrale dritter Gattung ist gefunden, sobald α, α' bestimmt sind.

Setzen wir $\varkappa=0$, so muss Das, was mit K' multiplicirt ist, verschwinden, weil K' unendlich wird, während alles Andere endlich bleibt, wobei K gleich $\frac{1}{2}\pi$ wird. Daraus folgt

$$\sqrt{\xi(1-\xi)}\int_0^1 \frac{d\lambda}{(\xi-\lambda)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}=i\alpha'\pi.$$

Es ist demnach α' eine ungerade Zahl.

Für $\varkappa=1$ ist K unendlich, K' endlich.* Also muss

$$i\sqrt{\xi(1-\xi)}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\xi-\lambda)}\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}=\alpha\pi$$

und demnach auch α eine ungerade Zahl sein.

Nun soll noch das erhaltene Resultat *a posteriori* durch Anwendung der Thetafunctionen als richtig erwiesen werden, was, wie schon oben erwähnt, leicht möglich ist.

Setzt man

$$\sqrt{\xi}=\sin am\, u,\quad \sqrt{\lambda}=\sin am\, v,$$

$$\theta_g^h(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)}\, e^{\frac{-\pi K'}{K}\left(\frac{2m+h}{2}\right)^2+\frac{(2m+h)}{2}\left(\frac{\pi u i}{K}+g i\pi\right)},$$

so ist nach Jacobi

$$\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\sigma(\xi)}{1-\varkappa\xi}\,\frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)}=-v\frac{\partial}{\partial u}lg\,\theta_0{}^1(u)+\frac{1}{2}lg\frac{\theta_1{}^1(u+v)}{\theta_1{}^1(u-v)},$$

und da für $\lambda=1$ $v=K$ und für $\lambda=\infty$ $v=iK'$ ist, so folgt hieraus

$$\frac{\sigma}{1-\varkappa\xi}K'\int_0^1 \frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)}=-2KK'\frac{\partial}{\partial u}lg\,\theta_0{}^1(u)+K'\,lg\frac{\theta_1{}^1(u+K)}{\theta_1{}^1(u-K)}$$
$$=-2KK'\frac{\partial}{\partial u}lg\,\theta_0{}^1(u)+K'\,lg(-1),$$

---

* Die Art, wie K für $\varkappa=1$ unendlich wird, findet man, wie folgt:

$$K=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sigma(\xi)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}\cdot\frac{1-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\xi\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\xi}(1-\varkappa\xi)(1+\sqrt{\xi})}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}lg\frac{1+\sqrt{\varkappa}}{1-\sqrt{\varkappa}}.$$

Demnach ist

$$\lim_{\varkappa=1}\left(K-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}lg\frac{1+\sqrt{\varkappa}}{1-\sqrt{\varkappa}}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\xi}{1+\sqrt{\xi}}=lg\,2.$$

$$\frac{\sigma . i}{1-\varkappa\xi} K \int_0^\infty \frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} = 2KK' \frac{\partial}{\partial u} lg\,\theta_0{}^1(u) + iK\,lg \frac{\theta_1{}^1(u+iK')}{\theta_1{}^1(u-iK')}$$

$$= 2KK' \frac{\partial\, lg}{\partial u} \theta_0{}^1(u) + iK\,lg\left(-e^{\frac{\pi K'}{K}} . e^{\frac{-(u-iK')i\pi}{K}}\right)$$

$$= 2KK' \frac{\partial\, lg}{\partial u} \theta_0{}^1(u) + u\pi + iK\,lg(-1).$$

Setzt man nun $lg(-1)$ im ersten Falle gleich $\alpha' i\pi$, im zweiten $-\alpha i\pi$, unter α, α' ungerade Zahlen verstanden, so folgt durch Addition wieder

$$u\pi + \alpha\pi K + \alpha' i\pi K' = \frac{\sigma . K'}{1-\varkappa\xi} \int_0^1 \frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{\sigma i K}{1-\varkappa\xi} \int_0^\infty \frac{1-\varkappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)}.$$

Die ungeraden Zahlen α, α' sind ihrer Natur nach unbestimmt, weil u unendlich vieldeutig ist.

Freiburg i. B. J. Thomae.

XXI. Einfachste Formel für das Volumen des Prismatoids.

Im XVI. Jahrgang dieser Zeitschrift, S. 534, habe ich eine Formel mitgetheilt zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Polygons, wenn die Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und deren Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit einer beliebigen Richtung gegeben sind. Dieselbe heisst

$$1)\quad f = \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2 \sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(a_i \sin\alpha_i \sum_{k=i+1}^{k=n-1} a_k \cos\alpha_k\right) - \tfrac{1}{4}a_n^2 \sin 2\alpha_n .$$

Diese Formel giebt ein Mittel an die Hand zur directen Volumenberechnung der Körper, die zuerst Steiner und später unabhängig von ihm und auf anderem Wege Wittstein berechnen lehrten, und die von Letzterem den Namen Prismatoid erhalten haben, unter welchem Namen sie jetzt in allen neueren Lehrbüchern der Stereometrie betrachtet werden. Ich kann also die Kenntniss der wichtigsten Eigenschaften dieser Polyeder voraussetzen. Legt man parallel zu den beiden Grundflächen des Prismatoids eine Durchschnittsebene, so schneidet dieselbe die Oberfläche des Prismatoids in einem Polygon, dessen Seiten der Reihe nach den Seiten der beiden Grundflächen (beziehungsweise den Grundkanten) parallel sind und ihrer Länge nach sich als lineare Functionen einerseits dieser Seiten, andererseits des Abstandes der Durchschnittsebene von einer der Grundflächen erweisen. Seien nun G und g die beiden Grundflächen, x der Abstand des Durchschnittes $\varDelta$ von G, so ergiebt sich $\varDelta$ bei Anwendung der Formel 1) als eine ganze Function zweiten Grades von x.

Setzen wir $\varDelta = ax^2 + bx + c$, so lassen sich a, b, c und mithin auch $\varDelta$ für alle Werthe von x bestimmen, wenn der Werth von $\varDelta$ für drei Werthe von x bekannt ist.

Wählt man mit Steiner und Wittstein als Grundlage zu diesen Berechnungen die beiden Grundflächen G und g und den sogenannten mittleren Durchschnitt D, so hat man, wenn die Höhe $= h$ gesetzt wird, zur Bestimmung von a, b, c die drei Gleichungen

$$c = G, \quad ah^2 + bh + c = g, \quad \tfrac{1}{4}ah^2 + \tfrac{1}{2}bh + c = D.$$

Man erhält also

$$a = \frac{2(G+g) - 4D}{h^2}, \quad b = \frac{4D - 3G - g}{h}, \quad c = G.$$

Mit Hilfe der Integralrechnung oder auch auf elementarem Wege* findet man für das Volumen V des Prismatoids die Formel

$$2) \qquad V = \tfrac{1}{3}ah^3 + \tfrac{1}{2}bh^2 + ch$$

und, wenn man hierin für a, b, c die obigen Werthe setzt, die bekannte Steiner-Wittstein'sche Formel

$$V = \frac{h}{3}\left(2D + \frac{G+g}{2}\right).$$

Es liegt nun die Frage nicht sehr fern, ob nicht durch passende Wahl des ausser den beiden Grundflächen zu messenden Querschnittes das Messen beider Grundflächen auf das von einer derselben reducirt werden könne, ohne dass dadurch eine complicirtere Formel für V erhalten werde. Setzen wir, um diese Frage zu beantworten, voraus, man kenne den Durchschnitt $\varDelta$ in $\frac{1}{n}$ der Höhe über G, so haben wir zur Bestimmung von a und b die beiden Gleichungen

$$ah^2 + bh + G = g, \quad a\frac{h^2}{n^2} + b\frac{h}{n} + G = \varDelta.$$

Man erhält

$$a = \frac{ng + n(n-1)G - n^2\varDelta}{(n-1)h^2}, \quad b = \frac{n^2\varDelta - (n^2-1)G - g}{(n-1)h}$$

und

$$4) \qquad V = \frac{h}{6(n-1)}\left[(2n-3)g - (n-1)(n-3)G + n^2\varDelta\right].$$

Für $n = 3$ folgt hieraus

$$5) \qquad V = \frac{h}{4}(g + 3\varDelta)$$

und für $n = 1\tfrac{1}{2}$, also für $x = \tfrac{2}{3}h$, erhält man

---

* Siehe § 88 in dem unter der Presse befindlichen zweiten Theile meines Lehrbuches de Theil kürzlich bei Weidmann in Berlin erschienen

6) $$V=\frac{h}{4}(G+3\Delta),$$

zwei sehr einfache Formeln, welche beide den Satz ausdrücken:

Der Inhalt eines Prismatoids ist gleich einem Prisma von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich ist einem Viertel der Summe aus der einen Grundfläche und dem dreifachen ihr parallelen Durchschnitte, welcher ihren Abstand von der andern Grundfläche im Verhältnisse von 2:1 theilt.

Reducirt sich insbesondere die eine Grundfläche g auf eine Kante, so genügt zur Berechnung des Volumens die Ausmessung des Durchschnittes Δ in $\frac{1}{3}$ der Höhe und man hat

$$V=\tfrac{3}{4}h\Delta.$$

Wertheim a. M., im Mai 1877. JOHANN KARL BECKER, Gymnasialprofessor.

XXII. Geometrische Untersuchungen.

I.

Aus der bekannten Formel für den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises $r=abc:4\Delta$ folgt durch Projection die andere

1) $$E=\pi.\frac{r_{12}r_{23}r_{31}}{r},$$

nach welcher Formel der Flächeninhalt E einer Ellipse aus dem Umkreisradius eines ihr eingeschriebenen Dreiecks und den zu dessen Seiten parallelen Halbmessern der Ellipse gefunden werden kann. Fallen die drei Punkte zusammen, so wird $r_{12}=r_{23}=r_{31}=r'$, r wird der Krümmungsradius an dieser Stelle und es kommt $r=r'^3:ab$, ein bekannter Ausdruck.

Die Formel 1) kann noch anderweitig benützt werden. Sind vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 der Ellipse deren Schnittpunkte mit einem Kreise vom Radius r, so gelten weiter die Gleichungen

2) $$E=\pi r_{23}r_{34}r_{42}:r,$$
3) $$E=\pi r_{34}r_{41}r_{13}:r,$$
4) $$E=\pi r_{41}r_{12}r_{24}:r.$$

Die Multiplication von 1) mit 2) und 3) mit 4) und die nachherige Division der zwei Producte liefern $r^2_{23}=r^2_{41}$. Nun können zwei (verschieden gerichtete) Ellipsenhalbmesser nur dann gleich sein, wenn ihre Richtungen zu den Axenrichtungen der Ellipse symmetrisch sind. Also folgt: Bilden vier Punkte einer Ellipse ein Kreisviereck, so sind je zwei gegenüberliegende Seiten desselben gegen die Axen der Ellipse gleich geneigt. [Dieser Satz (ohne Beweis) rührt bekanntlich von Jacob Steiner her.]

Lassen wir nun drei dieser Punkte, A_1, A_2, A_3, in A zusammen- f ... ird der vierte Punkt A_4 der Schnittpunkt B des in A die

Ellipse osculirenden Kreises mit der Ellipse und der ausgesprochene Satz lautet jetzt: Die Richtung der Osculationstangente und die Richtung der Verbindungslinie des Osculationspunktes A mit dem Schnittpunkte B sind symmetrisch zu den Axenrichtungen. Mittelst dieses Resultates lässt sich ein Steiner'scher Satz über die Krümmungskreise der Ellipse in sehr eleganter Art beweisen.

Ist nämlich B gegeben, so kann man um jene Punkte A fragen, deren Krümmungskreise durch B gehen. Verbindet man B mit einem Ellipsenpunkte P, zieht durch P eine zu PB bezüglich der Axenrichtungen symmetrische Gerade τ und lässt P auf der Ellipse sich bewegen, so hüllen alle τ eine C_3^4 ein, welche die Ellipse dreimal und g_∞ zweimal (in ihren Schnittpunkten mit der Ellipse) berührt. Denn sie ist das Erzeugniss der Punktreihe P auf der Ellipse und einer ihr projectivischen auf g_∞. Es geschieht also dreimal, dass τ eine Ellipsentangente wird, und in jedem solchen Falle ist sie eine der gesuchten Osculationstangenten. Es giebt demnach drei Krümmungskreise, welche durch B gehen.

Wenn B' der dem B entsprechende Punkt auf dem Hauptkreise (über der grossen Axe als Durchmesser) ist und für B' die analoge Construction von τ' an dem Hauptkreise ausgeführt worden wäre, so hätte man als Einhüllende der τ' eine Steiner'sche Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten erhalten, welche den Hauptkreis in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks berührt hätte. Vermöge der Affinität der Punktreihen B und B' und des Umstandes, dass sich in dieser Affinität τ und τ' entsprechen, folgt, dass die drei Punkte A auf der Ellipse ein Dreieck grössten Inhalts $A'A''A'''$ bilden. In einem solchen ist nun die Tangente eines Eckpunktes parallel der Gegenseite. Also ist die Tangente τ_1 von A' parallel zu $A''A'''$ und da BA''' symmetrisch zu τ_1 ist gemäss dem Obigen, so ist BA' auch symmetrisch zu $A''A'''$; die vier Punkte $BA'A''A'''$ liegen demnach so, dass je zwei Gegenseiten gegen die Axenrichtungen symmetrische Richtungen besitzen, d. h. sie bilden dem oben bewiesenen Satze zufolge ein Kreisviereck. Alles zusammengefasst, giebt den Satz:

„Durch jeden Punkt der Ellipse gehen stets drei und nur drei anderweitig osculirende Kreise. Deren Osculationspunkte bilden ein der Ellipse eingeschriebenes Dreieck maximalen Inhalts und liegen mit dem gegebenen Punkte selbst auf demselben Kreise.“*

Die Formel 1) giebt auch den Nachweis dafür, dass das „Product aus den Krümmungsradien der Eckpunkte eines eingeschrie-

* In ganz anderer Art haben diesen Satz bewiesen: Joachimsthal, Cr. J. Bd. 36, und Herr *August*, *Cr.-Borch. J.* Bd. 68.

war [illegible]
Sah[illegible]
Elli[illegible]
Spe[illegible]

[illegible]

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXIII. Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1878.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Philosophie der Mathematik.

Arithmetik und Analysis.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Synthetische und analytische Geometrie.

Geodäsie.

Mechanik, Physik, Telegraphie.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler.

Von

Moritz Cantor.

Als Paul Heinrich von Fuss im Jahre 1843 im Auftrage der Petersburger Akademie die beiden stattlichen Bände herausgab, welche unter dem Titel *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle* historisch unschätzbare Briefe von Euler, von Goldbach, von verschiedenen Mitgliedern der Gelehrtenfamilie Bernoulli u. s. w. enthalten, da stellte er auf Seite XXXV der Vorrede die mögliche Erscheinung auch noch eines dritten Bandes in Aussicht. Zu diesem Zwecke hoffe er durch Vermittelung von C. G. J. Jacobi, der für diese Veröffentlichung — er hätte sagen können: für Alles, was auf die Geschichte der Mathematik sich bezog — das lebhafteste Interesse an den Tag legte, in Besitz einer ganzen Sammlung von Briefen Euler's an Lagrange zu gelangen, damals das Eigenthum des unermüdlichen, in seinen Mitteln nicht sehr wählerischen Sammlers Libri. Jener 3. Band ist bekanntlich nicht erschienen. Dafür kamen 1862 die *Opera postuma* Euler's heraus nach 1844 in unerwarteter Weise entdeckten Manuscripten. Wieder war es Paul Heinrich von Fuss, dem die Petersburger Akademie den Auftrag ertheilt hatte, den Druck zu überwachen, und nach dessen 1855 erfolgtem Tode trat Nicolaus von Fuss in die Stelle des Bruders. Im 1. Bande der *Opera postuma* S. 555—588 befinden sich 18 Briefe Euler's an Lagrange aus den Jahren 1755—1775, welche der Herausgeber, wie es in der Vorrede S. V heisst, zu anderem Zwecke gesammelt hatte. Jenes vorerwähnte Libri'sche Exemplar war dazu allerdings nicht benutzt worden. Dasselbe ging nämlich am 17. Januar 1876 in den Besitz des Fürsten Boncompagni in Rom über, dessen freundlichen Mittheilungen wir die Thatsache entnehmen, dass die Libri-schen Briefe keineswegs die Originalien, sondern nur Abschriften seien, während dem Abdruck [illegible] Originalien selbst zu Grunde gelegen habe- [illegible] die Heraus-

geber der *Opera postuma* beigefügte Anmerkungen, von denen gleich noch die Rede sein wird. Wie und wann zwischen 1843 und 1862 die Originalbriefe nach Petersburg kamen, wohin sie dann gelangten, ist zweifelhaft. Am Wahrscheinlichsten dürften sie sich unter dem Nachlasse Lagrange's befinden, welcher Eigenthum der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften zu Paris ist und nunmehr zur Besorgung der Gesammtausgabe von Lagrange's Werken unter der Leitung von Herrn J. A. Serret dient.

Waren indessen die Briefe Euler's an Lagrange für das mathematische Publikum seit 1862 im Abdrucke vorhanden, so verhielt es sich ganz anders mit den Briefen Lagrange's an Euler. Sie schienen verloren, bis Professor Somof (der Wissenschaft am 8. Mai 1876 entrissen) Ende 1872 wenigstens einen Theil derselben in dem Archive des Conferenzensaales der Petersburger Akademie entdeckte. Vier Briefe gehörten einem Convolute an, welches die Aufschrift trägt: L. Euler's Briefwechsel 1749 bis 1755, sieben Briefe einem zweiten Convolute mit der Aufschrift: L. Euler's Briefwechsel 1756 bis 1766. Sie gehören also sämmtlich der Zeit an, zu welcher Euler sich in Berlin, Lagrange in Turin aufhielt, und entsprechen den zehn aus Berlin datirten Briefen Euler's in den *Opera postuma I* S. 555—568, welche in einer Note zu S. 556 als von Euler eigenhändig geschrieben bezeichnet werden. Die acht aus Petersburg datirten Briefe (*Opera postuma I* S. 568—588) sind dagegen, einer zweiten auf S. 568 befindlichen Anmerkung zufolge, von der Hand derjenigen Schüler Euler's, die seit seiner Augenkrankheit ihm Secretärsdienste zu leisten pflegten, Joh. Albert Euler, J. A. Lexell, W. L. Krafft und Nicolaus Fuss.* Die Briefe Lagrange's an Euler aus diesem zweiten Zeitraume sind noch nicht wieder aufgefunden worden. Ob Spuren von ihnen in Paris nachweisbar sind, ist bei der fast übergrossen Geheimthuerei des dortigen Herausgebers für's Erste nicht zu ermitteln. Nachdem Fürst Boncompagni von dem Dasein der genannten elf Briefe durch eine Mittheilung von Prof. Somof von Ende November 1872 Kunde erhalten hatte, beschloss er, die Veröffentlichung derselben sich angelegen sein zu lassen, und so haben wir jetzt deren photolithographische Wiedergabe vor uns unter dem Titel: *Lettres inédites de Joseph Louis Lagrange à Leonard Euler tirées des archives de la salle des conférences de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg et publiées par B. Boncompagni. Saint-Pétersbourg MDCCCLXXVII.* Ein ziemlich ausführlicher Bericht über diese nach Form und Inhalt gleich hervorragende

* Diese beiden Anmerkungen, auf die vorher zum Beweise, dass der Abdruck in den *Opera postuma* auf den Originalbriefen beruhe, abgehoben wurde, finden sich nämlich nicht auch in der Libri'schen Abschrift, aus der die Briefe folglich nicht entnommen sein können, wie Fürst Boncompagni uns auf Anfrage freundlich [illegible]tigte.

und den Förderer der Wissenschaft, der sie veranstaltete, auf's Neue ehrende Veröffentlichung ist bereits am 15. März 1877 durch Herrn Angelo Genocchi der Turiner Akademie vorgelegt worden und in deren *Atti Vol. XII* zum Druck gekommen, in ähnlicher Weise, wie derselbe Verfasser 1869 im 4. Bande der *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino* über eine dem *Bulletino Boncompagni* von 1868 entnommene Abhandlung von Prof. Placido Tardy berichtete, deren Gegenstand die Erstlingsabhandlung von Lagrange (sein Brief an den Grafen Fagnano) bildete, und 1874 im 9. Bande der Atti über einige andere Briefe des Lagrange. So sehr wir die Gelehrsamkeit und den Scharfsinn anerkennen, welche Herr Genocchi so 1869, wie 1874, wie neuerdings an den Tag legte, so gern wir von dem, was er gefunden, in dem Folgenden Gebrauch machen werden, so glauben wir doch unseren Lesern nichts Unwillkommenes zu bieten, wenn wir die ganze Correspondenz zwischen Lagrange und Euler, soweit sie in sich ergänzenden Briefen vorhanden ist, also die elf neu herausgegebenen Briefe von Lagrange und die zehn ersten Briefe Euler's aus den *Opera postuma* (welche letztere Herr Genocchi gar nicht berücksichtigt hat) in einen Bericht zusammenfassen.

Schicken wir wenige biographische Notizen voraus, die uns klar machen, welches die gesellschaftliche Stellung von Lagrange und von Euler war zur Zeit, als ihr Briefwechsel begann.

Louis de la Grange Tournier wurde am 25. Januar 1736 zu Turin geboren. Er gehörte einer französischen, aus der Touraine übergesiedelten Familie an. Nach des Vaters Wunsche begann er mit juristischen Studien, neben welchen er sich dem von der Natur ihm vorgezeichneten Berufe als Mathematiker widmete. Die Werke Euklid's, mit denen er sich zuerst bekannt machte, gaben ihm zunächst eine Vorliebe für die synthetischen Methoden, welche er den algebraisch-analytischen vorzog, bis ihm eine Abhandlung von Halley die Kraft dieser letzteren Methoden enthüllte. Nun eignete er sich, ein 17jähriger Jüngling, ohne fremde Beihilfe den Inhalt der Schriften der Newton, Bernoulli, Euler, D'Alembert an und bildete sich so zu dem grossen Analytiker aus, als welchen die Mathematik und die mathematische Physik ihn verehren. Ende Juni 1754 war er noch nicht ganz $18^1/_2$ Jahr alt, hatte er noch Nichts veröffentlicht.

Leonhard Euler, geboren am 15. April 1707 in Basel, war im Juni 1754 etwas über 47 Jahre alt. Sein Sohn Albert Euler, ein Jahr älter als Lagrange, trat eben in dem Jahre 1754 durch eine von der Göttinger Societät mit dem Preise gekrönte Abhandlung über die Art und Weise, bei Wassermühlen den grössten Nutzeffect zu erzielen, in die wissenschaftliche Laufbahn ein, den sieggewohnten Fusstapfen des Vaters folgend. L[illegible]t hatte den ersten Petersburger Aufent-

halt hinter sich, war seit 1744 Director der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, in welcher Stellung er bis 1766 verblieb, worauf Lagrange sein Nachfolger wurde. Ausser zahlreichen Abhandlungen hatte er schon seine Mechanik (1736—1742), seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1748), seine *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1741), sämmtlich in lateinischer Sprache, durch den Druck bekannt gemacht.

Auf der einen Seite sehen wir also einen hochberühmten Gelehrten in der vollen Kraft seiner von Europa bewunderten Leistungen, auf der andern Seite einen unbekannten Anfänger, dessen Lebensjahre ihn fast noch zum Knaben stempeln würden, wenn die Reife seiner Gedanken ihn nicht als Mann bezeichnete.

1. Am 28. Juni 1754 richtete Lagrange seinen ersten Brief an Euler. Die Jahreszahl ist zwar nicht beigefügt, aber unzweifelhaft hat Herr Genocchi mit Recht angenommen, sie könne nur 1754 gewesen sein. An 1753 etwa zu denken, verbietet neben einem noch zu erwähnenden Umstande das damals allzujugendliche Alter des Briefstellers, und 1755 ist aus anderen Gründen unmöglich. Der bekannte Brief an Fagnano nämlich, welcher, durch den Druck vervielfältigt, die erste Veröffentlichung von Lagrange und zugleich seine einzige Veröffentlichung in italienischer Sprache bildet, rührt vom 23. Juli 1754 her, und der Brief an Euler, der Hauptsache nach mit jenem übereinstimmend, wäre gewiss nicht geschrieben worden, wenn Lagrange statt seiner ein gedrucktes Exemplar hätte überreichen können, ganz abgesehen davon, dass Lagrange noch 1754 erfuhr, seine vermeintliche Entdeckung sei nicht neu, dass er darüber die weitere Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen fast verschwor und somit sicherlich nicht ein halbes Jahr später noch darüber schreiben mochte, wie er es in dem Briefe an Euler gethan hat. Es handelt sich um die Vergleichung der beiden Formeln, welche den n^{ten} Differentialquotienten des Productes $u.v$ und die n^{te} Potenz der Summe $u+v$ darstellen, um den Nachweis der Identität der dabei auftretenden Coefficienten, um die Bemerkung, dass die Vertauschung von n mit $-n$ die Differentiation in eine Integration übergehen lasse. Gelegentlich des speciellen Falles, der in der Reihe

$$\int y\,dx = x.y - \frac{x^2}{2}.\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{2.3}.\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^4}{2.3.4}.\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$$

sich kundgiebt, fragt Lagrange, ob das nicht die Reihe sei, welche schon längst Leibnitz angegeben habe? Auch in dem gedruckten Briefe an Fagnano stellt Lagrange eine auf diese Reihe bezügliche Frage, nur heisst sie dort, und mit Recht, ob die Reihe nicht die des Johann Bernoulli sei, welcher sie im Novemberhefte 1694 der *Acta Eruditorum* veröffentlicht habe? Die besondere Reihe ist in der That Eigenthum von Johann Bernoulli und an dem genannten Orte zuerst mitgetheilt.

Leibnitz war etwas später, im Mai 1695, auf die Uebereinstimmung zwischen Differentiation und Potenzirung aufmerksam geworden und hatte die obwaltende Analogie unter der Voraussetzung ganzer positiver Werthe von n im I. Bande der *Miscellanea Berolinensia* 1710 zur allgemeinen Kenntniss gebracht, während die von jener Voraussetzung uneingeschränkte Formel seit 1745 in dem *Commercium epistolicum*, d. h. dem Briefwechsel zwischen Leibnitz und Johann Bernoulli, gedruckt die vermeintliche Entdeckung Lagrange's vorwegnahm. Lagrange erfuhr diese für den strebsamen Anfänger so peinliche Thatsache, wie bereits bemerkt, noch in dem Jahre 1754, aber nicht durch Euler. Dieser hat nämlich, wie aus der Beantwortung des zweiten Briefes hervorgeht, auf den ersten gar Nichts erwidert, weil Lagrange versäumt hatte, eine Adresse anzugeben, an die man ihm schreiben könne. So bemerkt ihm Euler erst unter dem 6. September 1755, dass in dem Leibnitz-Bernoulli'schen Briefwechsel, wie er meine, der Gegenstand schon erörtert sei, und auf eine zweite Frage, ob es denn wahr sei, dass Wolf gestorben, giebt er natürlich in so spätem Briefe gar keine Antwort. Wir berühren diese Frage auch nur deshalb, weil deren frühester möglicher Zeitpunkt im Einklange steht mit der durch Herrn Genocchi vorgeschlagenen Datirung des Briefes und letztere dadurch bestätigt. Christian von Wolf, damals ein berühmter Mann, starb nämlich im April 1754 in Halle. Die Erkundigung nach seinem Tode hat also nur im Juni 1754 einen bestimmten Anhalt.

2. Nach mehr als Jahresfrist, am 12. August 1755, wandte Lagrange sich in einem neuen Briefe an Euler und gab diesmal den Namen eines Turiner Bankiers, A. Durand, an, unter dessen Adresse er dringend eine Antwort erbittet. Mit diesem Schreiben beginnt die Geschichte von Lagrange's bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der Variationsrechnung. Lagrange's erste gedruckte Abhandlung über dieses Capitel der Mathematik findet sich in dem 1762 erschienenen II. Bande der *Miscellanea Taurinensia* und führt den Titel: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies.* In dem IV. Bande derselben Sammlung von 1769 vertheidigt Lagrange seine Methode gegen Angriffe von Fontaine und Anderen in dem Aufsatze: *Sur la méthode des variations*, in welchem er nach einigen Einleitungsworten erklärt: diese Methode, deren Name „Variationsrechnung" von Euler passend gewählt sei, habe er eben jenem grossen Geometer bereits 1755 mitgetheilt und dessen Zustimmung sich erfreut. Ja, der Aufsatz von 1762 sei gewissermassen auf Euler's Rath geschrieben, da dieser in einem Briefe vom 2. October 1759 ihm mittheilte, er habe nun auch weitere Untersuchungen auf dem gemeinsamen Gebiete angestellt, welche er aber, um Lagrange's Ruhm nicht im Wege zu stehen, zurückhalte, bis dieser erst seine Methode bekannt

gemacht haben werde. Diese Stelle war schon F. Giesel in seinem Torgauer Programm von 1857: „Geschichte der Variationsrechnung, I. Thl." nicht entgangen. Unter Anmerkung 98 ist sie abgedruckt. Heute besitzen wir nun die Briefe selbst, in welchen Lagrange dem Verfasser der *Methodus inveniendi etc.* die später so wichtig gewordene Erfindung des Zeichens δ zur Unterscheidung der Variationen von gewöhnlichen Differentiationen und die Anwendung desselben mittheilt. Der Brief vom 12. August 1755 insbesondere liest sich wie ein Excerpt aus der Abhandlung von 1762, wenn wir nicht wüssten, dass er derselben um 7 Jahre vorhergeht. Die drei allgemeinen Fälle $\int Z$ (so schreibt Lagrange auch noch in den *Leçons sur le calcul des fonctions* von 1806 S. 437 und häufiger, ohne dass ein Differential angegeben wäre, nach welchem integrirt werden soll) zu einem Maximum oder Minimum zu machen, je nachdem Z nur die Veränderlichen x, y und die Ableitungen von y, oder ausserdem noch eine Integralfunction Π von einem andern, in Bezug auf seine letzten Bestandtheile dem Z ähnlich zusammengesetzten (Z) enthalten soll, worauf $\delta(Z)$ entweder von $\delta\Pi$ frei sein oder dasselbe enthalten kann, werden wie in dem *Essai d'une nouvelle méthode* unterschieden und unter Anwendung fast der gleichen Buchstaben in allgemeiner Weise behandelt. Im Aufsatze steht nur Z', wo im Briefe (Z) geschrieben ist. Besondere Beispiele, sagt Lagrange, könne er lösen, aber er geht für's Erste nicht darauf ein. Euler antwortete unter dem 6. September 1755 und äusserte die entschiedenste Anerkennung der neuen Methode, in welcher er einen bedeutenden Fortschritt gegenüber von seinen eigenen Forschungen erkenne. Bemerkenswerth ist etwa, dass Euler das $\int Z$ statt $\int Z\,dx$ ausdrücklich hervorhebt, um es dadurch zu erläutern, dass er beifügt, Lagrange betrachte eben dx als Einheit.

3. Euler's Antwort traf zu einer für Lagrange ereignissvollen Zeit ein. Der erst $19^1/_2$ Jahre alte Gelehrte war zum Professor an der Artillerieschule zu Turin ernannt worden. Die unentbehrlichsten Vorbereitungen für den ihm übertragenen Unterricht verzögerten seine Erwiderung etwa 5 Wochen lang, bis er dann am 20. November 1755 die Musse fand, Euler neue Fortschritte der Variationsrechnung mitzutheilen, insbesondere ihm auseinanderzusetzen, wie weit die Aufgabe der Brachistochrone in seinen Händen sich entwickelt hatte. Euler hatte bei seinen Arbeiten über dieses Problem, welches bereits geschichtliche Wichtigkeit besass, gleich seinen Vorgängern nur den Fall betrachtet, dass ein materieller Punkt unter dem Einflusse der Schwere in kürzestmöglicher Zeit von einem Punkte A nach einem andern Punkte B gelangen sollte. Lagrange liess dagegen den materiellen Punkt von A *aus nach irgend einem* Punkte einer gegebenen Curve Φ fallen und fand

auch unter dieser Voraussetzung als Brachistochrone eine Cykloide, welche die Curve Φ senkrecht durchschneide. Ferner berücksichtigte Lagrange die Voraussetzung, dass der fallende Punkt in kürzester Zeit von A über C nach B gelangen sollte. Hierbei gerieth er in einen Irrthum. Er kam nämlich zu dem Ergebnisse, die gesuchte Curve besitze die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^2}=0$$

oder nach einmaliger Integration die Differentialgleichung

$$\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}=\frac{1}{a^{3/2}},$$

welche nur bei $a=\infty$ die Cykloide bedeutet. Der Irrthum Lagrange's wird offenbar, wenn man in der Integration weiter fortfährt, wodurch die Gleichung

$$y=c+\int\sqrt{\frac{x(x+b)^2}{a^3-x(x+b)^2}}\,dx$$

entsteht, die Curve der Brachistochrone mithin durch ein elliptisches Integral ausgedrückt wäre, während man weiss, dass der fallende Punkt von A nach C durch eine Cykloide gelangt, welche diese beiden Punkte folglich enthält und als dritte Bedingung in A die Richtung der Schwere als Berührende besitzt. Macht man alsdann die Voraussetzung, dass in C eine Veränderung der einmal erlangten Geschwindigkeit nicht stattfinde, so wird der weitere Fall von C nach B durch eine zweite Cykloide erfolgen, welche diese beiden Punkte enthält und welche, rückwärts bis zur gleichen horizontalen Höhe mit A fortgesetzt, dort ebenfalls die Richtung der Schwere zur Berührungslinie hat. Diese Auflösung, deren Grundzüge etwa bei *Lindeloef, Leçons de calcul des variations, Paris* 1861, *pag.* 226 (über die Brachistochrone mit Anfangsgeschwindigkeit) und bei *Todhunter, Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinous solutions, London and Cambridge* 1871, *pag.* 127, § 143 (über die Brachistochronen durch drei Punkte) verglichen werden mögen, entging übrigens dem Scharfblicke Euler's nicht. In seinem sogleich zu erwähnenden Antwortsschreiben vom 24. April 1756 sagt er ausdrücklich: „Was die Brachistochronen durch drei oder mehrere Punkte betrifft, so möchte ich glauben, sie seien keine stetig fortgesetzten Curven, sondern von jedem Punkte zum nächsten müsse ein Cykloidenbogen durchlaufen werden, damit die Zeit des Falles von dem einen Punkte zum andern ein Minimum werde; durchläuft nämlich der Körper diese einzelnen Abschnitte so schnell als möglich, so wird er unzweifelhaft auch die ganze Curve in der kürzesten Zeit vollenden.“ Lagrange selbst muss der Unrichtigkeit seiner Vermuthung sich auch bewusst geworden sein, denn

in einem Briefe vom 19. Mai 1756 bemerkte er mit Euler's Erläuterung der verschiedenen Umformungen der betreffenden Differentialgleichungen sich durchaus einverstanden und in zur Veröffentlichung bestimmten Arbeiten über Variationsrechnung kam er auf den Gegenstand niemals zurück. Sein Irrthum beruhte nämlich darauf, dass er aus der Gleichung $L=0$, welche die Differentialgleichung der die Eigenschaften eines Grössten oder Kleinsten besitzenden Curve darstellt, durch weitere Differentiationen, welche bei Gelegenheit factorenweiser Integrationen eintreten, die an sich berechtigten und zur Einführung von Bedingungen auch heute dienenden Folgerungen $\partial L=0$, $\partial^2 L=0$ u. s. w. zog, dann aber ohne Weiteres die Integration von $\partial L=0$, beziehungsweise von $\partial^2 L=0$ vornahm, wodurch Glieder neu hinzukommen, welche der eigentlichen Aufgabe nicht angehören, und das hatte ihm Euler in seiner Antwort bemerklich gemacht.

4. Ein weiterer Brief Lagrange's muss etwa im Monat März 1756 geschrieben worden sein, der jedoch in der Sammlung fehlt. Euler beginnt wenigstens das Antwortsschreiben vom 24. April mit der Empfangsanzeige zweier Briefe, deren erster, „am Ende des verflossenen Jahres“ eingetroffen, mit dem Briefe vom 20. November 1755 sicherlich identisch ist, während der zweite, „neuerdings“ geschriebene offenbar als uns heute fehlend bezeichnet werden muss. Ueber den Inhalt desselben ist aus Euler's Antwort ebenso wenig, wie aus Lagrange's späteren Briefen irgend eine Andeutung zu entnehmen. Euler zeigte die erhaltenen Briefe dem Präsidenten der Berliner Akademie, Maupertuis, der bekanntlich von Friedrich dem Grossen eigens zu diesem Amte nach Berlin berufen, demselben bis zu seinem 1759 erfolgenden Tode vorstand, auch nachdem er Berlin wieder verlassen hatte. Nach dem Tode von Maupertuis blieb die Stelle nach erfolglosen Unterhandlungen mit D'Alembert unbesetzt, d. h. der König behielt sich das Ernennungsrecht der Mitglieder und die Oberleitung der Akademie von nun an selbstständig vor. Im Frühjahr 1756 dagegen war die Machtvollkommenheit des Präsidenten der Akademie eine ziemlich unumschränkte, auch über den unmittelbaren Kreis seiner Befugnisse hinaus. Das Urtheil über Maupertuis hat im Laufe der Jahre sehr gewechselt. Während er selbst seinen Ruhm über die Maassen ausposaunte und gläubige Zuhörer fand, ging Lalande in dem von ihm bearbeiteten IV. Bande des Montucla'schen Geschichtswerkes so weit, die Erzählung von der lappländischen, unter der Leitung von Maupertuis ausgeführten Gradmessung mit den Worten einzuleiten: „Maupertuis wusste den Angenehmen zu machen, Liedchen zu verfertigen, Guitarre zu spielen, und das verhalf ihm zu dem von ihm gewünschten Auftrage.“ Die Wahrheit dürfte in der Mitte liegen. Ein Mann, für welchen Euler und Lagrange bei jeder Gelegenheit die *höchste Achtung* an den Tag legten, während der Erstere wenigstens

ihn in vieljährigem engem Verkehr in Berlin genau kennen lernen musste, kann unmöglich eine zur Tagesberühmtheit aufgeblähte Unbedeutendheit und nichts Weiteres gewesen sein. Jedenfalls wusste er aus den wenigen Briefen, welche Euler ihm von Lagrange vorlegte, ein richtiges Urtheil über den jungen Gelehrten sich zu bilden. Euler mag ja an empfehlenden Worten es nicht haben fehlen lassen, aber auch die ganze Richtung von Maupertuis führte den begeisterten Vertreter des Princips der kleinsten Action in der Mechanik dazu, an Arbeiten besonderen Geschmack zu finden, welche bestimmt waren, die Lehre vom Grössten und Kleinsten weiter zu führen und deren Anwendung auf mechanische Fragen zu vermitteln. In Maupertuis erwachte sofort die Begierde, Lagrange nach dem zu wissenschaftlichem Leben sich mächtig aufraffenden Berlin zu ziehen, und in seinem Auftrage stellte Euler die unmittelbare Anfrage, ob Lagrange nicht geneigt sein würde, seine Turiner Stellung mit einer andern in Deutschland, zu welcher Maupertuis ihn dem König vorschlagen wolle, zu vertauschen, während er ihm zugleich die baldigstmögliche Aufnahme in die Berliner Akademie in Aussicht stellen durfte.

5. Eine solche Berufung konnte auf schleunige Antwort, wenn nicht auf alsbaldige Annahme rechnen. An ersterer liess Lagrange es nicht fehlen. Das Datum seines nächsten Briefes vom 19. Mai 1756, nur 25 Tage später als das Datum des Euler'schen Briefes, stellt nämlich ungefähr die Dauer des damaligen Postverkehrs zwischen Berlin und Turin dar, in Uebereinstimmung mit den 25 Tagen vom 12. August bis zum 6. September 1755, in weiterer Uebereinstimmung mit den 28 Tagen, welche zwischen einem Euler'schen Briefe vom 27. October und einer Lagrange'schen Antwort vom 24. November 1759 liegen. Lagrange erklärte sich bedingungsweise bereit, dem Rufe Folge zu leisten, vorausgesetzt nämlich, dass die ihm anzubietende Stellung sich als hinreichend ehrenvoll und angenehm erweisen würde, um ihretwegen eine mit Aussicht auf Aufbesserung verbundene Professur an der Artillerieschule aufzugeben und das Vaterland zu verlassen; er wisse in solchen Dingen nicht Bescheid, aber Euler sei ja selbst in ähnlicher Lage, und so bitte er diesen um wohlmeinenden Rath, wenn ein bestimmtes Anerbieten ihm gestellt werde. Jedenfalls danke er Maupertuis heute schon für die bevorstehende Ernennung zum Akademiker, durch welche er ihn unverdientermassen ehren wolle, und für die gütige Absicht, ihn dem König für Weiteres zu empfehlen. Es ist nicht ohne Interesse, dass das Wort „unverdientermassen“ erst nachträglich durch Lagrange in den Brief hineincorrigirt über der Zeile steht. In diesem Briefe findet sich auch die erste Erwähnung einer Mechanik, welche Lagrange zum Zwecke seiner Vorlesungen schreibe; von demselben Buche ist als von einem bereits vollendeten in einem Briefe vom 24. November 1759 die Rede. Wir sind wohl berechtigt, in dieser Mechanik einen ersten Entwurf zur

Mécanique analytique zu erkennen, welche in erster Ausgabe 1788 erschien. Ob Spuren jenes ersten Entwurfes selbst sich irgendwo nachweisen lassen, ist bis jetzt nicht bekannt. Eines wissenschaftlichen Inhaltes entbehrt der Brief vom 19. Mai auch nicht gänzlich. Euler hatte nämlich am 24. April ein interessantes Problem angeregt. Wenn ein schwerer Punkt, der auf derselben Horizontallinie mit dem Anfangspunkte einer Vertikalen liegt, sich durch eine Viertelellipse nach jener Vertikalen hinzubewegen genöthigt ist, deren halbe grosse Axe die Entfernung der genannten beiden Punkte darstellt, während die halbe kleine Axe auf der Vertikalen selbst abgeschnitten ist, wie gross ist ebendiese halbe kleine Axe zu wählen, damit die Bewegungszeit des fallenden Punktes ein Minimum werde. Euler selbst gab als durch Annäherung gefundenen Werth $b = a\sqrt{3/8}$, fragte aber zugleich nach der Möglichkeit einer directen Auflösung. Lagrange stellt nun die Möglichkeit einer anderen als näherungsweise verfahrenden Auflösung in Abrede, weil die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Grössen a und b durch ein Integral vermittelt sei, dessen Auswerthung nur in Reihenform möglich sei. Er bezieht sich dabei auf Euler's Abhandlung im 7. Bande der Petersburger Akademie, womit offenbar die Abhandlung gemeint ist: *De infinitis curvis ejusdem generis sive methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis* (*Comment. Acad. Petrop. VII*, 1740). Lagrange behielt sich vor, auf den Gegenstand zurückzukommen, was aber nicht geschehen zu sein scheint. Inzwischen war Maupertuis von Berlin abgereist und hielt sich in St. Malo in der Bretagne auf. Mit ihm musste Euler sich wegen des geschäftlichen Theiles des Briefes in schriftliche Verbindung setzen und so dauerte es bis zum 2. September 1756, bevor er Lagrange in einem Billet anzeigen konnte, dass er an demselben Tage zum auswärtigen Mitgliede der Berliner Akademie unter allgemeiner Zustimmung ernannt worden sei und gleichzeitig mit dieser Mittheilung auch das betreffende Diplom erhalten werde; die Adresse von Maupertuis wird zugleich beigefügt mit der Aufforderung, diesem ihm so wohlwollenden Manne einen Dankbrief zu schreiben.

6. Die Ernennung Lagrange's zum auswärtigen Akademiker war bereits in die beginnenden Wirren des siebenjährigen Krieges gefallen, da schon im August der Einmarsch der Truppen König Friedrich's in Sachsen, am 10. September die Einnahme von Dresden erfolgte. Es ist kaum zweifelhaft, dass in diesem Kriegsausbruche der Grund zu suchen ist, weshalb die zweite Hälfte des Planes, den Maupertuis zu Gunsten Lagrange's gefasst hatte, die persönliche Anstellung in Preussen, damals unerfüllt blieb und erst 1766 sich verwirklichte, als Euler zum zweiten Male nach Petersburg übersiedelte und Lagrange statt seiner zum Director der mathematischen Classe der Berliner Akademie mit dem *für jene Zeit sehr* hohen Jahresgehalte von Thlr. 1500 ernannt wurde.

Sogleich mit Beginn des Krieges fand sich der Postverkehr unterbrochen, welcher (wir haben oben gesehen, mit welchem Zeitaufwand in regelmässigen Verhältnissen) zwischen Italien und dem deutschen Norden stattfand. Der Kaufmann, welcher den Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange zu vermitteln pflegte, machte Letzteren, wie wir in einem Briefe vom 28. Juli 1759 lesen, auf die an Unmöglichkeit grenzende Schwierigkeit, einen Brief zu besorgen, aufmerksam, und so unterblieb sogar eine Danksagung Lagrange's an Euler für dessen freundliche Bemühungen, wenn sie nicht verloren gegangen ist; unter den vorhandenen Briefen finden wir sie nicht. Auch Ende Juli 1759 war die Verbindung mit Berlin noch keineswegs eine leichte, aber Lagrange war es doch gelungen, einen Weg auszuspüren — welchen? sagt er uns hier nicht —, um einen Brief und ein Buch an Euler zu schicken. Das Buch war kein anderes, als der erste Band der vermischten Schriften der Turiner Gesellschaft, jenes gelehrten Freundeskreises, der später (1762) sich den Namen der königl. Gesellschaft von Turin beilegen durfte, und unter welchem Lagrange von Beginn an eine durch Quantität, wie durch Qualität seiner Beiträge gleich hervorragende Rolle spielte. Wer für die geschichtliche Entwickelung der Mathematik und der mathematischen Physik nur irgend Interesse besitzt, muss die *Miscellanea Taurinensia* im Original studiren. Wir können und müssen uns darauf beschränken, die Titel der einzelnen Abhandlungen zu nennen, denen wir wenige Worte beifügen. Zunächst erscheinen zwei Aufsätze von Lagrange, von denen er mit, wie Herr Genocchi schon bemerkt hat, sehr übel angebrachter Bescheidenheit sagt, sie seien der Aufmerksamkeit Euler's nicht würdig. Euler hatte noch in seiner Differentialrechnung von 1755 die Lehre aufgestellt, das Maximum oder Minimum einer Function von zwei Veränderlichen x und y beruhe auf der Auflösung der beiden Gleichungen $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0$ nebst dem Negativ- oder Positivsein der zweiten Differentialquotienten. Dass zwischen den zweiten Differentialquotienten, welche partiell nach jeder der beiden Veränderlichen oder nach beiden nacheinander genommen werden, eine Ungleichung stattfinden muss, hat erst Lagrange in dem ersten Aufsatze von 1759: *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* gezeigt und damit die Lehre um einen so bedeutsamen Schritt vorwärts gebracht, dass auch die neuesten Lehrbücher der Differentialrechnung kaum Weiteres enthalten. Eine nur um Weniges geringere Bedeutsamkeit ist dem zweiten Aufsatze: *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies qui contient la théorie des suites récurrentes* beizulegen. Lagrange behandelt hier Differenzengleichungen nach Analogie linearer Differentialgleichungen durch Einsetzung einer Exponentialform für die abhängig Veränderliche und hat damit zuerst einen geistigen Zusammenhang zwischen Differen-

zengleichungen und Differentialgleichungen nachgewiesen. Der dritte Aufsatz, auf welchen allein Lagrange Euler mit einer gewissen Selbstbefriedigung hinweist, enthält die berühmten *Recherches sur la nature et la propagation du son*, die in dem zweiten und dritten Bande der Turiner Abhandlungen fortgesetzt wichtige Beiträge zur damals noch ganz neuen Lehre von den periodischen Reihen bildeten.* Ausser auf diese Untersuchungen, deren Bedeutung für Euler schon darin liegen musste, dass hier von einem ganz andern Gesichtspunkte aus, als er selbst zum Ausgange gewählt hatte, fast die gleichen Ergebnisse gewonnen und dem gemeinsamen wissenschaftlichen Gegner D'Alembert frische Einwürfe entgegengehalten wurden, machte Lagrange seinen Correspondenten auch auf die Arbeit eines zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Schülers der Artillerieschule aufmerksam, auf die *Reflexions sur les quantités imaginaires* von Daviet de Foncenex. Wohl durfte er das, denn auch hier war mit unbestreitbarem Talent Neues entwickelt, auch hier begegnete Euler auf jeder Seite sein eigener Name, begegneten ihm Angriffe gegen D'Alembert, freilich in höflichster Form, aber immerhin Angriffe, offenbar der Mehrzahl nach von Lagrange beeinflusst, in einem Falle, wo es sich um ein bei der Anziehung einer sphärischen Oberfläche auf einen Punkt auftretendes Paradoxon handelte, sogar von Lagrange unterschrieben, welcher diese Polemik als Anmerkung zu dem Aufsatze seines Schülers führte. So lässt sich dem ersten Bande der Turiner Abhandlungen als Gesammturtheil das Lob ertheilen, Neues und Wichtiges in überraschender Menge veröffentlicht zu haben, wenn man zugleich den leisen Tadel hinzufügt, es sei mit einer gewissen Vorliebe auf Streitpunkte eingegangen, auch wo eine Nothwendigkeit dazu nicht vorlag, und eine Verehrung Euler's trete neben einer Abneigung gegen D'Alembert nur um so schärfer hervor. Endlich fragt Lagrange in dem Briefe vom 28. Juli 1759 nach dem gegenwärtigen Aufenthalt von Maupertuis. Er konnte noch nicht ahnen, dass dieser gerade einen Tag vorher, am 27. Juli, in Basel gestorben war, und beabsichtigte, ihm und Euler, beziehungsweise der Berliner Akademie, eine grössere Arbeit handschriftlich vorzulegen, welche die Variationsrechnung und deren Anwendung auf Mechanik, letztere Wissenschaft vollständig aus dem Princip der kleinsten Action entwickelt, zum Gegenstande haben sollte. Vielleicht könne, so meint er, die Schrift in Berlin erscheinen, was vielen Druckschwierigkeiten vorbeugen würde; doch behält er sich vor, über diesen Gegenstand nochmals zu schreiben, möglicherweise bevor noch dieser Brief angekommen sein werde.

---

* Vergl. über die Stellung dieser Aufsätze von Lagrange zu denen von Taylor, D'Alembert, Euler, Dan. Bernoulli die Habilitationsschrift Riemann's: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Riemann's gesammelte Werke S. 213—218.

7. Lagrange führte dieses Vorhaben am 4. August bereits aus. Durch einen Schreibfehler ist zwar das Datum in den 4. August 1758 verwandelt und der Brief deshalb in der photolithographirten Sammlung dem vom 28. Juli 1759 vorgedruckt, allein Herr Genocchi hat mit grossem Scharfsinn diesen Irrthum erkannt und in ihm die höchst einfache Lösung mancher sonst unerklärlichen Dinge geliefert. Nicht blos dass der zugesagte demnächstige Brief fehlen würde; nicht blos dass die einleitenden Worte des Briefes vom 28. Juli nicht verstanden werden könnten, es seien wohl 3 Jahre vergangen, ohne dass ein Briefwechsel möglich gewesen sei; es wäre auch noch die Frage zu beantworten, wieso in einem Briefe vom 4. August 1758 von dem ersten Bande der *Miscellanea Taurinensia* als einem vor wenigen Tagen an Euler abgeschickten die Rede sein konnte, während dieser Band auf dem Titelblatte das Datum MDCCLIX trägt. Wir selbst hatten ursprünglich der vorerwähnten dreijährigen Pause zu Liebe zwar auch einen Schreibfehler oder vielmehr eine Undeutlichkeit in Lagrange's Handschrift angenommen. Da seine Schriftzüge von einer beneidenswerthen Lesbarkeit ziemlich entfernt sind, so vermutheten wir, was ohne zu grossen Zwang möglich ist, in der Jahreszahl 1758 ein schlecht geschriebenes 1756. Dann fielen zwischen dem 4. August 1756 und dem 28. Juli 1759 volle drei Jahre heraus. Aber dann musste die sonst anhaltslose Vermuthung hinzutreten, der Aufsatz über die Schallverbreitung, allerdings mit besonderer Pagination nach S. 146 des Bandes neu beginnend, sei schon 1756 im Drucke vollendet gewesen und erst nach weiteren 3 Jahren mit anderen Aufsätzen, die ihm aus unbekannten Gründen vorgeschickt wurden, zu einem Bande vereinigt worden. Wir geben diese Vermuthung, wie sie bei uns entstanden ist, weil wir Grund haben anzunehmen, dass wir uns in derselben mit einem von uns hochgeschätzten italienischen Gelehrten begegneten, aber wir nehmen keinen Anstand, uns heute zu der viel einfacheren Annahme von Herrn Genocchi zu bekennen, welche mit einer einzigen Hypothese auskommt, wo wir deren zwei bedurften. Einem Briefe, der eine Woche nach einem andern geschrieben ist, eröffnen so mit Recht die Worte: „Vor wenigen Tagen übersandte ich ein Exemplar eines Werkes, welches eine Privatgesellschaft in Turin unter dem Titel: Philosophisch-mathematische Mannigfaltigkeiten an das Licht schickte.“ Lagrange knüpft daran einige Andeutungen über seine Schall-Abhandlung und kommt dann mittelst der Bitte, einen beigeschlossenen Brief an Maupertuis gelangen zu lassen, auf die grosse analytisch-mechanische Arbeit zu reden, welche er, wie er wiederholt betont, am Liebsten in Berlin dem Drucke übergäbe. Er habe die analytische Methode jetzt auch auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen ausgedehnt und sie auch auf die Aufgabe angewandt, das grösstflächige Vieleck unter solchen mit gleichem Umfange aufzufinden. Endlich erbittet er sich

Euler's Antwort auf dem Umwege über Genf, wo der Postdirector Durade die weitere Vermittelung an den Turiner Postdirector, dieser an Lagrange übernehmen werde. Offenbar war dieses der von Schwierigkeiten nicht freie Weg, von welchem im Briefe vom 28. Juli die Rede war. Die Briefe kamen an, und die Antwort Euler's trägt das Datum des 2. October, den Empfang des Buches dagegen war er erst am 27. October in der Lage, anzeigen zu können. Wir übersetzen einige Stellen aus dem Briefe vom 2. October, welche geeignet sind, auf das früher angedeutete persönliche Verhältniss Euler's zu Maupertuis und D'Alembert einiges Licht zu werfen. „Ihr Brief kam nach dem Tode unsers würdigen Präsidenten in meine Hände. Ich bin durch diesen Unfall um so schwerer betroffen, als ich den besten Gönner, den süssesten Freund verliere ... Das Gerücht geht, die Stelle des Präsidenten mit sehr hohem Gehalte sei für D'Alembert bestimmt; ob es in diesem Falle für Sie gerathen ist, Ihr Werk hierher zu schicken, mögen Sie selbst beurtheilen ... Ich freue mich, dass Sie meiner Lösung der schwingenden Saite beipflichten, welche D'Alembert durch verschiedene Nörgeleien zu entkräften versucht hat, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil sie nicht von ihm herrührt." Alsdann wendet Euler sich zu Lagrange's Andeutungen bezüglich des isoperimetrischen Problems. Er freue sich, durch Lagrange's Bemühungen den Gegenstand jetzt zum Gipfel der Vollkommenheit gebracht zu sehen. Er habe selbst, von Lagrange's Bemerkungen Hilfe empfangend, jetzt eine analytische Lösung niedergeschrieben, welche er aber zurückzuhalten beschlossen habe, bis Lagrange's Untersuchungen der Oeffentlichkeit übergeben seien, um ihm Nichts von dem ihm gebührenden Ruhme zu entziehen. Das sind die ermunternden Worte Euler's vom 2. October 1759, auf welche Lagrange (wie wir unter 2 gesehen haben) im Jahre 1769 zurückkam und von welchen auch unter October 1762 die Rede sein wird. Der Brief schliesst mit der Mittheilung, Euler habe inmitten schwerer Kriegszeiten mit dem Beginn der Ausarbeitung seiner der Petersburger Akademie längst zugesagten Integralrechnung sich beschäftigt. Es handle sich in ihr um die Auffindung von Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen aus ihren Differentialquotienten. Für Functionen von mehr als einer Veränderlichen sei fast Alles neu zu schaffen, und er glaube das Fundament dazu schon gelegt zu haben, ein Ausspruch, welcher geschichtlich bedeutsam sein dürfte als erste Aeusserung des Bewusstseins von der grossen Schwierigkeit, aber auch von der grossen methodischen Tragweite der allgemeinen Aufgabe, partielle Differentialgleichungen zu integriren, während bisher zwischen Euler und D'Alembert vornehmlich nur ganz besondere derartige Gleichungen in Frage gekommen waren. In den nächsten Wochen nach dem 2. October erhielt, wie schon bemerkt, Euler den Band der Turiner Abhandlungen, den er rasch genug

las, um am 23. oder 27. desselben Monats bereits an Lagrange darüber schreiben zu können. Jenes Datum nennt Lagrange im zweiten Bande der Turiner Abhandlungen, und wir werden ihm Glauben schenken gegenüber der zweiten Datumsangabe in dem Petersburger Drucke von 1862, der auch sonst keineswegs fehlerfrei scheint. Dieser Brief und alle folgenden, welche wir von beiden Correspondenten besitzen, ist französisch geschrieben. Vorher war der Briefwechsel lateinisch geführt worden, Euler scheint jedoch die lebende Sprache gewählt zu haben, weil und nachdem er aus den gedruckten Abhandlungen Lagrange's ersah, dass dieser Französisch wie eine Muttersprache zu schreiben wusste, eine Eigenschaft, die Euler mit ihm theilte. Es ist begreiflich, dass die nächsten Briefe sich vielfach mit der Theorie des Schalles beschäftigen, dass Euler und Lagrange sich gegenseitig über die Uebereinstimmung ihrer Ansichten freuen und weitere Ausführungen andeuten, die der Hauptsache nach neben Widerlegungen von Einwürfen, welche D'Alembert 1761 in dem ersten Bande seiner *Opuscules mathématiques* veröffentlichte, in Abhandlungen beider Gelehrten im ebengenannten zweiten Bande der *Miscellanea Taurinensia* wiederkehren, auf die wir deshalb genauer einzugehen unterlassen. Nur im Vorübergehen bemerken wir, dass im Briefe vom 23. October 1759 Euler sich mit Lagrange darin einverstanden erklärt, dass die durch Rameau beobachteten Obertöne nicht von der schwingenden Saite selbst, sondern von mitschwingenden sonstigen Theilen des Apparates herrühren; dass er des scheinbaren Widerspruches gedenkt, wonach in einer engen Röhre die einmal begonnene Fortpflanzung der Erschütterungen sich nur einseitig fortsetzt, während von Anfang an jede Erschütterung allseitig wirkt, also zwischen primitiven und abgeleiteten Erschütterungen ein Unterschied sich wahrnehmbar macht, zu dessen Erklärung gewisse Anfangsbedingungen ausreichen; dass er endlich bedauert, die Schwingungstheorien nicht auch auf eine nach drei Dimensionen ausgedehnte Luftmasse anwenden zu können, welche doch einzig der Erfahrung entsprechen würde. Man weiss, dass Euler diese Aufgabe kurz darauf gelöst hat und dass wesentlich sie in seiner Abhandlung im II. Bande der Turiner Gesellschaft behandelt worden ist. Am Schlusse des Briefes erzählt Euler, dass er den III. Band seiner Mechanik vollendet habe, aus welchem er als neue folgewichtige Entdeckung die der drei Trägheitsaxen eines sich drehenden Körpers hervorhebt. Auch dieser Brief nahm den Weg über Genf, von wo aus Bertrand ihn weiter beförderte, „ein Freund Euler's, der sich mit sehr grossem Erfolge der Mathematik zugewandt hat". Offenbar ist der damals 28jährige Louis Bertrand gemeint, der unter Anderen in der Geschichte der Parallelentheorie einen wohlerworbenen Platz einnimmt.

8. Lagrange antwortete am 24. November 1759. Er dankt für die Beurtheilung, welche der I. Band der Turiner Abhandlungen durch Euler

erfahren habe, und stellt für die Mitte des folgenden Jahres einen weiteren Band in Aussicht, der allerdings erst erheblich später, nämlich 1762, die Presse verliess. Euler hatte am 2. October den Wunsch ausgesprochen, dass die freie Vereinigung Turiner Gelehrter sich bald staatlicher Unterstützung erfreuen möge; dieser Wunsch werde, meint Lagrange, am Ersten in Erfüllung gehen, wenn auswärtige Gelehrte ersten Ranges sich der noch jungen Gesellschaft gewogen zeigen. So habe Haller ihnen Beiträge zugesagt, und mit dem gleichen Anliegen wendet sich Lagrange nunmehr an Euler. Bezüglich der Nothwendigkeit, die Schalltheorie im Raume zu erörtern, ist Lagrange mit Euler einverstanden. Von diesem allgemeineren Standpunkte aus werde sich auch wohl die Abnahme des Schalles erklären lassen, die bei blos linearer Ausdehnung nicht an und für sich eintrete; ob übrigens die Abnahme des Schalles in der That, wie man allgemein annehme, im quadratischen Verhältnisse der Entfernung stattfinde, erscheint Lagrange zweifelhaft. Auf den Druck seiner Arbeiten über Variationsrechnung und Mechanik kommt Lagrange jetzt nach Maupertuis' Tode mit keinem Worte zurück, nur über deren Inhalt sagt er für einen nächsten Brief weitere Aufschlüsse zu und bemerkt am Ende, er habe für seine Schüler Elemente einer Mechanik und einer Differential- und Integralrechnung verfasst. Von der ersteren Schrift war unter 5 die Rede, die letztere ist wenigstens einem Theile nach erhalten, wie Fürst Boncompagni im VI. Bande seines Bulletino S. 150 (Jahrg. 1873) nachgewiesen hat. Die Bibliothek des Herzogs von Genua in Turin enthält nämlich eine Handschrift mit dem Titel: *Principj di Analisi Sublime dettati da La Grange alle Reggie Scuole di Artiglieria. Parte prima. Della teoria Algebraica delle Curve.*

9. Schon am 26. December 1759 liess Lagrange einen weiteren Brief nachfolgen, der durchaus der Schalltheorie gewidmet war. Die Untersuchung einer Fortpflanzung der Schallwelle in einem Elementarkegel, dessen Spitze in dem Erschütterungspunkte liegt, war einer der neuen von Lagrange eingeschlagenen Wege, und diesen Fall hatte er soweit erörtert, dass bei ihm die im Briefe vom 24. November noch angezweifelte Abschwächung im quadratischen Verhältnisse der Entfernungen sich nachweisen liess, ein Gegenstand, der Lagrange übrigens durchaus nicht ganz klar war, wie wir gleich noch zu bemerken Gelegenheit haben werden. Mit Hilfe dieser Elementarkegel setzte er sich Kugeln zusammen, um die Fortpflanzung des Schalles unter der Annahme zu studiren, dass die Wellen als Kugelschalen weiter gehen, wobei die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + 2c\frac{\partial\left(\frac{r}{z}\right)}{\partial z}$ auftrat. Dann verallgemeinerte er noch diese Differentialgleichung zu der folgenden: $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + mc\frac{\partial\left(\frac{r}{z}\right)}{\partial z}$,

deren Integral gleichfalls, und zwar mit Hilfe unendlicher Reihen mit willkürlichen Functionen hergestellt wurde. Je nach verschiedenen Annahmen für m brechen die Reihen ab, doch sind die Andeutungen, welche Lagrange hierüber machte, einigermassen verstümmelt, da, wie wir uns durch Erkundigung beim Herausgeber vergewissert haben, ein Stückchen des Briefes gerade hier fehlt, auf welchem einige zum Verständniss nothwendige Zahlen geschrieben waren. Der Hauptsache nach stellt der ganze Brief sich als auszugsweise Ankündigung von Lagrange's *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son* (*Miscell. Taurin. II*, 11—172) dar. Neujahrsglückwünsche beschliessen ihn. Am Neujahrstage selbst gab Euler seine Antwort auf den Brief vom 24. November, der kaum zehn Tage in seinen Händen gewesen sein mochte, zur Post. Dieselbe bestand in der Abhandlung, welche als *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une (sic!) milieu élastique* im II. Bande der Turiner Sammlung zu lesen ist, mit wenigen ebendort gleichfalls abgedruckten Begleitzeilen. Wir haben oben schon erwähnt, dass Euler hier die Aufgabe erledigte, vor der er noch am 23. October rathlos stillgestanden war, nämlich die Schwingungstheorie im Raume von drei Dimensionen zu bewältigen.

10. Euler's Beitrag wurde von den Turiner Gelehrten mit Jubel begrüsst, und Lagrange erhielt den Auftrag, dem berühmten Manne den schuldigen Dank zu erstatten. Mancherlei Beschäftigungen, unter welchen sicherlich auch das eingehende Studium der Euler'schen Abhandlung inbegriffen war, verzögerten die Erfüllung des Auftrages bis zum 1. März 1760. Lagrange beginnt damit, auf eine Verwandtschaft der Gleichungen, zu welchen Euler gelangt war, mit solchen, welche der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen angehören, hinzudeuten. So sei die Gleichung der Oberfläche, welche den grössten Raum umfasse,

$$\frac{\partial.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial x}+\frac{\partial.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial y}+\frac{1}{a}=0$$

unter der Voraussetzung, dass z eine Function von x und y sei, und $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ (in der modernen Bedeutung aller dieser Zeichen) gesetzt werden. Dass die Kugel $z^2=4a^2-x^2-y^2$ dieser Differentialgleichung als particuläres Integral genüge, sieht Lagrange ein; an der Auffindung des allgemeinen Integrals jedoch verzweifle er. Dann kommt er wieder auf die Abschwächung der Schallerschütterungen zurück. Euler war am Schlusse der nach Turin geschickten Abhandlung zu dem Ergebnisse gekommen, dass bei grossen Entfernungen sowohl die Elongation, als die Geschwindigkeit eines erschütterten Lufttheilchens im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen stehen. Lagrange zieht sich den

Folgerungen gefangen, mit welchen auch ein jüngst empfangener Brief von Daniel Bernoulli in Einklang stehe, und erklärt seine frühere anderweitige Behauptung durch einen bei der Integration eingeschlichenen Rechenfehler. Bemerken wir gleich hier, dass Euler unter dem 24. Juni 1760 diesen Zweifeln durch die Erläuterung ein Ziel setzte, die Stärke, mit welcher ein Schall das Gehörorgan treffe, hinge von zwei Factoren ab, von der Grösse der Schwingungen und von der Geschwindigkeit der schwingenden Theilchen; haben also beide ein der Entfernung umgekehrt proportionales Maass, so muss das Product, d. i. die thatsächliche Stärke der Schallempfindung, im Quadrat der Entfernung abnehmen. Eben dasselbe muss auch für das Licht gelten, wenn es aus Schwingungen eines elastischen Mittels besteht, und so erledige sich ein von Daniel Bernoulli Lagrange gegenüber ausgesprochenes Bedenken. Denn Lambert habe in seiner Photometrie die Abschwächung des Lichtes im quadratischen Entfernungsverhältnisse festgestellt, ohne von der Geschwindigkeit, noch von der Grösse der Schwingungen ein Wort zu sagen. Lagrange verallgemeinert hierauf die am 26. December 1759 schon besprochene Differentialgleichung noch weiter zu $z^n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + mc \cdot \frac{\partial\left(\frac{r}{z}\right)}{\partial z}$. Auch sie gehört dem Problem der Luftschwingungen in einem Kegel an, aber unter der Voraussetzung verschiedener Dichtigkeiten der in dem kegelförmigen Raume enthaltenen Luftmasse, und für $m = 0$ giebt sie die Schwingungen von Saiten von ungleicher Dicke. Die Discussion dieses letzteren Falles lässt erkennen, dass im Allgemeinen derartige Saiten, in Schwingung versetzt, ihre erste Gestalt nie zum zweiten Male wieder erlangen, somit einen gleichmässigen Ton hervorzubringen nicht im Stande sind, was mit der Erfahrung, dass solche Saiten den Musikern falsch tönen, in Uebereinstimmung steht. Den letzten Gegenstand dieses interessanten Briefes bildet die Frage, ob die Grösse der Schwingungen eine Beschleunigung ihrer Fortpflanzung zur Folge haben könne, eine Frage von Wichtigkeit, indem die experimentellen Geschwindigkeitsmessungen, wie sie z. B. Lacaille 1738 anstellte, stets eine raschere Verbreitung ergaben, als seit Newton theoretisch herausgerechnet worden war. Lagrange ist geneigt, aus seinen Formeln die Unmöglichkeit der Beschleunigung der Fortpflanzung durch die Grösse der Schwingungen anzunehmen, „aber ich sträube mich dagegen, über diesen Punkt mich zu entscheiden, bevor ich Ihr Urtheil darüber habe, welches ich mich recht sehr beeile, mir zu erbitten“. In der Antwort vom 24. Juni 1760 pflichtet Euler den Schlüssen Lagrange's bei. Allein er geht einen Schritt weiter, er sucht eine anderweitige Erklärung für jenen Gegensatz zwischen vorausberechneter kleinerer und wirklich gemessener grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Flüssige Massentheilchen,

Urban Belz aus Neustadt-Eberswalde den Preis davontrug, dessen uns unbekannte Abhandlung *Dissertation sur le son et l'ouïe* in der Sitzung vom 2. Juni 1763 gekrönt wurde, wie man aus den *Nouveaux Mémoires de l'académie de Berlin* 1770 *pag.* 26 entnehmen kann. Wir haben den letzten Brief Lagrange's an Euler als aus der zweiten Hälfte des Monats October 1762 bezeichnet. Er ist nämlich vom 38. October datirt, und ob dieser Schreibfehler 18 oder 28 (wie Herr Genocchi annimmt), oder 30 oder 31 bedeuten soll, schwebt ganz in der Luft. Als sicher können wir nur annehmen, dass der Brief nach dem 10. October geschrieben sein muss. Es erübrigt uns nämlich noch, einen Brief Euler's vom 9. November 1762 zu besprechen, aus welchem hervorgeht, dass der Abhandlungsband, aber noch nicht der zweite Brief Lagrange's in Berlin angekommen war. Da nun, wie wir gesehen haben, etwa 28 Tage zu vergehen pflegten, bis ein Packet Berlin erreichte, so fällt bei Erhöhung jener Frist des unregelmässigen Verkehrs wegen auf 30 Tage der früheste Termin, an welchem ein Brief, von Turin abgehend, am 9. November noch nicht in Berlin eingetroffen sein konnte, auf den 10. October. Euler dankt für die Uebersendung des werthvollen Bandes und knüpft daran die schmeichelhaftesten Ausdrücke für Lagrange, der mit seinen tiefen Entdeckungen wahrhaft verschwenderisch umgehe. Jeder Andere würde aus den behandelten Stoffen ganze Bände von Beiträgen für verschiedene Akademien geschöpft haben, während Lagrange sich begnüge, eine Wissenschaft in einen Aufsatz zu drängen. Beiläufig bemerken wir, dass Lagrange die leise Anspielung, welche in diesem Lobe lag, schon im folgenden Jahre auf sich wirken liess, denn 1765 erschien in den Memoiren der Berliner Akademie sein Aufsatz über die Tautochrone. Euler geht alsdann wiederholt auf die willkürlichen Functionen ein, welche bei der Integration partieller Differentialgleichungen erscheinen, und zeigt, wie namentlich Umformungen der gegebenen Gleichung dazu führen, solche in eine Gestalt zu bringen, welche die Willkürlichkeit der Functionen von selbst hervortreten lässt. Leider besitzen wir weder die Antwort Lagrange's auf diesen Brief, noch auf die anderen, welche die *Opera postuma* im Abdrucke enthalten. Wir können nur die Hoffnung aussprechen, es mögen dem Herausgeber der Lagrange'schen Werke auch diese noch zu Gebote stehen — eine Hoffnung, die freilich auf sehr schwachen Füssen steht.

Jedenfalls aber wollen wir unsern Bericht nicht abschliessen, ohne Herrn Serret die Bitte auszusprechen, er möge, wenn sich dem nicht unbezwingbare Hindernisse in den Weg stellen, bei der Druckgebung der Briefe von Lagrange seiner Zeit auch die Antworten der Adressaten an den richtigen Stellen beifügen. Wir haben gerade bei Ausarbeitung dieses Aufsatzes an uns selbst erfahren können, wie unbequem es ist, Brief und Antwort aus zwei verschiedenen Bänden vergleichen zu müssen.

Recensionen.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. THEODOR REYE, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. 2. vermehrte Aufl. 1. Abtheilung.

Die besten deutschen Lehrbücher der synthetischen Geometrie sind wohl unbestritten: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, bearbeitet von Schroeter, und Reye's Vorträge über Geometrie der Lage. Beide, im Jahre 1866 erschienen, haben in kurzer Zeit die zweite Auflage erlebt, das erste 1876, das andere 1877. Von der zweiten Auflage des letzteren ist allerdings bis jetzt nur die erste Abtheilung erschienen, diese aber in erheblich erweitertem Umfange. In dieser neuen Auflage enthält sie, wenn auch häufig in bedeutend kürzerer Form, fast denselben Inhalt, wie die Steiner'schen Vorlesungen von den Grundgebilden der ersten Paragraphen bis zu den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes in den letzten. Nach der Definition der Grundgebilde muss jedes Lehrbuch der synthetischen Geometrie sofort den Begriff der projectivischen Gebilde feststellen. Steiner nennt zwei Gebilde projectivisch aufeinander bezogen, wenn zwischen irgend vier Elementen des einen Gebildes und den entsprechenden des andern Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet. Um die bei dieser Definition nothwendige Rechnung zu vermeiden und „zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten durch directe Anschauung zu gelangen", folgt Reye dem von Staudt eingeschlagenen Wege. Der Begriff des harmonischen Gebildes wird durch directe stereometrische Betrachtungen gewonnen; ebenso unmittelbar folgt der Satz: Aus einem harmonischen Gebilde ergeben sich durch Projiciren und Schneiden immer wieder harmonische Gebilde. Die perspectivische Lage der Grundgebilde giebt dann die Veranlassung, diese aufeinander zu beziehen, so dass jedem Elemente des einen ein Element des andern und jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des andern entspricht; es folgt, dass je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des andern entsprechen. Zur projectivischen Beziehung gelangt der fünfte Vortrag ungefähr mit folgenden Worten: „*Werden zwei einförmige* Grundgebilde auf ein und dasselbe dritte per-

spectivisch bezogen (z. B. zwei Punktreihen auf eine dritte), oder werden zwei perspectivische Grundgebilde gegen einander verschoben, so bleiben sie aufeinander bezogen, verlieren aber ihre perspectivische Lage. Das Entsprechen harmonischer Elemente bleibt bestehen.

Die Umkehrung: „Wenn zwei Grundgebilde so aufeinander bezogen sind, dass vier harmonischen Elementen des einen stets vier harmonische des andern entsprechen, so lassen sie sich durch Verschiebung stets in perspectivische Lage bringen", bedarf des Beweises. Daher überrascht die Definition: „Zwei Grundgebilde heissen projectivisch, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische des andern entsprechen." Der Fundamentalsatz der Geometrie der Lage: „Wenn zwei einförmige projectivische Grundgebilde drei Elemente A, B, C entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein", setzt in seinem Beweise voraus, dass, wenn ein Element das eine von zwei projectivischen Gebilden stetig durchläuft, das entsprechende Element das andere Gebilde auch stetig durchläuft, eine Voraussetzung, die in der Definition ihre Begründung nicht findet. Demnach scheint es, als ob die Definition projectivischer Gebilde anders gegeben werden müsste, etwa nach Thomae: „Zwei Gebilde heissen projectivisch, wenn sie als erstes und letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet werden können, deren jedes zu dem folgenden und zu dem vorhergehenden perspectivisch liegt." Durch diese Definition bleiben alle Beweise, namentlich auch der des sogenannten Fundamentalsatzes ungeändert, weil das harmonische Entsprechen bestehen bleibt.

Der fünfte und sechste Vortrag behandeln die Erzeugung der Curven oder Punktreihen zweiter Ordnung, Strahlenbüschel zweiter Ordnung, Kegelflächen zweiter Ordnung und Ebenenbüschel zweiter Ordnung, die Lehrsätze von Pascal und Brianchon, aus denen im siebenten und achten Vortrage mannigfache Folgerungen gezogen werden; namentlich wird die Identität von Punktreihen zweiter Ordnung und Strahlenbüscheln zweiter Ordnung nachgewiesen und die Theorie der Polaren abgeleitet. Im zehnten Vortrage wird die weitere Untersuchung der Curven zweiter Ordnung durch eine solche über Regelschaaren und Regelflächen unterbrochen; der elfte Vortrag beschäftigt sich damit, zu zeigen, dass man die durch projectivische Gebilde erster Ordnung erzeugten fünf Gebilde zweiter Ordnung, die Curve zweiter Ordnung, den Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die Kegelfläche zweiter Ordnung, den Ebenenbüschel zweiter Ordnung und die Regelfläche zweiter Ordnung projectivisch auf einander beziehen kann. Als Erzeugnisse projectivischer Gebilde erster und zweiter Ordnung ergeben sich Gebilde dritter Ordnung, der Strahlenbüschel dritter Ordnung, die ebene Curve dritter Ordnung, die Raumcurve dritter Ordnung, der Ebenenbüschel dritter Ordnung; auf die Gebilde vierter Ord-

nung führen die Erzeugnisse projectivischer Gebilde zweiter Ordnung. Der 12. Vortrag ist den involutorischen Gebilden gewidmet; der 14. behandelt die Aufgaben zweiten Grades, deren Auflösung auf die bekannte Steiner'sche Construction zurückgeführt wird. Diese Aufgaben geben Anlass, in der neuen Auflage den Begriff der imaginären Elemente in die synthetische Geometrie einzuführen, und zwar geschieht es hier durch den Satz, dass zwei projectivische Gebilde auf demselben Träger zwei reelle oder conjugirt imaginäre Elemente entsprechend gemein haben.

Zu diesen zwölf Vorträgen, welche die reine Geometrie der Lage behandeln und die man ohne irgendwelche mathematische Vorkenntnisse verstehen kann, gesellen sich drei über metrische Relationen der Kegelschnitte. Sie behandeln namentlich die Durchmesser, Axen, Brennpunkte und — neu in dieser Auflage hinzugekommen — die Hauptaxen und Symmetrieebenen, Focalaxen und cyklische Ebenen einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Wie schon das Vorwort erwähnt, sind, „um den Zusammenhang mit der analytischen Geometrie herzustellen", in dem Vortrage über die Durchmesser neu hinzugefügt die Ableitungen der Gleichungen der Curven zweiter Ordnung.

Als bedeutendste Aenderung giebt der Verfasser selbst an die Hinzufügung von 213 Aufgaben und Lehrsätzen, die in 15 Abschnitte getheilt sind. Von diesen entsprechen neun den gleichnamigen Vorträgen; ein zehnter behandelt, gestützt auf das Princip der reciproken Radien, die Kreisverwandtschaft, und der elfte die geradlinigen Flächen dritter Ordnung, als Erzeugnisse zweier projectivischen Punktreihen erster und zweiter Ordnung.

Der Schwerpunkt der Aenderung liegt aber unbedingt in den letzten vier Abschnitten. In Nr. 165 des zwölften Abschnittes „Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten" wird für die Vierecke, bei denen jede Seite ihrer Gegenseite in Bezug auf einen Kegelschnitt γ^2 conjugirt ist, die Bezeichnung Polvierecke und für die Vierseite, bei denen jeder Ecke ihre Gegenecke bezüglich γ^2 conjugirt ist, die Bezeichnung Polvierseite eingeführt. Der Reihe nach wird gezeigt, dass drei Ecken eines Polvierecks die vierte, und drei Seiten eines Polvierseits die vierte bestimmen (167, 168), dass die sechs Ecken $ABCD$ und $ABC'D'$ zweier Polvierecke auf einem Kegelschnitte liegen (169), dass die sechs Ecken eines Polvierecks und Poldreiecks, welche eine Ecke gemeinschaftlich haben, auf einem Kegelschnitte liegen (170), dass die sieben Ecken zweier Polvierecke $ABCD$ und $AB'C'D'$ von zwei Kegelschnitten γ^2 und γ_1^2 auf einem Kegelschnitte liegen (171) und endlich, dass alle Paare von Punkten, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind, auf einer Curve dritter Ordnung liegen (172). Der 13. Abschnitt: „Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten", bestimmt *(173, 174, 175)* die Beziehungen zweier Kegelschnitte x^2 und γ^2, von

denen der erste einem Polviereck des andern umschrieben ist. „x^2 stützt oder trägt y^2; y^2 stützt sich oder ruht auf x^2.“ Von allen Kegelschnitten x^2, die einen gegebenen y^2 stützen, kann nur einer einem gegebenen Viereck umschrieben werden; alle diese Kegelschnitte bilden ein lineares System vierter Stufe (177); überhaupt bilden alle Kegelschnitte, welche zwei, drei oder vier beliebige Kegelschnitte stützen oder welche auf ihnen ruhen, Systeme oder Gewebe von drei-, zwei-, resp. einfach unendlicher Mächtigkeit, dritter, zweiter, erster Stufe (178). Die Identität der Systeme erster Stufe mit den Kegelschnittbüscheln mit vier reellen Grundpunkten geschieht durch den Satz 179: Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnittsystems einem Viereck umschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polviereck aller Curven zweiter Classe, die auf das System sich stützen, und dem System gehören folglich alle dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte an. Die ersten Nummern des folgenden Abschnittes „Lineare Kegelschnittsysteme und Gewebe dritter und erster Stufe“ weisen die Identität des Systems erster Stufe mit dem Kegelschnittbüschel auch für den Fall nach, dass dieses nur zwei reelle Grundpunkte hat (181, 182). Darauf wird (183, 184) der von Stephen Smith herrührende Hauptsatz der ganzen Theorie bewiesen; er heisst: „Mit einem linearen Kegelschnittsystem dritter Stufe ist allemal eine Kegelschnittschaar derartig verbunden, dass jede Curve der Schaar auf jeder Curve des Systems ruht.“ Aus ihm ergiebt sich die Theorie des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar, diese Gebilde als Inbegriff aller Kegelschnitte genommen, welche irgend vier Kegelschnitte stützen oder auf denen sie ruhen; die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Curven eines Büschels schneiden sich in einem Punkte (185); schneiden sich zwei Curven eines Büschels in einem (reellen) Punkte, so schneiden sich alle in ihm (186); die Pole einer Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte (187); jede Gerade wird von den Curven eines Büschels in einer Involution geschnitten (188); die Curven eines Büschels haben ein gemeinschaftliches Poldreieck (190). Der Satz 188 zeigt die Identität des Kegelschnittsystems erster Stufe mit einem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten und ergänzt die Sätze 179 und 182, so dass gefolgert werden kann: „Alle Kegelschnitte, welche zwei andere stützen, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck der letzteren umgeschrieben, dessen sämmtliche Ecken imaginär sein können“, ein Satz, dessen directer Beweis in 192 gegeben wird. — Der letzte Abschnitt behandelt „Die linearen Kegelschnittsysteme und Gewebe zweiter Stufe“, enthält also die Theorie der Kegelschnittnetze und Gewebe (vergl. Schroeter, Die Theorie der Kegelschnitte, S. 500—535). In 196 wird der Satz bewiesen: „Mit einem Kegelschnitt-Netze ist allemal eine Kegelschnitt-Schaarschaar (Gewebe nach Schroeter) und umgekehrt derartig verbunden,

dass jede Curve der Schaarschaar auf jede Curve des Netzes sich stützt." Darauf ergeben sich die Haupteigenschaften der Curve dritter Ordnung (Tripelcurve nach Steiner), welche sämmtliche Punkte enthält, die in Bezug auf alle Curven des Netzes conjugirt sind. — Die letzten vier Abschnitte enthalten auf 25 Seiten allerdings in gedrängtester Kürze fast denselben Inhalt, welchen wir bei Schroeter von S. 224—534 abgehandelt finden, bis auf die Theorie des imaginären Kegelschnittes. Wenn auch im Interesse Derjenigen, für welche die Geometrie der Lage zunächst bestimmt ist, der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Schulen, eine etwas breitere Behandlung vielleicht erwünscht wäre, so muss es gegenüber der ersten Auflage als ein entschiedener Fortschritt erklärt werden, dass die Theorien der Kegelschnittbüschel und Netze hier, ohne räumliche Betrachtungen zu Hilfe zu nehmen, allein durch solche in der Ebene entwickelt werden. — Als charakteristischer Unterschied der Behandlung in der Geometrie der Lage und den Steiner'schen Vorlesungen ist hervorzuheben, dass man in letzteren die geometrischen Gebilde, Kegelschnittbüschel und Netz entstehen sieht und aus der Entstehungsart den organischen Zusammenhang ihrer Eigenschaften erkennt, während in der ersteren diese Gebilde uns als etwas Fertiges entgegentreten und aus ganz allgemeinen Sätzen ihre bekannteren Eigenschaften hergeleitet werden. Wir gelangen daher zu diesen Eigenschaften in umgekehrter Reihenfolge: bei Reye aus dem Stephen Smith-schen Satze zu der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Transversale in einer Involution zu schneiden, bei Schroeter zu diesem Satze aus der Entstehungsart in aufsteigender Folge bis zum Stephen Smith'schen Satze, der auf S. 534 sich als unmittelbare Folgerung aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes ergiebt. Nachdem vorher gezeigt ist, dass durch jedes Kegelschnittnetz ein Kegelschnittgewebe (II. Stufe), „ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit mit dem Kegelschnittnetz und nach dem Princip der Polarität aus diesem hervorgegangen", bestimmt ist, geht die Entwickelung weiter: „Gehen wir nun von vier Kegelschnitten aus, so bestimmen dieselben zu je dreien verbunden vier Kegelschnittnetze, zu deren jedem ein bestimmtes Gewebe gehört. Diese vier Gewebe haben eine Kegelschnittschaar gemeinschaftlich. Wir können aber noch unendlich viele andere Kegelschnittnetze und zugehörige Gewebe bilden, indem wir aus jenen ersten vier Netzen irgend drei Kegelschnitte herausnehmen, welche nicht demselben Netze angehören, und sie zur Bildung eines neuen Netzes verwenden. Die Tripelcurven für alle diese Netze laufen durch dieselben sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, und die sämmtlichen zugehörigen Kegelschnittgewebe haben eine Schaar gemeinschaftlich. Stellt man vermittelst fünf Kegelschnitten alle möglichen Netze und dazu gehörigen *Gewebe her, so* **haben letztere** einen Kegelschnitt gemein." So werden

also aus vier und fünf Kegelschnitten durch Herstellung aller möglichen Netze die Kegelschnittsysteme dritter und vierter Stufe erhalten und dann wird gefolgert, 1. dass alle Kegelschnitte eines Systems dritter Stufe alle Kegelschnitte einer Schaar und 2. dass alle Kegelschnitte eines Systems vierter Stufe einen Kegelschnitt stützen. Diese Endresultate sind bei Reye die Ausgangspunkte. Der nähere Zusammenhang der Kegelschnitte eines linearen Systems dritter Stufe ergiebt sich übrigens aus 191: „Jede reelle Seite des gemeinschaftlichen Poldreiecks einer Kegelschnittschaar schneidet die Curven des zugehörigen Systems dritter Stufe in den Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe. Die Ordnungspunkte dieser Punktreihe bilden ein Punktpaar der Kegelschnittschaar, weil sie bezüglich aller Curven des Systems conjugirt sind.“ Mit anderen Worten: Alle Kegelschnitte eines Systems dritter Stufe lassen sich auf unzählige Arten in Büschel ordnen; alle diese Büschel schneiden drei von dem System abhängige Geraden in denselben Involutionen — oder: Alle Kegelschnitte, welche ein System dritter Stufe bilden, haben drei Punktpaare, die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, als Paare conjugirter Punkte.

Somit wären diejenigen Punkte, in denen die neue Auflage von der alten sich unterscheidet, ziemlich ausführlich angegeben. Die alte Form, in welcher die Geometrie der Lage den Mathematikern lieb geworden war, ist beibehalten; trotz der umfangreichen und von so allgemeinen Gesichtspunkten ausgehenden Zusätze finden wir in ihr einen alten Bekannten wieder. Diese Zusätze, so bedeutsam für die Theorie der Curven zweiter Ordnung, die ungemein klare Herleitung und übersichtliche Gruppirung der Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung, vor Allem aber die leichte Einführung in die Methoden der reinen Geometrie der Lage werden die neue Auflage zu einem für jeden Mathematiker unentbehrlichen Handbuche der synthetischen Geometrie machen; die Hinzufügung einer reichhaltigen Sammlung von Uebungsaufgaben giebt der studirenden Jugend Stoff zur Vervollständigung ihrer Kenntnisse, zur Anwendung der kennen gelernten Methoden, hauptsächlich aber Anregung zur eigenen Forschung auf einem der interessantesten Gebiete der Mathematik, welches seine fast ideale Höhe zum grössten Theile den Arbeiten deutscher Forscher verdankt.

Milinowski.

Handbuch der Vermessungskunde von Dr. W. Jordan, Professor der Vermessungskunde am grossherzogl. Polytechnikum zu Carlsruhe. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage des „Taschenbuchs der praktischen Geometrie“. 1. Lieferung; Bogen 1—18. Stuttgart, Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung. 1877.

Das Werk will, wie sein im Jahre 1873 erschienener Vorläufer, die Vermessungswissenschaft ihrem jetzigen Standpunkte entsprechend lehrer-

führt dies jedoch nicht in jener oft unangenehm knappen Weise aus, die bei dem „Taschenbuche“ unvermeidlich war. Es kündigt sich zwar selbst nur als eine zweite umgearbeitete Auflage an, hat aber, wenn die folgenden Lieferungen in der Art und in dem Umfange der bis jetzt vorliegenden ersten erscheinen, vollkommen Anspruch darauf, ein neues Werk genannt zu werden. Der Herr Verfasser wollte dies vermuthlich auch durch die Umänderung des Titels andeuten, hätte aber, nach Ansicht des Referenten, wohl besser gethan, es direct auszusprechen, denn das „Handbuch“ ist — so weit man bis jetzt zu urtheilen vermag — nicht mehr „eine Sammlung von Resultaten der niederen und höheren Vermessungskunde“, sondern ein ausführliches Lehrbuch derselben, mithin ein Werk anderer Art, als das 1873 erschienene.

Der Gesammteindruck, welchen die erste Lieferung (288 Seiten in Grossoctav) erzeugt, ist ein sehr günstiger: vielfach ist Neues geboten, mit Geschick das Nothwendige ausgewählt, das Entbehrliche weggelassen. Erklärungen und Theorien sind vollkommen deutlich gegeben, ohne ins Breite zu laufen; an geeignet gewählten Beispielen und an Tabellen ist das Werk ungewöhnlich reich, was die Studirenden und die Praktiker hoch schätzen werden.

Der erste Theil des Buches betrifft die „Theorie der Beobachtungsfehler oder die Methode der kleinsten Quadrate“. Eine Einleitung bietet die Hauptzüge der Geschichte der Ausgleichungsrechnung und giebt Literaturnachweise. Das empirisch begründete Princip der kleinsten Quadratsumme wird als Grundlage benutzt, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur nebenbei Berücksichtigung findet. Hierdurch schon unterscheidet sich das „Handbuch“ von dem „Taschenbuche“, und zwar zum Vortheile des ersteren, denn für sehr Viele, insbesondere für die Praktiker (denen das Werk ja auch dienen soll) ist die elementare Darstellung meist die bessere, also die, welche in den Vordergrund gerückt werden muss, wenn Abschreckungen vermieden werden sollen.

Dieser erste Theil umfasst 134 Seiten, während ihm im „Taschenbuche“ kaum ein Viertheil dieses Raumes gewidmet war. Er wird in drei Capiteln abgehandelt; das erste derselben führt die Ueberschrift: Ausgleichungsrechnung nach dem Princip der kleinsten Quadratsumme. Dass der Herr Verfasser hier die zwar etwas längere, aber richtige Ausdrucksweise „kleinste Quadratsumme“ benutzt, billigt der Referent sehr, bedauert aber, dass es nicht consequent geschehen ist. Ein Mann von hervorragender Bedeutung, wie Herr Jordan, wäre geeignet, hier Bahn zu brechen. Es behandelt dieses erste Capitel in geschickter und elementarer Weise (mit nur einiger Benutzung der Differentialrechnung) zunächst den durchschnittlichen und den mittleren Fehler, das Fehlerfortpflanzungsgesetz, das einfache und das allgemeine arithmetische Mittel (*letzteres unter Einführung* der Gewichte), vermittelnde Beobachtungen

einer Unbekannten, Bestimmung des mittleren Fehlers aus Beobachtungsdifferenzen und geht dann — da das arithmetische Mittel zur Ausgleichung von Beobachtungen mehrerer Unbekannten nicht hinreicht — zur Herbeischaffung eines allgemeinen Ausgleichungsprincipes über. Letzteres (Quadratsumme der Widersprüche möglichst klein) erhält eine zwar nicht mathematisch strenge, aber für den vorliegenden Fall hinreichende und vollkommen elementare Begründung, unter Hinweis auf die einschlagende Literatur.

Mit Benutzung des so gewonnenen Grundsatzes (und theilweise der Differentialrechnung) folgt nun die Behandlung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen und Dasjenige, was an diese sich mehr oder weniger eng anschliesst; ferner die Beifügung von Formelnzusammenstellungen, Rechenproben und Anwendungen. Hieran reiht sich die Besprechung bedingter Beobachtungen, wobei die aus der Analysis bekannte Behandlung der Minima mit Nebenbedingungen der Ausgangspunkt ist. Auch hier giebt der Herr Verfasser eine Zusammenstellung der Formeln und eine geeignete Anwendung. Den Schluss des Capitels bildet die Behandlung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, welche sich zuerst an Bessel's Arbeiten und dann an Dasjenige lehnt, was Helmert hierüber in seiner vortrefflichen „Ausgleichungsrechnung" (Leipzig, 1872) gegeben hat.

Das zweite Capitel bezieht sich auf das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit. Die Grundlage bilden hierbei die allgemein bekannten Hauptsätze der (vorher nicht benutzten) Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nachdem die Wahrscheinlichkeitsfunction nach Gauss hergeleitet worden ist, wird der „wahrscheinliche" Fehler besprochen, jedoch ausdrücklich bemerkt, dass späterhin nicht er, sondern der „mittlere" Fehler in der Regel zur Benutzung gelangen werde, was Gauss bekanntlich selbst empfohlen hat. Hierauf folgt die graphische Darstellung des obigen Fehlergesetzes und der Vergleich mit einer Beobachtungsreihe. Zuletzt zeigt der Herr Verfasser, welche Vortheile und Nachtheile sich einstellen würden, wenn man eine von ihm in der Form

$$\varphi(\varDelta) = A + B\varDelta^2 + C\varDelta^4 + \ldots$$

aufgestellte algebraische Fehlerfunction an Stelle der Gauss'schen benutzte, und liefert endlich kurz den Nachweis, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dasselbe Ausgleichungsprincip führt, welches im ersten Capitel ohne strenge Begründung benutzt worden ist.

Unter Verwendung seiner eigenen früheren Arbeiten und derjenigen von Andrä und Helmert liefert der Verfasser im dritten Capitel eine Untersuchung der Genauigkeit der einfachen geodätischen Punktbestimmung. Er betrachtet zunächst einen Fall, auf welchen sich andere leicht zurückbringen lassen, nämlich den, dass der Punkt bestimmt ist durch zwei Gerade, deren Richtungen fehlerfrei sind, denen

aber Parallelverschiebungen als Fehler anhaften. Dabei kommt er zwanglos auf den Begriff der Genauigkeitscurven (richtiger gesagt: der Curven gleicher Genauigkeit) und auf die Fehlerellipse. Sodann folgt die Untersuchung des Vorwärtseinschneidens mit zwei Strahlen und die Herleitung des für jeden Praktiker wichtigen Satzes, dass die günstigste Visur hierbei nicht unter 90^{0}, sondern unter $109^{0} 28'$ stattfindet. Diesem schliesst sich das Seitwärtseinschneiden an und das Pothenot'sche Problem, deren Genauigkeitsgrade unter Aufzeichnung der zugehörigen Curven sehr geschickt dargestellt und verglichen sind.

Den Schluss des Capitels bildet die Herleitung des mittleren Fehlers eines Punktes, dessen Lage durch mehr als zwei Beobachtungen bestimmt wurde, von denen jede einen geometrischen Ort für ihn liefert, und — hiermit zusammenhängend — die Betrachtung der Fehlerellipse für mehrfache Punktbestimmung, die einfache Triangulirung, das Vorwärtseinschneiden mit drei Strahlen und das Pothenot'sche Verfahren unter Benutzung dreier Winkel, ebenfalls mit Darstellung zugehöriger Genauigkeitscurven.

Der erste Theil des Buches enthält, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, von der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme nicht nur Dasjenige, was die niedere Geodäsie braucht, sondern auch Das, was die höhere nöthig hat.

Des Buches zweiter Theil bezieht sich auf die niedere Geodäsie, nämlich auf Dasjenige, was von der Vermessungskunde für technische und landwirthschaftliche Zwecke nöthig ist. Es wird hier mit wenig Worten immer viel gesagt; für den Anfänger ist das vielleicht oft eine unbequeme Knappheit, dem Verfasser aber macht es Ehre. Dass nicht zuerst die Instrumente und dann die Messungen zur Besprechung gelangen, sondern beide gleichzeitig Behandlung finden, wird von Vielen als nicht systematisch getadelt werden, bietet aber manche Vortheile dar.

Die ersten fünf Capitel dieses zweiten Theiles führen ganz dieselben Ueberschriften, wie in dem 1873 erschienenen „Taschenbuche"; während sie aber in letzterem etwa 70 Seiten füllten, haben sie jetzt reichlich den doppelten Umfang. Das erste dieser Capitel behandelt (auf 32 Seiten) die einfachsten Vermessungsoperationen und ihre Verbindung zu kleinen Aufnahmen. Hier gelangen zunächst Kreuzscheibe, Winkelspiegel, Spiegelkreuz und Prismeninstrumente zu einer Besprechung, die dem Genauigkeitsgrade dieser Werkzeuge höchst lobenswerthe Aufmerksamkeit schenkt. Dann folgt die Behandlung der Messlatten und ihrer Längenvergleichung, der Stahlbänder, der Ketten und der mit diesen Werkzeugen ausgeführten Längenermittelungen. Auch hier ist wieder mit vieler Sorgfalt und unter Benutzung der neuesten Untersuchungen die erreichbare Genauigkeit berücksichtigt, und zwar nicht nur bezüglich der unregelmässigen, sondern auch bezüglich der

regelmässigen Fehler, welche letzteren von den Praktikern bisher vielfach vernachlässigt wurden, obgleich ein Recht hierzu durchaus nicht vorliegt. Das letzte der hier zur Besprechung gelangenden Werkzeuge ist das zur Zeit von den Geodäten noch wenig beachtete Messrad. Der Herr Verfasser benutzt bezüglich der Beurtheilung der Genauigkeit die Versuche, welche Prof. Tinter mit einem derartigen Längenmesser von Wittmann (in Wien) gemacht hat und Prof. Schellbach mit einem solchen von Baer (in Nürnberg); das Resultat ist: Empfehlung des Rades.

Das erste Capitel schliesst mit der Behandlung der Längenbestimmung durch Abschreiten und Marschzeit und mit derjenigen der Aufnahme kleiner Landstriche durch Messung von Geraden nebst zugehörigen Senkrechten. Bezüglich der Ersteren ergiebt sich — allerdings auf Grund von Unterlagen, die Viele als nicht hinreichend ansehen werden —, dass der Schritt, wenn keine speciellen Angaben vorliegen, zu 0,8 Meter anzunehmen ist, und zwar mit einer Unsicherheit von etwa $5\,^0/_0$, dass aber die Genauigkeit der Schrittmaasses bis auf 1 oder $2\,^0/_0$ erhöht werden kann, wenn der Schrittwerth des Messenden mit Rücksicht auf Bodenbeschaffenheit, Ermüdung etc. wiederholt ermittelt worden ist. — In Anbetracht der ziemlich grossen Zahl Derjenigen, welche vielfach in Waldungen und an Flüssen vermessen müssen, hätte das zuletzt behandelte Abstecken langer Senkrechten und das Ueberwinden von Hindernissen durch geeignete Constructionen oder Rechnungen wohl etwas ausführlicher gegeben werden sollen, ja es wäre vielleicht sogar gut gewesen, hierbei die Anwendbarkeit der neueren (projectivischen) Geometrie zu erwähnen, auf welche der Referent im XXIII. Bande des „Civilingenieur" hingewiesen hat.

Das zweite Capitel (33 Seiten) betrifft die Aufnahme, Berechnung und Theilung der Flächen. Es behandelt zunächst die Inhaltsermittelung unter Verwendung von Originalmaassen und von solchen, welche aus Plänen abgestochen sind (Letzteres unter specieller Berücksichtigung des Papiereinganges); sodann die Genauigkeit der Flächenbestimmung mit Beifügung der hierfür in verschiedenen Staaten geltenden gesetzlichen Vorschriften; hierauf die Flächentheilung und Grenzenverlegung sowohl im streng mathematischen Sinne, als auch in demjenigen rationellen Probirens; endlich das Amsler'sche Planimeter und — was sehr zu billigen ist — die Thomas'sche Rechenmaschine, wie auch den auf die Logarithmenlehre gegründeten Rechenschieber.

Capitel III (4 Seiten) bezieht sich auf die Libelle und berücksichtigt hierbei die Temperatureinflüsse unter Erwähnung der Vorschläge von Liagre und Vogler; Cap. IV (15 Seiten) behandelt die für die Vermessungskunde wichtigsten optischen Instrumente, giebt zunächst eine in geeig[illegible]ene Theorie der Convexlinse und der

Combination zweier Linsen, sodann eine Besprechung der Lupe, des einfachen astronomischen Fernrohres, der Fernrohre mit mehr als zwei Linsen und des Mikroskopes.

Das fünfte Capitel (57 Seiten) betrifft den Theodolit. Es behandelt zunächst seine Einrichtung (mit Einschluss der „Ablesevorrichtungen“ Nonius und Mikroskop, nebst Adjustirung der letzteren), sodann seine Prüfung und Berichtigung, die Elimination der Axenfehler und, sehr eingehend, den Einfluss der letzteren; sodann die Excentricität des Fernrohres, diejenige zwischen Limbus und Alhidate, die Untersuchung der Theilungsfehler, das Messen der Horizontalwinkel, die Fehler der Repetitionsmessung (mit Rücksicht auf Bessel, Struve und die badische Triangulirung), endlich das Messen der Vertikalwinkel mit Höhenkreis oder Schraube unter Hinweis auf die einschlagenden Arbeiten von Stampfer, Koristka, Barth und Pfaundler.

Capitel VI (6 Seiten) giebt das Nothwendige über Coordinaten im Allgemeinen und schliesst mit einer bezüglich siebenstelliger Logarithmentafeln an die Praktiker gerichteten Mahnung, welche schon der berühmte Encke aussprach, indem er erklärte, dass er höchst selten andere als fünfstellige Tafeln benutzt habe.

Den Schluss der ersten Lieferung des Werkes bildet der Anfang eines Capitels über polygonale Züge.

Die Literatur ist bei den einzelnen Abschnitten umfänglich berücksichtigt, hingegen hat die Geschichte der Geodäsie nur bezüglich der Ausgleichungsrechnung hinreichende Erwähnung gefunden, und zwar am Anfange des ersten Theiles. Da dies geschah, so musste man am Anfange des zweiten Theiles (oder doch bei den einzelnen Capiteln desselben) eine ebenso ausführliche Berücksichtigung der historischen Seite erwarten. Diese ist nicht erfolgt; doch giebt sich Referent der Hoffnung hin, am Schlusse des Werkes entweder die nöthigen Mittheilungen zu finden, oder Nachweise, welche dem Leser sagen, wie er sich in der kürzesten Zeit mit den Hauptzügen der Geschichte der gesammten Geodäsie (über die nur wenig veröffentlicht wurde) bekannt machen kann. Was in dieser Beziehung das „Taschenbuch“ früher geboten hat, genügt nicht, denn es bezieht sich fast nur auf die Gradmessungen. Die völlige Unkenntniss der Geschichte anderer Gebiete der Geodäsie tritt aber leider unter Studirenden und Praktikern sehr häufig auf, und ein Werk wie das Jordan'sche ist berufen, hier bessern zu helfen.

Die dem Handbuche eingedruckten Holzschnitte sind recht gut, erreichen aber meist nicht ganz die Vollkommenheit derjenigen, welche die bekannte treffliche Vermessungskunde von Bauernfeind darbietet. Der Druck ist klein, aber scharf; Druckfehler sind nur in sehr geringer Zahl vorhanden, sinnstörende fast gar nicht.

Der dritte Theil des Buches wird (laut Prospect) die sphärische Geodäsie nach Soldner und Bohnenberger, die sphäroidische nach Gauss und Bessel darbieten und neuere Untersuchungen beifügen. Das ganze Werk soll 60—65 Bogen enthalten, etwa 16 Mk. kosten und noch in diesem Jahre zum Abschlusse gelangen.

Die bisherigen hervorragenden Leistungen des Herrn Verfassers in den verschiedensten Gebieten der Geodäsie lassen mit Sicherheit erwarten, dass die folgenden Lieferungen der ersten an Güte nicht nachstehen werden. Ist dies der Fall, so darf sich das Werk als ebenbürtig neben die besten bis jetzt erschienenen Lehrbücher der Vermessungskunde stellen und wird in vielen Beziehungen eine sehr wichtige Ergänzung und Erweiterung derselben bilden. Der Referent empfiehlt es bestens nicht nur den Geodäten und den Studirenden der Technik, sondern auch denen der Mathematik, letzteren deshalb, weil es ihnen viele werthvolle Anregungen bieten wird.

Dresden, Juli 1877. A. FUHRMANN.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1877.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahr 1876. Berlin, Dümmler. 4 Mk. 60 Pf.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1876. Ebendas. 28 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1877, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 75. Bd. 1. Abth, 1. bis 3. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk. 20 Pf.

——, 2. Abth., 4. Heft. Ebendas. 3 Mk.

Crelle's Journal für Mathematik, fortgesetzt von Borchardt. 84. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von L. Königsberger und G. Zeuner. 2. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 3 Mk.

Fortschritte der Physik. 29. Jahrg. 1. Abth. (Jahr 1873). Redig. von B. Schwalbe. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Meteorologische Beobachtungen in Dorpat. 10. Bd. Jahr 1875, redigirt von A. v. Oettingen und K. Weihrauch. Leipzig, Köhler. 1 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Winckler, A., Ueber eine den linearen Differentialgleichungen II. Ordnung entsprechende Relation. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Wiecke, P., Algebraisches Uebungsbuch. 1. Reihe. 2. Aufl. Berlin, G. Reimer. 75 Pf.

Igel, B., Einige Sätze und Beweise zur Theorie der Resultante. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Hattendorff, K., Algebraische Analysis. Hannover, Rümpler. 7 Mk. 20 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber die Function $C_n^\nu(x)$. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Lampe, E., Geometrische Aufgaben zu den cubischen Gleichungen. Berlin, H. W. Müller. 2 Mk.

Koutny, E., Die Normalenflächen der Flächen II. Ordnung längs ebener Schnitte derselben. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Reidt, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Stereometrie. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Mink, W., Lehrbuch der analytischen Geometrie und Kegelschnitte. Berlin, Nicolai. 1 Mk. 50 Pf.

Schlömilch, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie des Raumes. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Angewandte Mathematik.

Lepsius, R., Die babylonisch-assyrischen Längenmaasse nach der Tafel von Senkereh. (Akad.) Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Peschka, V., Freie schiefe Projection. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Clausius, R., Die Potentialfunction und das Potential. 3. Aufl. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Navier, Mechanik der Baukunst, deutsch von G. Westphal. 2. Aufl., 1. Abth. Hannover, Helwing. pro compl. 12 Mk.

Stehle, A., Aufgabensammlung aus der Mechanik. I. Die Gesetze der Bewegungslehre. Leipzig, Knapp. 6 Mk.

Finger, J., Ueber den Einfluss der Erdrotation auf die parallel zur Erdoberfläche vor sich gehenden Bewegungen, insbesondere auf die Strömungen der Flüsse und Winde. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Klein, H., Theorie der Elasticität, Akustik und Optik. Leipzig, Quandt & Händel. 14 Mk.

Möllinger, O., Lehrbuch der Astrognosie. 3. Aufl. Zürich, Schmidt. 3 Mk.

Bestimmungen der geographischen Breite der königl. Sternwarte bei München. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 80 Pf.

Gruss, G., Ueber die Bahn der Loreley (165). (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Heis, E., Resultate der in den Jahren 1833—1875 angestellten Sternschnuppen-Beobachtungen. Cöln, Du Mont-Schauberg. 6 Mk.

Physik und Meteorologie.

Handl, A. und R. Přibram, Ueber eine Methode zur Bestimmung des Siedepunktes. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Obermayer, A. v., Beitrag zur Kenntniss der zähflüssigen Körper. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Boltzmann, L., Ueber eine neue Bestimmung einer auf die Messung der [illegible] benden Grösse aus der Theorie der Capillari[illegible] [illegible]ld. 30 Pf.

LOSCHMIDT, J., Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichts eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft. IV. Mitthlg (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

PUSCHL, C., Ueber den innern Zustand und die latente Wärme der Dämpfe. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

PULUJ, J., Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Thonzellen. 2. Abh. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

MAXWELL, J. C., Theorie der Wärme. Breslau, Maruschke & Berendt. 6 Mk.

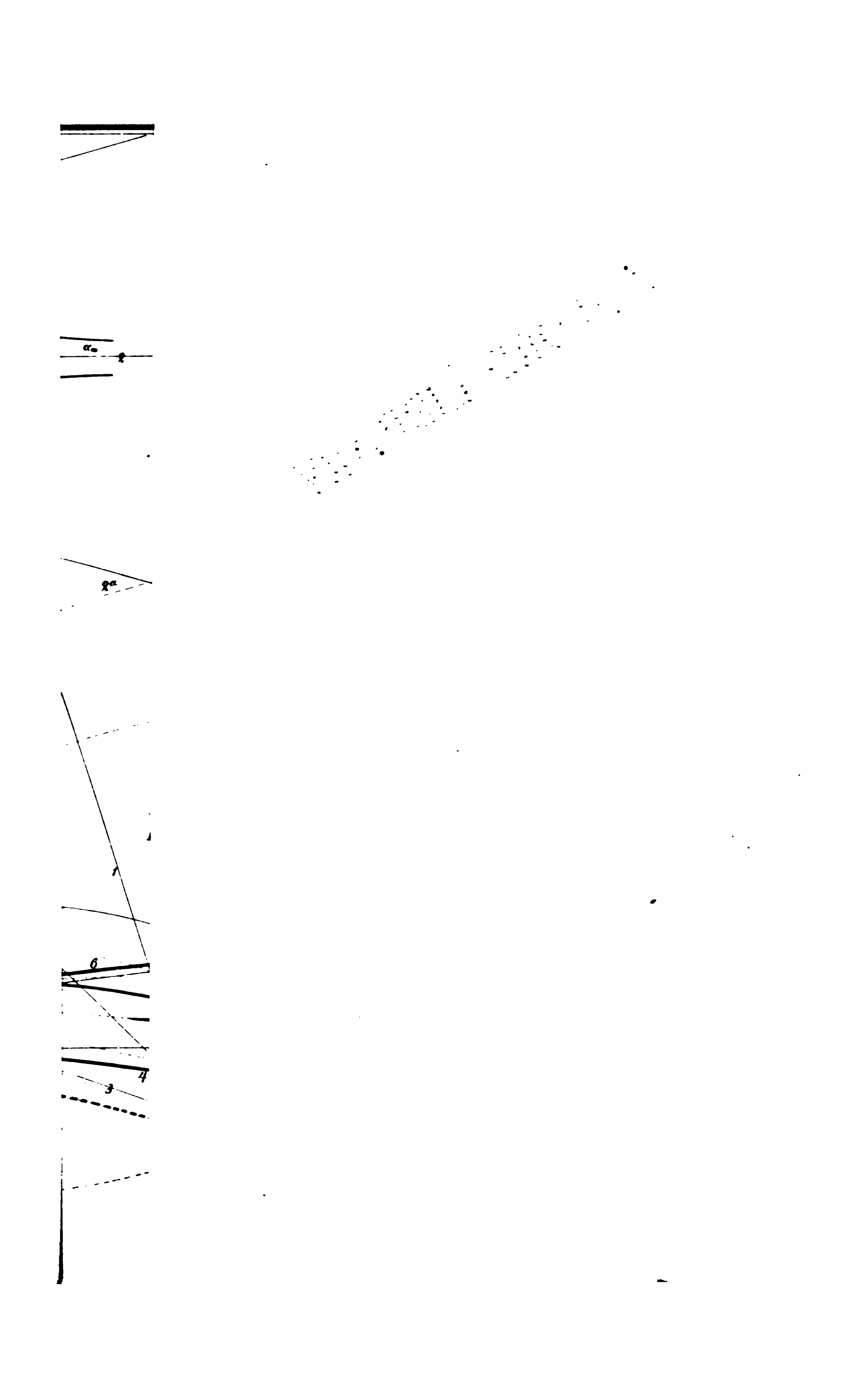
MARGULES, M., Ueber die stationäre Strömung der Elektricität in einer Platte bei Verwendung geradliniger Elektroden. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

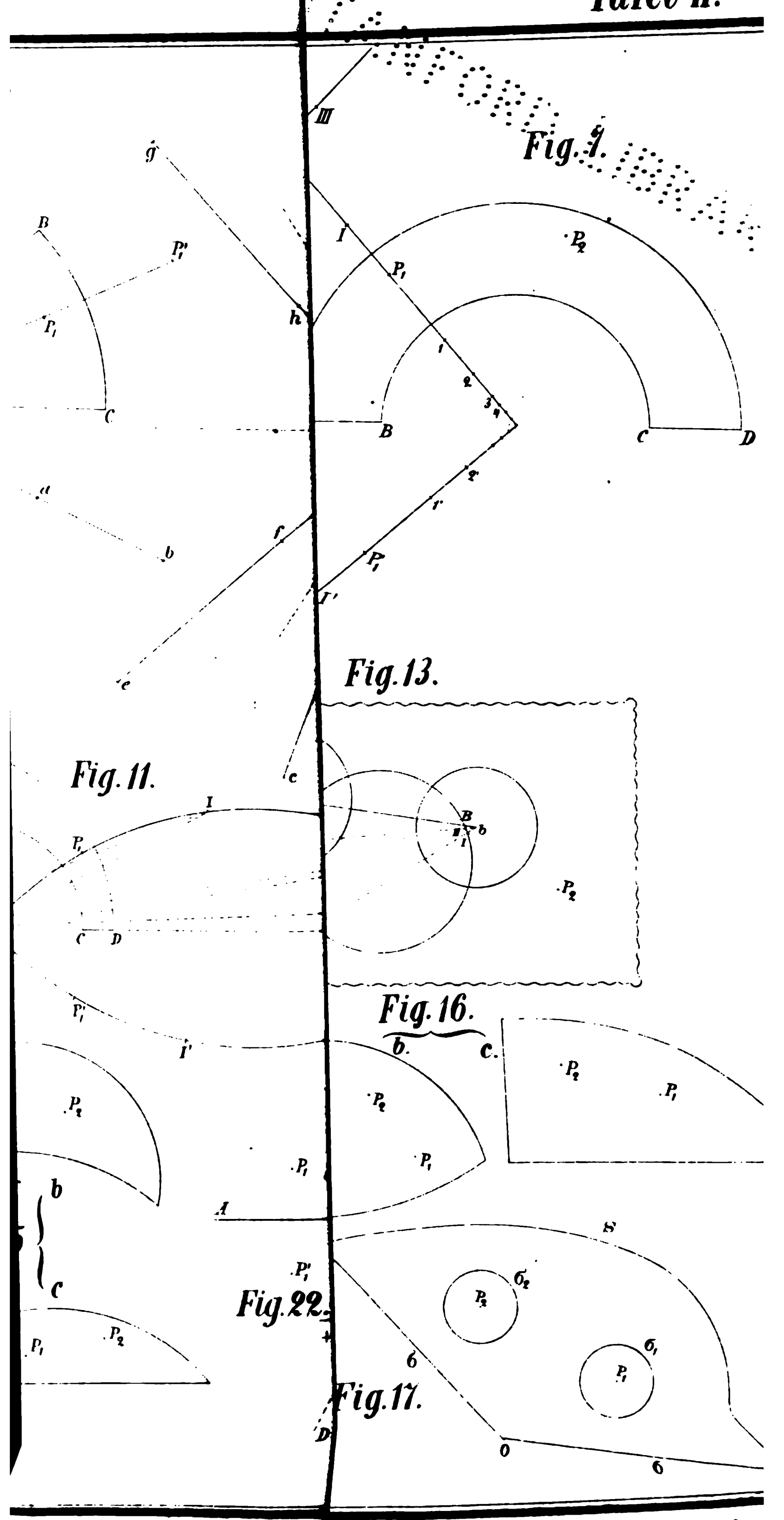
URBANITZKY, A. v., Ueber die Schichtung des elektrischen Lichtes. Wien, Hölder. 1 Mk.

HROMÁDKO, F., Physikalische Wandtafeln (12 Blatt) mit Text: „Bilder aus der Physik". Tabor, Jansky. 15 Mk.

BOHN, O., Ergebnisse physikalischer Forschung. 2. Lief. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

HORNSTEIN, C., Ueber die wahrscheinliche Abhängigkeit des Windes von den Perioden der Sonnenflecke. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.


1
6
4
3


Fig. 9.
Fig. 13.
Fig. 11.
Fig. 16.
Fig. 22.
Fig. 17.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber den Antheil Petřina's an der Erfindung des telegraphischen Gegensprechens.

Von

Dr. Ed. Zetzsche.

Den ersten Anlauf zu einer gleichzeitigen mehrfachen Telegraphie machten bereits im Jahre 1849 Siemens und Halske. Sie nahmen zwar auch den Gedanken in ihr am 23. October 1849 nachgesuchtes englisches Patent (Nr. 13062, vom 23. April 1850) auf,[1]) überzeugten sich aber bald von der Schwierigkeit der Lösung bei einer grösseren Anzahl von Drähten. Es blieb daher bei dem blosen Gedanken und selbst dieser ward erst 1856 durch eine Mittheilung darüber in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie (Bd. 98, S. 115) weiter bekannt.

Die ersten Gegensprechversuche auf der Linie wurden 1853 zwischen Wien und Prag von dem damaligen österreichischen Telegraphendirector Dr. Wilhelm Gintl angestellt. Diese Versuche wurden zuerst mit Morsetelegraphen vorgenommen, und es wurden die dabei benutzten Apparate zuerst im December 1853, und zwar von einem, Gintl unbekannten Verfasser und ohne Gintl's Zuthun[2]) in einem nur mit G. unterzeichneten[3]) Artikel des Polytechnischen Centralblattes[4]) beschrieben. Gintl selbst hat über diese Versuche Nichts veröffentlicht; durch die Schwierigkeiten aber, auf welche er infolge „der fortwährenden Veränderungen der Linienstromstärken" in der dabei nöthigen feineren Regulirung der Stromstärken stiess, ward er veranlasst, anstatt der Morseapparate seinen

1) S. 19 der Patentbeschreibung; *sheet 3*, Fig. 11.

2) Vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1. Bd. S. 304.

3) Von dem späteren sächsischen Telegraphendirector L. Galle herrührend.

4) Jahrgang 1853, S. 1473; daraus in Dingler's Polytechnisches Journal 1854, Bd. 131, S. 191. — Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 2, S. 28.

chemischen Schreibtelegraphen zu verwenden, über welchen er der Wiener Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 28. April 1853 ausführliche Mittheilung gemacht hatte.[1]) Diesen chemischen Gegensprecher beschrieb **Gintl** ausführlich in der Sitzung der Wiener Akademie vom 30. November 1854,[2]) und es mag gleich hier hervorgehoben werden, dass bei demselben zwar der nämliche Doppeltaster, wie bei den Morsegegensprechern und auch eine Ausgleichungsbatterie Verwendung fand, dass er sich indessen insofern von dem letztern ganz wesentlich unterschied, als bei letzterem dem localen Ausgleichungsstrome ein von dem Linienstromwege vollständig getrennter Stromkreis angewiesen ist, eine Stromverzweigung also nicht eintritt, bei dem chemischen dagegen beide Stromkreise ein gemeinschaftliches Stück enthalten und deshalb Zweigströme auftreten müssen.

Schon während der **Gintl**'schen Versuche verbreitete sich das Gerücht in Wien, dass der Professor der Physik in Prag, Dr. Franz Adam **Petřina**, **Gintl** bei dessen Anwesenheit in Prag die Idee des Gegensprechens mitgetheilt habe; auch in weiteren Kreisen fand dieses Gerücht Verbreitung und 1856 fand sich E. W. **Siemens** veranlasst, in **Poggendorff**'s Annalen (Bd. 98, S. 120) darauf hinzuweisen, wie wünschenswerth eine bestimmte Aufklärung darüber sei, da **Gintl** selbst nirgends das Gegensprechen (mit Morseapparaten) als seine Erfindung in Anspruch genommen habe. **Petřina** konnte der darin liegenden Aufforderung nicht genügen, weil er bereits im Jahre 1855 gestorben war; **Gintl** aber hat jenen öffentlich und so bestimmt ausgesprochenen Wunsch zu erfüllen keine Veranlassung genommen.

Bei Bearbeitung der mehrfachen Telegraphie für das kürzlich erschienene Schlussheft des ersten Bandes meines Handbuchs der Telegraphie trat an mich die Nöthigung heran, mich in dieser Prioritätsfrage für oder wider zu entscheiden, und da inzwischen ausser **Petřina** auch der in gewissem Sinne mitbetheiligte Dr. **Stark** in Wien verstorben war, so schien es mir richtiger, nicht den einzigen überlebenden Betheiligten, Dr. **Gintl**, unmittelbar darüber zu befragen, sondern den Versuch zu machen, aus den vorhandenen Schriftquellen und den Aussagen noch lebender Unbetheiligter zu einer Entscheidung zu gelangen. In dem Handbuche (S. 546) konnte ich diese Entscheidung wegen Raummangels nicht in der erwünschten Weise begründen, und ich that es daher zunächst Anfang August 1877 in dem Journal *télégraphique* (Bd. III, S. 65

1) Vergl. Sitzungsberichte Bd. 10, S. 616 bis 626.

2) Vergl. Sitzungsberichte Bd. 14, S. 401 ff.; daraus in der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins Bd. 7, S. 136, und der Telegraphenvereins-Zeitschrift 2. Bd., S. 25 und 202. Aus den Mai 1855 datirte Abänderungen dieses chemischen Gegensprechers bespricht **Gintl** auf S. 135 des 2. Bandes der *Telegraphen*vereins-Zeitschrift.

und hoffte damit zugleich, zu einer vollen Klarlegung den Anstoss zu geben. Um auf die Erfüllung dieser Hoffnung mit um so grösserer Gewissheit rechnen zu dürfen, halte ich den Abdruck der Begründung meiner Entscheidung auch in einer deutschen Zeitschrift für angezeigt und ich lasse deshalb jenen im Journal *télégraphique* abgedruckten Artikel hier in dem nur sehr wenig geänderten ursprünglichen Wortlaute folgen.

I. Ich habe mich zuvörderst darnach umgesehen, ob Gintl irgendwo die Erfindung des Gegensprechens mit Morseapparaten unzweideutig für sich in Anspruch nimmt. In erster Linie kommt hierbei das in Frage, was Gintl in seinem schon erwähnten Vortrage vom 30. November 1854 sagt. Die betreffende Stelle auf S. 414 (Bd. 14) der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Sitzungsberichte der Wiener Akademie lautet:

„Ich habe mich schon im verflossenen Jahre längere Zeit hindurch bemüht, die Doppelcorrespondenz auf demselben Leitungsdrahte mit dem Morse'schen Schreibtelegraphen zu Stande zu bringen, und bei meinen in dieser Beziehung vielfältig auf der Telegraphenlinie zwischen Wien und Prag im Monate Juli 1853 angestellten Versuchen ist es mir zwar gelungen, Depeschen gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung an ihre Bestimmungsorte zu befördern, wobei es aber oft geschah, dass nach einigen, an beiden Stationen gegenseitig recht gut lesbaren Worten eine Confundirung der Zeichen auf jedem Stationsapparate eintrat, sobald nämlich der Linienstrom eine Aenderung in seiner Stärke erlitt und es nicht gleich möglich war, die Stärke des Localstromes in demselben Maasse zu verändern.

„Aus diesem Grunde habe ich auch die gleichzeitige Doppelcorrespondenz mit dem Morse'schen Schreibtelegraphen vorläufig nicht weiter verfolgt und mich an die Durchführung derselben mittels electrochemischen Schreibapparates gehalten, welche mir vollständig gelungen ist."

Offenbar liegt in den Worten „zu Stande zu bringen" durchaus nicht unbedingt, dass die Idee des Gegensprechens und die Einrichtung der Apparate dazu eine Erfindung von Gintl sei. Gerade das „zu Stande bringen" erscheint mir aber sehr wesentlich; der österreichische Telegraphendirector Gintl — und in Oesterreich wohl er allein — hatte dazu ohne Weiteres die Macht (abgesehen von der sachlichen Ausführbarkeit); nicht so der Professor Petřina, wenn er der Erfinder war.

Ebenso zwingt der Ausdruck[1]) Gintl's: „des von mir dabei (d. h. bei den Versuchen zwischen Wien und Prag) **angewandten**

---

1) Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 2, S 28.

und Verfahrens" nicht zu der Annahme, dass Apparat und Verfahren eigene Erfindung waren.

Entscheidender könnten einige Stellen in der im Januar 1855 niedergeschriebenen Entgegnung[1]) Gintl's auf eine Aeusserung des Dr. v. Icilius sein, worin dieser die Priorität der Erfindung des gleichzeitigen Telegraphirens für C. Frischen in Anspruch nimmt. Gintl verwahrt sich hier zunächst dagegen, dass er „im Jahr 1853 blos eine Idee zur Erreichung des genannten Zweckes ausgesprochen habe" und führt dann fort: „Schon im Monate Juli 1853 sind von mir .... gelungene Doppelcorrespondenzen mit den von mir dazu eingerichteten Morse'schen Schreibapparaten ausgeführt worden; und da ich aus meinem Verfahren kein Geheimniss machte, so ist dasselbe sammt der Einrichtung des ganzen Apparates in dem Leipziger polytechnischen Centralblatt von einem mir unbekannten Verfasser ausführlich beschrieben worden. Es war also nicht blos eine Idee, welche ich damals ausgesprochen, sondern vielmehr in's Werk gesetzt habe". Lassen aber auch die hier von Gintl — dem unbestrittenen Veranstalter jener Versuche mit dem Morse-Gegensprecher und dem Erfinder des chemischen Gegensprechers — gebrauchten Worte noch an Klarheit zu wünschen übrig, so bleiben die ebenda weiter folgenden Aeusserungen Gintl's: „wie Herr Dr. v. Icilius, nach dessen eigener Erklärung die von mir zuerst ausgegangene Idee und mein Doppel-Telegraphirungsverfahren Herrn Frischen erst zur Ausführung seines Verfahrens angeregt hat," ...... und: „meines schon im Jahre 1853 ohne mein Zuthun veröffentlichten Verfahrens; es wäre denn, dass Herr Dr. v. Icilius den Beweis liefern würde, Herr Frischen habe schon früher als ich das Doppel-Correspondenzprincip entdeckt und sei vor mir zur Durchführung desselben geschritten" allein übrig, welche aber an Tragweite wesentlich einbüssen, sobald man sie als blos gegen Frischen's Ansprüche gerichtet gelten zu lassen hat, und ausserdem durch die kurz vorhergehende Stelle: „diese von mir .... schon am 9. Juni ausgesprochene Idee basirt sich überdies auf die von mir entdeckte Thatsache, dass sich zwei elektrische Ströme in entgegengesetzter Richtung durch denselben Leitungsdraht gleichzeitig und ungehindert fortpflanzen, welches ich durch Versuche[2]) constatirt und in der erwähnten Sitzung auseinander gesetzt habe. Dieses Factum ist aber das eigentliche Princip, auf welchem die Doppelcorre-

---

1) Telegraphenvereins-Zeitschrift, Bd. 1, S. 304.

2) Nach den Wiener Sitzungsberichten Bd. 14, S. 400, wurden diese Versuche mit dem chemischen Schreibapparate angestellt, natürlich bevor dessen Verwendung zum Gegensprechen in Frage kam. — Uebrigens finde ich in dem Berichte über die Sitzung vom 9. Juni 1853 Nichts über eine derartige Mittheilung *Gintl's*.

spondenz beruht, und ....“ und die in dieser Stelle ausgeprägte Bestimmtheit des Ausdrucks in Betreff der Entdeckung jener Thatsache merklich abgeschwächt werden, um so mehr, als jene „Thatsache“ durch das damalige, weit durchsichtigere Morse-Gegensprechen noch viel weniger, wie durch das chemische erwiesen worden ist und erwiesen werden konnte, am allerwenigsten aber Gintl[1]) „den schlagendsten Beweis für die wirkliche Coexistenz der beiden elektrischen Ströme in demselben Leitungsdrahte dadurch geliefert hat, dass, während die eine Station einen constanten Strom in die Leitung sendet und folglich einen continuirlichen Strich auf dem Papierstreifen der anderen Station erzeugt, man von der letzteren zur ersteren Station anstandslos telegraphiren kann“.

II. Ich habe sodann nachgeforscht, ob von Petřina herrührende, auf diese Angelegenheit bezügliche Aeusserungen vorhanden sind. Dabei war hauptsächlich die im April 1855 geschriebene letzte der vier (1855 in Prag gedruckten) „Mittheilungen aus dem Gebiete der Physik“ nachzusehen, welche Petřina in den Abtheilungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (5. Folge, 9. Band; Prag 1857) veröffentlicht hat unter dem Titel: „Wissenschaftliche Beleuchtung der vom Dr. Gintl durch seine Versuche über die gleichzeitige Gegencorrespondenz gelieferten Beweise[2]) für die Coexistenz zweier, einen Leiter in entgegengesetzten Richtungen ohne Störung durchlaufender galvanischer Ströme und Angabe eines neuen, diesen Gegenstand betreffenden Versuchs“. Es handelt sich hier um den chemischen Gegensprecher und Petřina will (S. 47) „untersuchen, inwiefern Gintl's Behauptung der Coexistenz begründet sei, und ob sich nicht seine (d. h. Gintl's chemische) Gegencorrespondenz auch anders erklären lasse“ und nur in Bezug auf den chemischen Gegensprecher sagt er S. 60: „die hier von Herrn Director Gintl angegebene Gegencorrespondenz“ und S. 66 „seines Doppeltasters“ und „seine Gegencorrespondenz“. Im Einklange mit Gintl's Ausdruck „zu Stande bringen“ steht die Wendung Petřina's auf S. 60: „Was die eigentliche, von Herrn Director Gintl in die Praxis eingeführte Gegencorrespondenz betrifft.“

Dagegen berichtet Dr. Weitenweber in seiner auf Petřina am 10. December 1855 in der Böhmischen Gesellschaft gehaltenen Denkrede,[3]) dass Petřina in der Sitzung vom 6. November 1854 „eine Erklärung mitgetheilt habe, wie man nach seiner Ansicht im Stande

---

1) Wie er in den Wiener Sitzungsberichten Bd. 14, S. 415 ausspricht.

2) Es sind die in den Wiener Sitzungsberichten Bd. 14, S. 400 flgg. gegebenen gemeint.

3) Dieselbe ist auch in dem 9. Bande der Abhandlungen der Gesellschaft enthalten; die betreffende Stelle auf S. 17 ist grösstentheils wörtlich den Sitzungsberichten (S. 29) der *Sectionen* der Gesellschaft entnommen.

wäre, mit dem Morse'schen Telegraphenapparate bei einem Leitungsdrahte zugleich hin und her zu telegraphiren. Den bei einer solchen doppelten Correspondenz zu machenden Bedingungen werde im gewünschten Maasse entsprochen, wenn man einen kleinen Localstrom zu Hilfe nimmt und das Relais, sowie den Taster nach der Angabe des Vortragenden einrichtet".

III. Dazu wird mir versichert, dass einige Jahre später Petřina's Wittwe an die österreichische Telegraphenverwaltung ein Unterstützungsgesuch gerichtet habe, worin sie ausdrücklich (die Anwendung gemeinschaftlicher Batterien und) das Gegensprechen als Erfindungen ihres verstorbenen Gatten und somit gewissermassen als ihr Erbtheil bezeichnet.

IV. Ich habe mich ferner an eine vollkommen glaubwürdige und geeignete Persönlichkeit in Wien um weitere Auskunft gewandt und als Ergebnisse von Nachfragen, welche dieselbe vor einiger Zeit — und zwar nach Stark's Tode — bei Beamten hielt, welche Dr. Stark damals zur Hilfeleistung benutzte, erfahren, dass Stark zur Zeit, als er sich mit den ersten Versuchen über das Gegensprechen befasste, mit Petřina darüber in Briefwechsel stand, auch während der Versuche selbst in den Briefen Petřina's nachlas, ferner dass Gintl erst durch Stark Kenntniss von der Sache erhielt, darauf in Prag mit Petřina persönlich verkehrte und nun erst nach seiner Rückkehr nach Wien anfing, sich selbst mit dem Gegensprechen zu beschäftigen, zu einer Zeit, wo Stark das Relais mit Doppelwindungen bereits in Verwendung hatte.

V. Diese Angaben werden um so glaubhafter und der Umstand, dass Gintl trotzdem als Erfinder des Gegensprechens mit Morse-Apparaten erscheinen konnte, erklärlich, wenn man das sachliche Verständniss der beiden Männer und ihre persönliche Thätigkeit und Stellung berücksichtigt. Petřina, geboren am 24. December 1799, in ärmlichen Verhältnissen aufgewachsen, erst im Alter von 17 Jahren sich den Gymnasialstudien zuwendend, hatte diese und die Universitätsstudien unter Kümmernissen und Entbehrungen mit ungemeinem Fleiss und Eifer vollendet, wurde 1837 als Lehrer der Physik ans Lyceum zu Linz berufen und war seit dieser Zeit unter Anderem auch auf dem Gebiete der Elektricität und des Magnetismus vielfach literarisch thätig; 1844 wurde er Professor der Physik an der Universität zu Prag und bereits 18[illegible] liess er ein Schriftchen über Telegraphie erscheinen unter dem Titel „Elektromagnetischer Telegraph auf den österreichischen Eisenbahnen". 1852 fand er die Zweigströme bei seiner elektro-magnetischen Harmonika[1]) verwendbar, und im Januar 1853 brachte er einen Aufsatz

---

1) Vergl. Denkrede S. 14. — Der Schlusssatz des betreffenden Vortrags lässt vermuthen, dass man diese Harmonika als den Stammvater des Telephons, des *Phonotelegraphen* und elektro-harmonischen Telegraphen anzusehen hat.

über die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien in der Wiener Akademie[1]) zum Vortrag, welcher zu einer sehr beträchtlichen Verminderung der Zahl der Elemente in den Linienbatterien der österreichischen Telegraphenstationen Wien, Verona, Salzburg, Triest und Oderberg führte. Auch über die chemische Telegraphie verbreitete sich Petřina in der Sitzung der böhmischen Gesellschaft vom 30. Mai 1853 und wies durch den Versuch nach, dass man bei ihr mit einem einzigen Grove'schen Elemente auf 100 Meilen weit telegraphiren könne. Im Juli 1853 endlich wies Petřina in einer Mittheilung an die Wiener Akademie[2]) nach, dass bei der Translation an Batteriekraft Nichts erspart werde.

Ganz abgesehen davon, dass sich die Erscheinungen an Gintl's chemischem Gegensprecher ganz ungezwungen nach den Ohm'schen Gesetzen erklären lassen, was eben Petřina 1855 in der schon erwähnten vierten „Mitheilung aus dem Gebiete der Physik" und 1856 Werner Siemen's in Poggendorff's Annalen (Bd. 98, S. 121) thaten, und dass deshalb diese Erscheinungen und die sämmtlichen von Gintl im 14. Bande der Wiener Sitzungsberichte angeführten Versuche die Coexistenz entgegengesetzt gerichteter Ströme in demselben Leiter zu beweisen nicht genügen, sind bei der von Gintl gewählten Einschaltung der Batterien mit ungleichnamigen Polen an die Linie in dieser gar nicht einmal entgegengesetzte Ströme vorhanden. Darauf weist Petřina auf S. 65 jener vierten Mittheilung hin; auf S. 48 aber hebt er hervor, dass Gintl das Auftreten von Zweigströmen bei der fraglichen Gegensprechschaltung ganz übersehen zu haben oder (ungerechtfertigter Weise) ausser Beachtung lassen zu wollen scheine.[3]) Dagegen hat Petřina auf S. 66 und 65 jener mehrfach erwähnten vierten Mittheilung klar auf die Folgen der Linienunterbrechungen in dem von Gintl benutzten Doppeltaster hingewiesen und hervorgehoben, dass beim Gegensprechen (mit dem chemischen Telegraphen) die Linienbatterien ebensogut mit gleichnamigen Polen an die Erde gelegt werden könnten, während Gintl[4]) damals die Anlegung entgegengesetzter Batteriepole an die Erde für

1) Vgl. Sitzungsberichte Bd. 10, S. 3, oder Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 14, S. 200. — Dass man anderwärts schon etwas früher empirisch auf die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien gekommen sei, habe ich auf S. 505 des ersten Bandes meines Handbuchs weiter ausgeführt.

2) Sitzungsberichte Bd. 11, S. 375.

3) Gleiche Schwächen in Bezug auf die Elektricitätslehre sollen sich überdiess bei Gintl — so wird mir versichert — im persönlichen Umgange hin und wieder bemerkbar gemacht haben. U. A. wird erzählt, Gintl habe bei seiner ersten Rückkehr von Prag ohne Weiteres auf der Linie Wien-Prag mit den gewöhnlichen Morse-Apparaten, in gewöhnlicher Einschaltung, gleichzeitig hin und her telegraphiren wollen und sich gewundert, dass dies nicht ging.

4) Wiener Sitz[illegible] — Vgl. auch Poggendorff's Annalen Bd. 98, S.

nöthig gehalten zu haben scheint; später hat er[1]) auch die Anlegung gleichnamiger Pole an Erde für zulässig erklärt, und so skizzirt Galle auch schon die Einschaltung im Polytechnischen Centralblatte (Jahrg. 1853).

Gesetzt nun, Petřina, dem eine ungewöhnliche Bescheidenheit und Sanftmuth nachgerühmt wird,[2]) habe das Gegensprechen mit Morse-Apparaten erfunden und sich, um es in ähnlicher Weise, wie die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien für das österreichische Telegraphenwesen nutzbar zu machen, mit Stark in Verbindung gesetzt, wäre es nicht leicht erklärlich, dass er, nachdem einmal der einflussreiche, mitunter etwas barsch auftretende Telegraphendirector damit bekannt geworden war und die Versuche damit in die Hand genommen hatte, diesem thunlichst freies Spiel liess und als der Veranstalter der Versuche auf der Linie nach aussen hin zugleich als der eigentliche Erfinder angesehen und bezeichnet wurde, durch seinen Vortrag vom 6. November 1854 seine Prioritätsrechte für ausreichend gewahrt erachtete? Ist es doch unter diesen Verhältnissen kaum denkbar, dass Petřina durch diesen Vortrag einen Eingriff in Gintl's Rechte versucht hätte. Zu der Annahme aber, dass Petřina und Gintl dieselbe Aufgabe nach demselben Grundgedanken (Ausgleichung mittels eines Localstromes) unter Benutzung von verschieden eingerichteten Relais und Tastern gelöst habe, finde ich nirgends einen Anhalt.

Weil nun Gintl — der doch den chemischen Schreibtelegraph und Gegensprecher ausführlich zu beschreiben nicht versäumt hat — das Gegensprechen mit Morse-Apparaten selbst nicht beschrieben und vor seiner, ebenfalls nicht durchschlagenden, Entgegnung gegen Frischen auch Nirgends unzweifelhaft als seine Erfindung bezeichnet hat;

weil Gintl nicht nur die „unbefugte“ Veröffentlichung in keiner Weise getadelt hat, sondern auch der von Siemens ausgegangenen öffentlichen Aufforderung gegenüber nicht mit einem Worte für sein gefährdetes Recht eingetreten ist;[3])

weil Petřina in seinem Vortrage vom 6. November 1854 die zum Gegensprechen benutzbaren Relais und Taster als seine Erfindung bezeichnet hat, worauf seine Wittwe die Ansprüche in ihrem Unterstützungsgesuche gegründet haben kann;

weil ausserdem Petrina sagt, Gintl habe die Gegencorrespondenz in die Praxis eingeführt, und weil dazu eine Aeusserung Gintl's stimmt;

---

1) Vgl. Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins, Bd. 7, S. 260; Bd. 8, S. 251.

2) Denkrede, S. 4 und 18.

3) Dass Stark nicht auf diese Aufforderung hin für Petřina eingetreten *ist, wird Niemand* wundern, der diesen friedliebenden Mann persönlich gekannt.

weil endlich Petřina's Antheil an der Erfindung durch die Aussagen noch lebender Zeugen verbürgt wird, und weil es innerlich wahrscheinlicher ist, dass Petřina die Erfindung gemacht hat, und dass dieselbe auf Gintl übertragen[1]) wurde, weil unter seinem Schilde die Versuche auf der Linie angestellt wurden,

deshalb glaubte ich mich zu dem Ausspruche[2]) berechtigt:

„Sehr wahrscheinlich verdankt man Petřina auch die Erfindung des Gegensprechens mit Morse-Apparaten."

Wenn damit die Meinung ausgesprochen ist, dass von Petřina mehr als die blose geistige Anregung zur Lösung der betreffenden Aufgabe mit Morse-Apparaten ausgegangen ist, so soll damit doch keineswegs das Verdienst geschmälert werden, welches sich Gintl durch verständnissvolle Förderung der Versuche auf der Linie erworben hat. Ebenso bleibt ihm die Erfindung des Gegensprechens mit dem chemischen Schreibapparat. Sollte ich aber in meinem Forschen nach Wahrheit den rechten Weg verfehlt haben, so wird Herr Dr. Gintl gewiss die Freundlichkeit haben, mich auf den rechten Pfad zurückzuleiten.[3])

---

1) Es konnte dies offenbar leichter und natürlicher geschehen, als z. B. in dem Falle Steinheil-Matzenauer, bezüglich der Translation, welcher in der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins, Bd. 3, S. 26 und 63; Bd. 12, S. 139 zur Sprache gebracht wird.

2) Handbuch, Bd. 1, S. 546.

3) Um dies Herrn Dr. Gintl zu erleichtern, habe ich demselben einen Abzug der diesen Artikel enthaltenden, im September 1877 erschienenen Nummer des *Journal télégraphique* nach Prag übersandt, bis jetzt aber keinerlei Erwiderung darauf empfangen.

Recensionen.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Baldassare Boncompagni. Tomo IX. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1876.

Zu den nicht durch Originalabhandlungen erfüllten Partien dieses Jahrganges möge nur bemerkt werden, dass die Publicationsregister durch stetes Hereinziehen neuer Zeitschriften ihrem hohen Ziele absoluter Vollständigkeit immer näher gebracht werden. Der Bibliograph wird besonders ihretwegen sich freuen, dass soviel Genauigkeit und Kenntniss in der Person eines Herausgebers sich vereinigen, dem auch alle äusserlichen Hilfsmittel in so hervorragendem Grade zur Verfügung stehen. Die einzelnen Artikel sind folgende:

1. *Federigo Napoli, Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Maurolico,* S. 1—22.

Maurolycus (geb. am 16. September 1494, gest. am 21. Juli 1575) wird vom Verfasser im Eingang seiner Skizze als ein Mann bezeichnet, der die damals eben entstehende Algebra keineswegs vernachlässigte, dabei aber doch sein Hauptaugenmerk auf die Durchdringung und Weiterbildung der griechischen Mathematik richtete. Aus diesem Grunde war es ihm mehr wie anderen Zeitgenossen um gute Textausgaben der alten Klassiker zu thun, und in einem seiner „Kosmographie" einverleibten, im Jahre 1862 aber durch Professor Spezi neu herausgegebenen Briefe an Cardinal Bembo setzt er ausführlich Plan und Umfang dieser seiner kritischen Arbeiten auseinander. Ist nun auch diese philologisch-mathematische Thätigkeit die wichtigere, so hat es der gelehrte Sicilianer doch auch andererseits nicht an Originalschriften fehlen lassen. Napoli nennt eine Arithmetik,* eine Abhandlung von den Polygonalzahlen, Lehrbücher der Perspective, Optik, Musik, Geometrie, Algebra, Sphärik, Astronomie, Sonnenuhrkunde, eine Anweisung zum Gebrauche des Astrolabs, eine

---

* Von dieser Arithmetik war schon in unserer Recension des 8. Bullettino-Bandes die Rede; vergl. hist.-lit. Abth. Jahrg. XXI, S. 26.

Sinustafel und diverse andere Monographien über mathematische, wie andere Themata. Von diesen Werken galt ein guter Theil für verloren; den Bemühungen unseres Verfassers aber ist es gelungen, auf der Pariser Nationalbibliothek ein ansehnliches Convolut von Handschriften des Maurolycus aufzufinden. — Als Astronom schrieb Jener, abgesehen von der bereits erwähnten Kosmographie, auch über die Bewegung der Sterne; nicht minder gab er bereits die Idee zur Messung eines Meridianbogens, wie sie später von Picard mit so grossem Erfolge praktisch durchgeführt wurde. Den berühmten Stern in der Cassiopeja scheint er zu allererst, noch mehrere Tage vor Tycho Brahe, wahrgenommen zu haben. Ausserdem existirt von ihm ein Handbuch der astronomischen Beobachtungskunst, in welchem er als die damals gebräuchlichen Instrumente das geometrische Quadrat (eine Erfindung Peurbach's), das Astrolab (Planisphär), die Armillarsphäre und den Himmelsglobus beschreibt. Die Gnomonik zeichnet sich durch eingehende Untersuchungen über die Kegelschnitte aus. Diese letzteren scheinen den Maurolycus überhaupt sehr angezogen zu haben, und so wagte er sogar den Versuch, das vierte Buch der *Κωνικά* von Apollonius zu restituiren. Auch mit der Statistik beschäftigte er sich, und wir ersehen aus seinem posthumen Werke „*De Aequiponderantibus, sive de Momentis aequalibus*“, dass er schon 1548 den Schwerpunkt eines Drehungsparaboloides zu bestimmen im Stande war. Für die Geschichte der Physik interessant sind Maurolycus' Erklärung des Regenbogens, seine Forschungen über Brillen und Linsen, seine Andeutungen über Photometrie und strahlende Wärme. Nicht erwähnt, aber erwähnenswerth ist der Umstand, dass auf ihn die erste correcte Deutung des bekannten, von Aristoteles gröblich missverstandenen Phänomens zurückgeführt werden muss, welchem zufolge die Projection eines durch eine polygonale Oeffnung gehenden Sonnenstrahlenbündels ein einfacher Kreis ist. — Dass ein Mann von so polyhistorischer Bildung daneben noch Zeit hatte, über naturhistorische, logische, dialectische Fragen zu arbeiten, als Kartenzeichner thätig zu sein und die Eruptionen seines Heimathvulkans wissenschaftlich zu verfolgen, wird uns hiernach nicht Wunder nehmen können; hervorzuheben aber ist noch, als für das Zeitalter bezeichnend, die Anekdote, dass sich die Admirale an ihn wandten, um von ihm, als einem berühmten Meteorologen, Aufschluss über die zu erwartende Witterung zu erholen.

Herr Napoli verdient für seine eingehende Biographie den Dank aller Historiker, die sich für eine der hervorragendsten, wenn auch durchaus nicht genialsten Persönlichkeiten des Jahrhunderts der Renaissance interessiren.

2. *Scritti i* ... *-rolico,* S. 23—121. Wörtlicher Abdruck der ... -ten Manuscripte.

auftretenden Mathematiker des Namens Heron nämlich theilt er nicht völlig die Ansicht Cantor's, dass dieselben in eine einzige Persönlichkeit zusammenzuziehen seien, und theilt deshalb aus der in des Herrn Herausgebers Besitz befindlichen Originalhandschrift Bernardino Baldi's den Abschnitt „*Herone Mecanico*" mit, in welchem eine Doppeltheilung des Alexandriners Heron stipulirt wird. Die zweite Zugabe Favaro's behandelt die Vorgeschichte des Verfahrens, dessen sich der Agrimensor Niphus bediente, um rechtwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen zu erhalten.

5. M. Cantor, Recension zu: Kuckuck, Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrhundert, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 183—187.

Aus dieser Zeitschrift übersetzt und also deren Lesern bereits bekannt.

6. *B. Boncompagni, Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger,* S. 188—210.

Unter die wichtigsten Schriftdenkmäler der mathematischen und speciell algebraischen Entwickelungsgeschichte gehört zweifellos Johann Widmann's „Behend und hübsch Rechenung auf allen kauffmannschaften". Von diesem Buche kennt man ausser der Leipziger Originalausgabe (1489) drei Nachdrucke, einen Pforzheimer von 1508, einen Hagenauer von 1519 und einen Augsburger von 1526. Fürst Boncompagni untersucht mit jener Accuratesse und Bücherkenntniss, wie sie ihm allein eignet, die Verhältnisse dieser vier Auflagen unter sich, indem er dabei den gegenwärtigen Aufenthaltsort jedes Exemplares angiebt. Zum Schluss wird nach Conrad Wimpina Einiges über die Lebensverhältnisse Widmann's mitgetheilt, der in Leipzig studirte und dort mit einem sonst nicht bekannten bayrischen Mathematiker, Magister Altmann von Schmidtmühlen — am Einflusse der Vils in die Naab —, in naher Verbindung gelebt zu haben scheint.

7. *F. Brioschi (Lettera a D. B. Boncompagni), Intorno al problema delle tautocrone,* S. 211—216.

Ohrtmann hatte in seiner bekannten Monographie „Das Problem der Tautochronen" die in den Jahren 1852 und 1853 erschienenen beiden Abhandlungen Brioschi's über diesen Gegenstand, als in einer für ihn unzugänglichen Zeitschrift publicirt, von seiner Berichterstattung ausgeschlossen. Herr Brioschi bestätigt, dass sein damals erzieltes Resultat die Entwickelung Lagrange's, an die auch Fontaine und D'Alembert anknüpften, in sich schliesse, nimmt sich jedoch vor, die noch allgemeinere Auffassung, zu welcher er seitdem gelangt, in diesem Briefe darzulegen. Die selbstverständlich höchst elegant geführte Entwickelung enthält als Corollar die vollständige Lösung des Lagrange'schen Originalproblems, die den Tautochronismus bedingende Kraft als Function *von Weg und* Geschwindigkeit auszudrücken, erledigt aber zugleich eine

allgemeinere Aufgabe, in welcher diejenige von der synchronen Curve als specieller Fall begriffen ist.

8. *Sigismond Günther, Note sur Jean-André de Segner fondateur de la météorologie mathématique,* S. 217—228.

Eine kurze Notiz des Referenten über den vielverdienten und wenig gewürdigten deutschen Gelehrten, welcher zuerst (im Jahre 1733) den Versuch machte, die atmosphärischen Veränderungen rechnerisch durch die Anziehungskraft der Himmelskörper zu erklären. Es wird zu zeigen versucht, worin er das Richtige traf und worin er irrte, Letzteres besonders durch Vergleichung mit den für diese Frage massgebend gewordenen Untersuchungen von Laplace und A. Bouvard.

9. *Ermanno Hankel, Prospetto storico dello sviluppo della geometria moderna, scritto postumo,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 267—289.

10. *Guglielmo von Zahn, Commemorazione di Ermanno Hankel,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 290—296.

Diese beiden Uebersetzungen des um die Verbreitung deutscher Wissenschaft in Italien wohlverdienten Dr. Sparagna beziehen sich auf Publikationen, die bei uns Jedermann kennt. Erstere nämlich ist das treffliche historische Eingangscapitel zu seinen von Harnack edirten Vorlesungen über projectivische Geometrie (vgl. Milinowski's Recension in dieser Zeitschrift 21. Jahrg., S. 103 flgg.), der Artikel über Hankel's mathematische Arbeiten aber ist in den „Mathem. Annalen" (7. Band, S. 583 ff.) erstmalig erschienen.

11. *Catalogo dei lavori del Dr. Ermanno Hankel,* S. 301—308.

Dieses mit bekannter Genauigkeit und in der nicht minder bekannten Weise des „Bullettino" angefertigte Verzeichniss zählt 9 selbstständige Schriften (darunter zwei posthume), 16 Artikel in Zeit- und Sammelschriften (Ersch-Gruber's Encyklopädie) und 4 Recensionen auf.

12. Paul Mansion, Uebersetzung aus dem Deutschen von *F. Klein, Notice sur la vie et les travaux de Louis-Othon Hesse,* S. 309—314.

Die Uebersetzung ist lobenswerth.

13. *M. Curtze, Copernico in Italia,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 315—319.

In diesem kleinen, aber reichhaltigen Artikel, der zuerst in einer Provinzialzeitung erschien und deshalb nur Wenigen bekannt sein dürfte, berichtet der Verfasser über die neuen für die Copernicus-Forschung äusserst werthvollen Funde, welche dem Bologneser Malagola gelungen sind. Die dem Familienarchiv der Grafen Malvezzi entnommenen Documente enthalten nämlich die Annalen der germanischen Student- Nation während des Zeitraums von 1200 bis 1650, aus d unbestreitbarer Evidenz hervorgeht, dass Copernicus w

ihm viele engere Landsleute, wie sein Bruder Andreas, Lucas Watzelrode, Erasmus Beck, Albert Bischoff u. A., stets bei dieser deutschen Nation (der Name Germanicus wechselt mit Teutonicus ab) Aufnahme und Inscription fanden. Durch diese neuen Beweisstücke wird die Annahme einer polnischen Abstammung für Copernicus um so sicherer entkräftet, als Malagola in seinen Archivalien auch directe Notizen über polnische Studenten und Professoren vorfand. Ferner wird hervorgehoben, dass nunmehr die allerdings schon mehrfach angezweifelte Behauptung Papadopoli's, der Begründer der modernen Astronomie habe zu Padua Medicin studirt, definitiv beseitigt und die Thatsache unzweifelhaft festgestellt sei, derselbe habe einzig in Bologna zum unmittelbaren Studienzweck sich aufgehalten, und zwar um sich in den für seinen künftigen Beruf wichtigsten Fächern, Decretalen und Kirchenrecht, auszubilden. — Andere Aufzeichnungen, in deren Besitz Malagola gelangte, beziehen sich auf bemerkenswerthe Persönlichkeiten der vorcopernicanischen Periode, auf Domenico Maria, Urceus Codrus, Scipio Ferro und Nicolaus von Cusa.

14. *F. Hipler, Copernico in Bologna,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 320—325.

Wie der eifrige Copernicusforscher Curtze in der „Thorner", so hat sein Studiengenosse Hipler in der „Ermländischen Zeitung" über Malagola's neue Errungenschaften berichtet. Natürlich stimmen beide Referate in der Hauptsache überein. Nur verbreitet sich die zweite Notiz mehr über die Lieblingsstudien, welche Copernicus zu machen Gelegenheit geboten war, dabei ist aber die Vermuthung Hipler's, es sei der sonst nicht näher bekannte „*Scipio de Mantua*" mit dem berühmten Algebraisten identisch, entschieden unhaltbar.

15. *G. B. Biadego, Intorno alla vita ed agli scritti di Gianfrancesco Malfatti, matematico del secolo XVIII,* S. 361—381.

Der Verfasser, dessen Essay über Lorgna im 19. Bande dieser Zeitschrift besprochen worden ist, hat durch vorstehend genannte Biographie einen neuen werthvollen Beitrag zur mathematischen Literargeschichte Italiens geliefert. Beide Arbeiten hängen insofern sachlich zusammen, als Malfatti ein intimer Freund Lorgna's war und folglich da, wo von Letzterem gehandelt wurde, selbst vielfach citirt werden musste. Zur Lebensbeschreibung selber standen dem Verfasser vier Quellen zu Gebote: ein Nekrolog von Venturoli von 1811, ein anonymer vom 1807, ein Elogium von Bernardi und ein aus der Zeit der bayrischen Herrschaft über das Trento stammendes Manuscript Antonio Soini's, Gymnasialrectors von Ala. Zudem hat Herr Pizzini den in seinen Händen befindlichen handschriftlichen Nachlass Malfatti's zur Disposition gestellt. Johann Franz Joseph Malfatti

war zu Ala am 26. September 1731 geboren, besuchte das Jesuitencollegium zu Verona und widmete sich später den mathematischen Studien an der Universität Bologna unter Riccati's einsichtsvoller Leitung. Der Marchese Bevilacqua bot ihm die Mittel, sich zu Ferrara in gesicherter Stellung lediglich seiner Wissenschaft hingeben zu können, und diese Stadt verliess er denn auch nicht mehr bis zu seinem Ende, indem er an der von Clemens XIV. daselbst wieder ins Leben gerufenen Hochschule die Professur der höheren Mathematik vertrat und alle Berufungen — so z. B. nach Perugia oder Venedig — bescheiden zurückwies. Sein Tod erfolgte am 9. October 1807; er war damals Mitglied der Akademien von Bologna, Turin und Mantua, sowie der von Lorgna gegründeten italienischen Societät. — Malfatti's Erstlingsarbeit vom Jahre 1758 behandelt die biquadratischen Gleichungen; eine Weiterbildung der dort angedeuteten Ideen enthält die 1771 zu Siena erschienene Abhandlung über die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen, speciell derjenigen vom fünften Grade. Brioschi's Verdienst ist es, auf die Bedeutsamkeit dieser Untersuchungen und ihren Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Functionen hingewiesen zu haben.* Noch kurz vor seinem Tode, 1807, kam er auf diesen Gegenstand zurück, indem er seine Resultate gegen die seitdem von Ruffini aufgestellten Behauptungen von der Unlösbarkeit höherer Gleichungen zu vertheidigen suchte. Die „neue italienische Encyklopädie“ enthält einen interessanten zahlentheoretischen Artikel Malfatti's über das Lottospiel. Angesichts des hohen analytischen Talentes, welches er stets entfaltete, und angesichts der damals allseitig der Analysis eingeräumten superioren Stellung ist doppelt hoch die Liebe und das Geschick anzuschlagen, womit Jener seine rein-synthetischen Untersuchungen ins Werk setzte. Auf diesem Wege stellte er, was D'Alembert eigenthümlicherweise nicht geglückt war, die Identität der sogenannten Cassini-Curve mit der durch Fagnano berühmt gewordenen Lemniskate und mit Bonati's „isochronischer Curve“ fest. Er gab eine neue Lösung des von Pappus vorgelegten Problemes, welches wir mit dem Namen Ottajano's zu belegen gewohnt sind und welches später Poncelet durch projectivische Behandlung und Bellavitis durch seinen Aequipollenzencalcul zum grösstmöglichen Grade von Allgemeinheit erhoben. Weitaus am berühmtesten aber machte ihn seine Behandlung der stereotomischen Aufgabe, in ein dreiseitiges Prisma drei Cylinder von grösstem Kubikinhalt einzubeschreiben, welche Fassung, aus dem Stereometrischen ins Planimetrische übersetzt, eben das eigent-

* Wer, ohne direct auf die Quelle zurückzugehen, Näheres über Malfatti's Idee zu erfahren wünscht, kann den Aufsatz Grunert's „Ueber die Transformationsmethoden von Jerrard und Malfatti im 45. Bande seines Archivs vergleichen.

lich sogenannte berühmte Malfatti'sche Problem enthält. Die originale Erledigung wird *in extenso* mitgetheilt und eine kurze Geschichte der späteren Lösungen und Verallgemeinerungen daran geknüpft.

Herrn Biadego sind wir auch für die drei umfänglichen Anhänge zu seiner Biographie zu Dank verpflichtet, von denen zu berichten unsere nunmehrige Pflicht ist.

16. *Catalogo dei lavori di Gianfrancesco Malfatti*, S. 382—387.

Enthält 3 Separatdrucke, 19 Abhandlungen, die im 6. Bande des „Bullettino" veröffentlichte Correspondenz mit Lorgna und an ungedruckten Schriftstücken einen „Tractat von den Kegelschnitten und Oertern" und eine Briefsammlung, welche demnächst zur Sprache kommen wird.

17. *Catalogo di lavori relativi al problema di Malfatti*, S. 388—392.

Eine werthvolle Ergänzung der bekannten Schrift von A. Wittstein, werthvoll besonders deshalb, weil die Zusammenstellung bis auf die allerneueste Zeit fortgesetzt ist. Trotz seines höchst anerkennenswerthen Fleisses ist jedoch dem Verfasser eine sehr zu beachtende Pièce entgegangen, nämlich der im 55. Bande des „Archiv d. Math. u. Phys." abgedruckte, durch antike Strenge ausgezeichnete Aufsatz Mendthal's: „Geometrischer Beweis der Steiner'schen Construction zur Lösung des Malfatti'schen Problems".

18. *Lettere inedite di Gianfrancesco Malfatti*, S. 393—480.

Von den hier mitgetheilten Privatbriefen richten sich 67 an Lorgna, 9 an Tiraboschi, 2 an Galvagni, je einer an Malvezzi und Cagnoli. Gewähren letztere mehr nur ein literarhistorisches Interesse, so ist die scientifische Bedeutung des Briefwechsels mit Lorgna um so höher zu stellen. Wir heben einige der wichtigsten Stücke aus. Im fünften Briefe widerlegt Malfatti eine der bekannten gewagten Behauptungen Lorgna's, welcher alle Zahlenreihen als durch die Riccati'sche Methode unsummirbar erklärt hatte, deren allgemeines Glied die Form $\frac{1}{pq}$ habe, ohne dass p und q Glieder der nämlichen arithmetischen Progression wären. Dass dies falsch, thut er einfach durch den Hinweis auf folgende Identität dar:

$$\frac{1}{3.8}+\frac{1}{6.12}+\frac{1}{9.16}+\ldots=\frac{\frac{1}{12}}{1.2}+\frac{\frac{1}{12}}{2.3}+\frac{\frac{1}{12}}{3.4}+\ldots$$

Nr. 11 und 12, welche sich mit Lorgna's geistvoller und doch unrealisirbarer Idee beschäftigen, die Lösung des irreduciblen Falles auf die Integration gewisser Differentialgleichungen zu begründen, sind von Herrn Biadego bereits früher edirt worden; theilweise gilt dies auch von 13 und 14. Aus Brief 16 erfahren wir, dass Giordano Riccati

wichtige Experimente in der Elasticitätslehre angestellt hat und dahin gelangt ist, das Gesetz der mit der Ablenkung wachsenden Elasticität einer gespannten Saite durch eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten darzustellen. Als auffällig ist die aus dem 18. und 19. Briefe hervorgehende Thatsache zu vermerken, dass selbst Leute, wie der eine der Grafen Riccati, die Bedeutung der mathematischen Symbole sich so wenig zu eigen gemacht haben, um $0.\sqrt{-1}$ für eine von Null abweichende imaginäre Grösse zu erklären! Nicht minder wird für die Geschichte der höheren Analysis Formulirung und Behandlung der das dreizehnte Schreiben erfüllenden Aufgabe Interesse bieten, aus der Gleichung

$$y=\sqrt{2rx-x^2}+r\, arc\, sin\, vers\, x$$

heraus r in die Form $f_{(x,y)}$ zu bringen. Brief 33 beschäftigt sich mit der Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für drei Ereignisse, für deren Eintritt gewisse günstige Fälle gesetzt sind, „*l'evento medio probabile*" auszumitteln; Brief 36 lehrt die Construction einer transscendenten Curve, deren Gleichung in den uns geläufigen Polarcoordinaten diese wäre: $r=\frac{a\sin a\varphi}{a\varphi}$. Auf ein anderes Gebiet führt Brief 39, in welchem gegen die von Lambert seiner „Photometrie" zu Grunde gelegten Hypothesen polemisirt wird. Ein ganz neues Licht auf die Schwierigkeiten und inneren Widersprüche der damals üblichen Reihenlehre wirft der vierzigste Brief. Euler hatte gefunden, dass der convergirenden Reihe $\frac{1}{4}-\frac{1}{3-4}+\frac{1}{3+4}-\frac{1}{2.3-4}+-\ldots$ der Werth $\frac{\pi}{3\,tg\,\frac{4\pi}{3}}$ entspreche; Malfatti giebt der Reihe durch Zusammenfassung je zweier Glieder die Form

$$-5\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{10.5}+\frac{1}{13.8}+\ldots\right)$$

und findet jetzt den Werth ∞. Er bittet Lorgna, ihm Aufklärung über das gefundene Paradoxon zu verschaffen. Dazu hätte aber jedenfalls eine schärfere Auffassung der Begriffe von Convergenz und Divergenz gehört, als sie Lorgna selbst zu Gebote stand; darüber klärt uns völlig Brief 46 auf, in welchem Malfatti dem Freunde dessen ungenirte Rechnung mit unendlichen Grössen urgirt. Brief 52 enthält die schon berührte, höchst elegante Auflösung des Ottajano-Problems, von dem Pappus lediglich einen Specialfall in Betracht gezogen hatte (vgl. Chasles-Sohncke, Geschichte der Geometrie, S. 341). Schliesslich ist noch die in Nr. 67 angeführte Reihe bemerkenswerth, durch welche ganz allgemein jede trinomische Gleichung beliebigen Grades gelöst werden soll.

Die Briefe dienen im Wesentlichen [illegible]
druckes über die Persönlichkeit Ma[illegible]

Lectüre der Biographie mit fortgenommen hat. Es liegt vor uns ein stilles, bescheidenes und harmonisches Gelehrtenleben, im engen Kreise einer italienischen Provinzialstadt sich abspielend und doch in stetem Contact mit dem Fluge der gerade damals so plötzlich und hoch sich aufschwingenden Wissenschaft.

19. *Goffredo Friedlein. Necrologia del Dr. Maurizio Cantor,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 531—535.

Uebertragen aus dieser Zeitschrift 20. Jahrg., Hist.-lit. Abtheil. S. 109 flgg. Beigegeben ist eine Ueberschau sämmtlicher erschienener Nekrologe.

20. *Catalogo dei lavori del Dr. Goffredo Friedlein,* S. 536—553.

10 selbstständige Veröffentlichungen, 53 Zeitschrift-Artikel und Kritiken.

21. *J. J. Abria et J. Hoüel, Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue, Correspondant de l'Institut, Professeur honoraire à la faculté des sciences de Bordeaux,* S. 554—555.

Der wackere Veteran der Zahlentheorie ist am 10. Juni 1875 zu Pau in einem Alter von $83\frac{1}{2}$ Jahren heimgegangen, und zwei seiner Collegen widmen ihm diesen durch die nachher zu nennende Selbstbiographie ergänzten Nachruf. Ursprünglich Soldat, nahm Le Besgue eine Hauslehrerstelle in England und Russland an und lebte dann seit 1830 als Lehrer in verschiedenen Städten Frankreichs, in Nantes, Epinal, Neufschateau. Im Jahre 1838 erhielt er die Professur in Bordeaux, die er bis an sein Ende bekleidete, obschon er dazwischen wieder vielfach seinen eigentlichen Aufenthaltsort wechselte. Seine enorme wissenschaftliche Regsamkeit bethätigte sich fast exclusiv im Gebiete der höheren Zahlentheorie und ebenso ausschliesslich in kurzen Abhandlungen; von grösseren Publikationen sind nur zu erwähnen „*Exercices d'analyse numérique*“ und „*Introduction à la théorie des nombres*“ — letzteres freilich nur ein Torso.

22. *Catalogue des travaux de V. A. Le Besgue,* S. 556—573.

Ausser jenen zwei Büchern und zwei handschriftlich nachgelassenen Arbeiten noch 121 Nummern.

23. *Notice sur les principaux travaux de V. A. Le Besgue, rédigée par lui-même,* S. 574—582.

Der Verfasser beabsichtigte im Jahre 1860, um den Posten eines wirklichen Akademiemitgliedes nachzusuchen, leistete aber mit der ihm eigenen Schüchternheit später auf seinen Plan Verzicht. Die gedrängte Skizze, welche er bei diesem Anlass von seinen scientifischen Leistungen *entwarf*, haben wir hier vor uns. — Die aphoristischen Andeutungen *über die allerwichtigsten* Fragen, so z. B. über die Congruenz n^{ten} Grades,

über die Auflösung von Gleichungen mittelst Kettenbrüchen etc. etc., sind allerdings nur für Den brauchbar, der Le Besgue's Untersuchungen speciell studiren will, dann aber auch von um so höherem Werthe, weil die Notizen, wie Herr Hoüel bemerkt, die nicht selten sich findenden Unvollkommenheiten der Darstellung beseitigen können.

24. *V. A. Le Besgue, Notes sur les opuscules de Léonard de Pise*, S. 583 bis 594.

Der Herr Herausgeber des „Bullettino" hat sich das Verdienst erworben, durch diesen Abdruck ein interessantes *opus posthumum* Le Besgue's zugänglich zu machen. Zu diversen Problemen Leonardo Fibonacci's aus der bestimmten und noch mehr aus der unbestimmten Analysis giebt Jener die Lösungen und Determinationen in dem Sinne, wie er durch die moderne Wissenschaft gefordert wird.

25. *Prophatii Judaei Montepessulani Massiliensis (a. 1300) prooemium in almanach adhuc ineditum e versionibus duabus antiquis (altera quoque interpolata) una cum textu hebraico e manuscriptis primum edidit, suamque versionem latinam verbalem adjecit Mauritius Steinschneider*, S. 595 bis 614.

Prophatius (eigentlich Jakob ben Machir) von Montpellier zählte als Polyhistor und speciell auch als gründlicher Kenner der Mathematik zu den berühmtesten jüdischen Gelehrten seiner Zeit (gest. 1307 oder 1309). Abgesehen von vielen Uebersetzungen aus dem Arabischen, die vorwiegend astronomische Bücher betreffen, stammt aus seiner eigenen Feder die ausführliche, 16 Capitel erfüllende Beschreibung des „jüdischen Quadranten", eines von ihm erfundenen Instrumentes, sowie ein ewiger Almanach, d. h. eine astronomische Tabellensammlung in hebräischer Sprache. Hiervon existiren sieben Codices. Von dem „*prooemium*" dieses Tafelwerkes nun hat man eine weit grössere Anzahl lateinischer Handschriften, von denen nur eine die wortgetreue Uebersetzung bietet, während neun eine mehr oder weniger zusatzreiche Paraphrase enthalten und fünfzehn weitere als „*codices incerti*" aufgeführt werden mussten. Mitgetheilt wird dann die eigene Textwiedergabe Steinschneider's, eine alte Uebersetzung, die Paraphrase und das Original. Sachlich ist aus dieser Einleitung die Bemerkung des Prophatius von Bedeutung, dass die Tafeln des Talmi (Ptolemaeus) gar Nichts mehr leisten könnten, wohl aber diejenigen des weit späteren Zarkali, an die er seine eigenen anschliesse.

Wir dürfen also, da Arzachel ein eifriger Anhänger der sogenannten Trepidationstheorie war, ein Gleiches auch wohl von Prophatius erwarten.

26. *C. E. Sédillot, Lettre à D. B. Boncompagni sur la vie et les travaux de M. Louis Amélie Sédillot*, S. 649—655.

Der zweite Vertreter der um die Geschichte unserer Wissenschaft so hoch verdienten Familie Sédillot ist am 2. December 1875 von hinnen geschieden und sein Bruder widmet ihm einen warmen Nachruf. Als Sohn jenes J. J. Sédillot, bei dessen Tod Alexander v. Humboldt die wahren Worte sprach: „er werde von der Mathematik und von den orientalischen Sprachen gleichmässig betrauert", am 23. Juni 1808 zu Paris geboren, lehrte er seit einer langen Reihe von Jahren die Geschichte an verschiedenen Collegien seiner Vaterstadt und wandte sich mit Eifer und Erfolg der von seinem Vater cultivirten Specialdisciplin zu. Seine vorzüglichsten Schriften werden aufgezählt; ausserdem wird einiger anderer wichtiger Arbeiten Erwähnung gethan, so der Untersuchung der platonischen Spirale, seiner Uebersetzung der „*Connus géométriques*" von Hassan ben Haithem u. A. Natürlich ist auch der unerquickliche Streit über eine Stelle des Abul-Wâfa nicht vergessen worden, den Libri provocirte. Der kurze Aufsatz schliesst mit der tief empfundenen Grabrede, welche der zeitige Director des „*Collège de France*", Laboulaye, einem seiner tüchtigsten Professoren gehalten hat.*

27. *B. Boncompagni, Catalogo dei lavori di Luigi Amelio Sédillot*, S. 656 bis 700.

Dieser Catalog hat den Vorzug, nebenbei auch noch alle bei Lebzeiten des Verstorbenen publicirten biographischen Artikel über denselben genau anzugeben. Es sind deren neun. Selbst veröffentlicht hat Sédillot 17 Schriften von zum Theile äusserst heterogenem Inhalt und 95 kleinere Abhandlungen für Zeitschriften und akademische Repertorien. Ungedruckt fanden sich in seinem Nachlasse zwei Noten über die von ihm mit so viel Eifer ventilirte Geschichte der dritten Mondungleichheit vor, welche ursprünglich für die Pariser Akademie bestimmt gewesen waren.

28. *Maurizio Cantor, Sulla nazionalità del Copernico,* übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 701—716.

Dieser Artikel ist eine von Autor, Uebersetzer und Herausgeber mit Zusätzen versehene Uebersetzung des in der Beilage zur „Allgem. Zeitung" vom 1. August 1876 veröffentlichten Referates über die neuesten Ergebnisse der Copernicus-Forschung. Es werden sorgfältig die Gründe abgewogen, welche von den Einen für die germanische, von den Anderen für die polnische Abstammung des Reformators geltend gemacht worden sind. Letztere laufen gewöhnlich auf die drei Punkte hinaus, dass der Name Copernic deutlich die slavische Wurzel erkennen lasse, dass sein Vater ein Pole von Nation war und dass seine Vaterstadt (Thorn) unter

* Es gereicht uns zur Freude, constatiren zu können, dass auf gewisse extreme Doctrinen des verdienten Mannes über die Stellung der Araber zu anderen *Völkern gar nicht* weiter eingegangen worden ist.

polnischer Oberbotmässigkeit gestanden. Das Erstere lässt sich nun durchaus nicht mit Sicherheit erweisen, denn nicht einmal die Endsilbe „nic“ ist ganz sicher eine slavische und noch viel weniger das Stammwort „copper“ (Kupfer). Der Vater Nicolaus, hatte sich allerdings erst 1462 in Thorn niedergelassen und vorher sein Domicil in Krakau gehabt; allein das Krakau der angehenden Neuzeit war eine fast rein deutsche Stadt, blühend durch deutsche Kunst und Wissenschaft — man denke an den grossen dort gebürtigen Künstler Veit Stoss. Und was die Stellung Thorns als einer polnischen Stadt anlangt, so ist ja bekannt, dass deren Bürger, lediglich um der Herrschaft der preussischen Ordensritter zu entrinnen, sich in ein sehr platonisches Abhängigkeitsverhältniss zur Krone Polen begaben und trotz aller Annexionsversuche ihren deutschen Charakter treu zu bewahren verstanden. Soweit war nur von der Vergangenheit des Copernicus die Rede. Um ihn selber als polnischen Patrioten hinzustellen, mussten fünf weitere Momente herhalten: Er habe in Krakau studirt, seine Observationen stets auf den Krakauer Meridian bezogen, die Münzreform seiner Vaterstadt gefördert, sein Domcapitel im Streite mit dem deutschen Hochmeister unterstüzt und — *last not least* — als Pole in das Matrikelbuch von Padua sich eigenhändig eingezeichnet. Die Hinfälligkeit dieser Scheingründe wird eingehend nachgewiesen. Speciell betreffs des fünften Argumentes wird hervorgehoben, dass der Historiker Papadopoli, auf den man sich immer zu berufen pflegt, nicht den mindesten Glauben verdiene, dass dagegen die neuesten Forschungen Malagola's (s. o. 13) es ausser allen Zweifel gesetzt haben, welcher Nationalität sich Copernicus zugerechnet wissen wollte. Speciell hat Malagola in jenem Register den Namen in der urdeutschen Form „Kopfernick“ geschrieben gefunden. —

„Wer Vieles bringt, wird Jedem Etwas bringen“, so könnte mit allem Rechte die Devise des reichhaltigen Bandes lauten, von dem wir vorstehend eine Schilderung zu geben versuchten.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Mathematische Einleitung in die Dioptrik des menschlichen Auges von Dr. Ludwig Matthiessen, ord. Professor der Physik an der Universität zu Rostock. Leipzig, B. G. Teubner, 1877. 276 S.

Wie der Verfasser in dem Vorworte angiebt, waren es besonders drei Beweggründe, die ihn zur Abfassung und Veröffentlichung dieses Buches führten: 1. Die Kettenbruchfunctionen, durch welche Gauss die Orte der Cardinalpunkte eir[illegible] -temes finden lehrt, in

elementarer Darstellung einem grösseren wissenschaftlichen Publikum zum Verständniss zu bringen und hierdurch die Dioptrik des Auges einer genaueren und eingehenderen Behandlung zuzuführen, als solche namentlich ohne Berücksichtigung der Schichtung in der Krystalllinse möglich ist; 2. die Kenntniss über die Brechungsindices der flüssigen Augenmedien sowohl, wie der Häute und Schichten der Krystalllinse durch neue Messungen zu erweitern; 3. die Gewinnung von Integralen zur Bestimmung der Cardinalpunkte eines Systemes von continuirlich-variablem Brechungsindex und ihre Anwendung auf die geschichtete Krystalllinse.

Dem Inhalte entsprechend, zerfällt der Grundriss in zwei Hauptabschnitte: in die Dioptrik geschichteter Linsensysteme (§§ 1—39, S. 1 bis 132) und in die Dioptrik des menschlichen Auges (§§ 40—69, S. 133 bis 276).

Die Dioptrik eines Linsensystemes ist seit Gauss und unter Zugrundelegung der von ihm eingeführten Näherungen Gegenstand zahlreicher Bearbeitungen geworden, wie auch aus dem vom Verfasser am Schlusse seines Buches gegebenen Literaturverzeichnisse hervorgeht,* und zwar basiren viele derselben theils auf den elementarsten Hilfsmitteln der neueren Geometrie, theils auf elementaren analytisch-geometrischen Methoden. Die letztgenannten, die C. Neumann in seiner bekannten Schrift: „Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems" mit gewohnter Meisterschaft handhabt, hat auch der Verfasser in dem vorliegenden Grundrisse zur Anwendung gebracht, ist aber insofern weiter gegangen als andere Autoren, als er der Entwickelung von Formeln zur Bestimmung der Hauptpunkte und Brennweiten eine viel eingehendere Behandlung angedeihen lässt, als es in elementaren Theorien sonst der Fall zu sein pflegt. Hierin erblicken wir auch den Hauptwerth, welchen der erste Hauptabschnitt gegenüber verschiedenen, der Form nach vielleicht vollkommeneren Darstellungen des Gegenstandes, behaupten darf.

Nach einigen einleitenden Bemerkungen, betreffend die einzuführenden Näherungen, die Gesetze der Brechung und Reflexion, betrachtet der Verfasser zunächst die Brechung an einer Kugelfläche. Diesem ersten Abschnitte, der Grundlage des Folgenden, hätten wir eine übersichtlichere Anordnung und etwas mehr Kürze gewünscht. Unserem Gefühle nach verweilt der Verfasser hier wie auch im folgenden Abschnitte zu lange bei speciellen Fällen und geht in dem Bestreben, immer wieder mit conjugirten Axenpunkten die Darstellungen zu beginnen, etwas zu

* In diesem vermissten wir u. A. das vorzügliche Schriftchen von Prof. Felice Casorati: *Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati. Milano, Giuseppe Bernardoni, 1872.*

weit. So konnten unseres Erachtens durch frühere Betrachtung conjugirter Ebenen und häufigere Benutzung ihrer Eigenschaften hier und späterhin nicht unwesentliche Vereinfachungen erzielt werden. Auch einige Ungenauigkeiten und Unklarheiten im Ausdrucke, wie z. B. dass Punkte der Wellenfläche in demselben Augenblicke „gleiche Schwingungsrichtung oder Phase“ besitzen; die Erklärung der Möglichkeit von Strahlenkegel mit blos geometrischem (nicht physischem) Strahlpunkte (§ 3); die Behauptung auf Seite 4, dass die Gleichung

$$A_1^2+A_2^2=A^2$$

zwischen den Amplituden des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strahles der Ausdruck für das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft sei; der auf S. 23 und 24 nochmals gegebene Beweis von der Convergenz der gebrochenen Strahlen in einem Punkte mittels des Satzes von den Ordinaten conjugirter Strahlen in den Brennpunkten, der ohne Weiteres doch nur für Strahlen in einer Axenebene richtig ist u. dgl. m. hätten sich wohl leicht vermeiden lassen.

Mit § 14 wird übergegangen zu einem Systeme brechender centrirter Kugelflächen,* für ein solches System die 10 Cardinalpunkte von Gauss, Listing und Töpler eingeführt, die auf sie bezüglichen Abscissengleichungen conjugirter Punkte aufgestellt und mit Hilfe der Cardinalpunkte die Construction von conjugirten Strahlen und Punkten auf sieben verschiedene Arten gezeigt. Für die bekannte Beziehung zwischen den beiden Brennweiten giebt der Verfasser mehrere Ableitungen: die Helmholtz'sche, der drei andere etwas modificirte folgen, und die Neumann'sche. Hierauf folgen die Methoden zur Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte. Hervorzuheben wären namentlich die in §§ 23, 25 und 26 aufgestellten Formeln zur Bestimmung der Entfernungen der Brennpunkte von den Grenzflächen des Systemes, für die Brennweiten bezogen auf die Hauptebenen und für die Orte der Hauptpunkte. Die in den Formeln auftretenden Grössen sind sämmtlich darstellbar als Glieder eines und desselben Kettenbruches, wodurch die Berechnung eine sehr übersichtliche und gleichförmige wird. Für das Verhältniss der Ordinaten conjugirter Punkte werden weiter Ausdrücke aufgestellt ohne Zuhilfenahme der Cardinalpunkte, die also direct aus den Daten des Systemes berechnet werden können und auf diese Ausdrücke neue Methoden zur Bestimmung der Cardinalpunkte gegründet. Auf einige merkwürdige Relationen zwischen den Abscissen von Object- und letztem Bildpunkte und den Abscissen der zwischenliegenden Bildpunkte (S. 90 bis 93) soll hier noch hingewiesen werden. Die constructive Bestimmung der Cardinalpunkte nach Reusch, Betrachtungen über die Listing'schen

* Der zweite Absatz dieses Paragraphen ist wohl so allgemein, wie es der Text behauptet, nicht richtig.

asymptotischen Punkte, über die Wirkungen verschiedener Linsenarten und über Aplanatismus und Achromatismus beschliessen den ersten Haupttheil.

Der zweite Haupttheil umfasst mathematische und die Resultate experimenteller Untersuchungen. In letzterer Beziehung trägt der Verfasser ein sehr reiches und werthvolles Material zusammen sowohl aus fremden, wie aus eigenen zahlreichen Bestimmungen der Brechungsexponenten* der Augenmedien, speciell der Schichten der Krystalllinse des menschlichen Auges, wie auch mehrerer Thieraugen. Der Zunahme der Brechungsexponenten der Schichten gegen den innersten Kern der Linse konnte ein einfaches, allen untersuchten Augen gemeinsames Gesetz angepasst werden: diese Zunahme ist der Entfernung der betreffenden Schichte vom innersten Kerne proportional; diese Proportionalität mit der Entfernung findet auch sehr wahrscheinlich statt für die Krümmungsradien der Schichten, wie der Verfasser aus eigenen Messungen am Ochsenauge und aus Messungen am menschlichen Auge von Treviranus schliesst.

Die mathematischen Untersuchungen enthalten Anwendungen der im ersten Theile gegebenen Formeln auf die Bestimmung der Cardinalpunkte des accomodirten und accomodationslosen Menschenauges unter Voraussetzung einer homogenen Krystalllinse, bei welcher Gelegenheit der Verfasser den Vorschlag macht, das sogenannte reducirte Auge etwas anders als von Listing geschehen zu bestimmen, nämlich den Scheitelpunkt der substituirten brechenden Fläche mit dem ersten Hauptpunkte und ihren Krümmungsmittelpunkt mit dem zweiten Knotenpunkt zusammenfallen zu lassen, was in der That den Anforderungen besser entspricht. Ferner wird die Krümmung der Netzhautbilder untersucht und ihre Uebereinstimmung mit der der Netzhaut nachgewiesen (§ 45) und in § 49 werden jene Punkte im Innern des Auges aufgesucht, dessen Bilder die Haupt- oder die Knotenpunkte sind.**

Sehr ausführlich untersucht der Verfasser das Verhalten der geschichteten Krystalllinse. Zunächst wird ein Näherungsverfahren in Anwendung gebracht (S. 185 und 199), indem die Linse aus 7 Schichten bestehend betrachtet wird; später folgen dann Integralformeln zur Berechnung der Brennweiten und der Orte der Fundamentalpunkte.

Diesen Abschnitten, denen doch, wie aus der Vorrede hervorgeht, besondere Wichtigkeit beigelegt wird, hätten wir eine ausführlichere Begründung gewünscht, denn die Annahmen, die dem Verfahren und

* Sie wurden ausgeführt an einem grossen Abbe'schen Refractometer.

** Die auf S. 167 gegen Helmholtz gerichtete Bemerkung beruht wohl auf einem Uebersehen, denn es ist in der That, wie schon die Fig. 59 erkennen lässt, der erste Knotenpunkt das Bild des strittigen Punktes k_1 bezüglich der Hornhaut; *allerdings ist k_1 kein* reeller Vereinigungspunkt.

den Formeln zu Grunde liegen, sind bezüglich ihrer Zulässigkeit keineswegs so unmittelbar evident, werden auch an einigen Stellen kaum hervorgehoben.

So werden in der Rechnung § 54 den drei schaalenförmig sich umschliessenden Schichten und dem inneren Kerne vier sich durchdringende biconvexe (volle homogene) Linsen substituirt und diese vier Linsen nach den für hintereinander geschichtete Systeme giltigen Formeln combinirt. Ein solches Verfahren liesse sich wohl rechtfertigen für eine angenäherte Berechnung der Brennweite, wenn nämlich die Linsendicke vernachlässigt wird, allein zur Bestimmung der Hauptpunkte scheint uns dasselbe nicht anwendbar. Eine gleiche Substitution einer vollen homogenen Linse an Stelle der Linsenschaale liegt wohl auch den Differentialausdrücken für den reciporoken Werth der Brennweite (S. 188) und für den Ort der Hauptpunkte (S. 191) zu Grunde.*

Die vom Verfasser für verschiedene Augen aufgefundenen, überraschend einfachen Beziehungen zwischen den Brennweiten der Kernlinse, der ganzen Krystalllinse und der von Corticalsubstanz gebildeten vollen homogenen Linse (Fundamentallinse) bleiben angenähert richtig, da die benützten Formeln die Brennweiten sehr nahe richtig darstellen. Ob jedoch diese Näherungen hinreichen, um über Aplanatismus und chromatische Abweichung der geschichteten Krystalllinse zu entscheiden (§§ 59 und 61), mag dahingestellt bleiben. Ophthalmometrische Probleme und eine Untersuchung über die Trajectorie der Strahlen in der Linse bilden den Schluss des Werkes, das durch seinen reichen und vielseitigen Inhalt gewiss seinen Zweck, zu weiteren theoretischen und experimentellen Untersuchungen anzuregen, nicht verfehlen wird.

Prag, im November 1877. F. LIPPICH.

Handbuch der niederen Geodäsie von FRIEDR. HARTNER. 5. vermehrte Auflage, bearbeitet von JOSEF WASTLER, a. o. Professor der Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Graz. Mit 397 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien, 1876. gr. 8°. XII. 760 S.

5. Auflage! Diese zwei Worte geben eine genügende Kritik der früheren Ausgaben, so dass nur die Vergleichung der neuen mit jenen älteren zu machen bleibt.

---

* Leitet man für ein System mit continuirlich veränderlichem Brechungsindex n die Differentialausdrücke ab für den Ort des Brennpunktes und zugehörigen Hauptpunktes, indem man die unendlich dünnen Schichten nacheinander combinirt, so erhält man

$$-d\left(\frac{1}{x-\varphi}\right)=\frac{dn}{nr}+\frac{dn}{n(x-\varphi)}+\frac{dx}{(x-\varphi)^2},\quad \frac{d\alpha}{x-\alpha}=\frac{d\varphi}{x-\varphi},$$

Es ist zunächst wahrzunehmen, dass die Ausdrucksweise eine sorgfältige Durchsicht erfahren hat, sie ist klar und nirgends schleppend; manches Sprachliche wird freilich „im Reiche" als mehr oder minder berechtigte österreichische Eigenthümlichkeit angesehen werden. Die Ausstattung des Buches ist gut, namentlich sind die Abbildungen zu loben wegen ihrer Deutlichkeit und der Vermeidung überflüssiger und verwirrender Nebensachen. Druckfehler sind mässig vorhanden, ein Viertelhundert Berichtigungen bringt die letzte Seite.

Die neueren Arbeiten im Gebiete der niederen, einige auch aus der höheren Geodäsie, sind, mit erkennbarer Vorliebe für die (allerdings zahlreichen) österreichischen, meistens berücksichtigt, entweder nur durch passende Verwerthung ihrer Ergebnisse oder mit dankenswerther Quellenangabe. Ausser vielfachen Abänderungen und kleineren Zusätzen, mit denen man wohl einverstanden sein kann, ist in der vermehrten Ausgabe folgendes, das in der vom Vorworte zur 5. Auflage eingehaltenen Ordnung angegeben wird, neu aufgenommen:

Der Steinheil'sche Heliotrop; Ausführliches über die Genauigkeit der Längenmessungen; die Messräder; der anallatische Distanzmesser von Porro; die Untersuchung über die Excentricität des Höhenkreises; der Theodolith von Breithaupt; die Untersuchung des Fehlers im Höhenwinkel wegen Schiefstehens der Rotationsaxe; das Abstecken langer gerader Linien; das Ausstecken von Kreisbögen; die durch die neue

---

wenn φ, α, x beziehungsweise die von einem Fixpunkte auf der Axe (etwa dem Kernpunkte der Linse) gezählten Entfernungen des Brennpunktes, des Hauptpunktes und jener Schichte bedeuten, zu welchen erstere gehören, r aber den Krümmungsradius der Schichte, positiv gezählt, wenn der Krümmungsmittelpunkt im Sinne der positiven x der Schichte voraus liegt. Die erste Gleichung kann mit der des Verfassers in Uebereinstimmung gebracht werden, wenn man $x-\varphi$ sehr gross gegen nr voraussetzt, was für die Krystalllinse einigermassen zutrifft. Zählt man die Entfernungen ferner vom Linsencentrum, so wird auch x gegen φ sehr klein und man hat dann angenähert

$$d\frac{1}{\varphi}=\frac{dn}{nr}\cdot\frac{1}{\varphi}=\int_{-\delta}^{\delta}\frac{dn}{nr}=\int_{0}^{\delta}\frac{2\,dn}{nr},$$

und zwar die zweite Formel im Falle der Accomodation, in welchem für zwei gleichweit vom Mittelpunkte abstehende Schichten die r gleich und entgegengesetzt werden; δ bedeutet die halbe Linsendicke. Die Gleichung zur Bestimmung von α, also des Hauptpunktes, scheint uns jedoch mit der des Verfassers nicht vereinbar.

Auf S. 264 wird eine Ableitung des Differentialausdruckes für die Brennweite gegeben, die zu unserer Gleichung geführt hätte. Allein erstlich begnügt sich der Verfasser mit einer Näherung und substituirt statt der Entfernung (x) des Brennpunktes von der Grenze der Schichte, die Entfernung des Brennpunktes vom Linsencentrum, andererseits wird unrichtiger Weise $n=1$ statt $n=1+dn$ in die Gleichung gesetzt, welche bei endlichem Werthe von n für die Abscissen der conjugirten Punkte gilt.

Instruction des österreichischen Katasters bedingten Aenderungen und Neuerungen in der Triangulirung; die Untersuchung über die Genauigkeit der Längen- und Horizontalwinkel-Messungen; das Gewicht einer n-fachen Repetition; die Untersuchung über die Aneroide von Goldschmid; das Universal-Nivellirinstrument von Ertel; die ausführliche Behandlung des Detailnivellements und der Querprofile; das Präcisionsnivellement. Zu nennen wäre etwa noch eine kurze und gute Anleitung zur Aufnahme von Städten, die Herr Wastler bei der Aufnahme von Graz erprobte. — Die Zusätze sind weder alle von gleicher Wichtigkeit und gleichem Werth, noch gleich ausführlich, aber in jeglicher Hinsicht mit Rücksicht auf den Zweck des Buches und seine Beschränkung auf die niedere Geodäsie genügend. Mancher Leser wird freilich noch Anderes wünschen, z. B. mehr Einzelheiten über die in Wäldern vorkommenden Messgeschäfte und diese zusammengestellt.

Die Rücksicht auf gewisse österreichische Verhältnisse hat leider strenges Festhalten an einheitlichem Maasse nicht gestattet.

Den früheren Auflagen war eine Markscheidekunst als Anhang beigegeben. Diese ist nun fortgelassen, dafür eine kurze Darstellung der Tachymetrie gegeben worden, was um so freudiger zu begrüssen ist, als dieses an Wichtigkeit zunehmende, keineswegs mehr neue Verfahren in vielen neueren Lehr- und Handbüchern noch unerwähnt geblieben ist. Die Darstellung wird insbesondere dadurch kurz, dass vielfach auf Vorhergegangenes verwiesen wird, aber abgesehen hiervon, ist des Berichterstatters Meinung, es wäre eine eingehendere Behandlung der Tachymetrie, im Vergleich zu der Ausführlichkeit und Vollständigkeit, mit welcher andere Abschnitte behandelt sind, wohl gerechtfertigt, es wäre namentlich die vollständige Abbildung einiger Tachymeter und eine Besprechung der neueren Mailänder Clepsinstrumente nicht überflüssig gewesen.

Ueber den Grad der Zweckmässigkeit der eben gewünschten Erweiterung kann man verschiedener Ansicht sein und Herr Wastler hat eben nach seiner gehandelt. Hingegen wird die sehr grosse Mehrzahl der Leser des Buches mit dem Berichterstatter sehr ungerne ein ausführliches Sachregister vermissen. Das gänzliche Fehlen eines solchen vermindert entschieden die Brauchbarkeit und Nützlichkeit des Buches; einem Handbuche, das doch wesentlich zum Nachschlagen bestimmt ist, sollte ein Register gar nie fehlen. Mit alleiniger Hilfe des ziemlich kurz gefassten Inhaltsverzeichnisses wird selbst der Kenner nicht schnell und leicht eine Einzelheit im Buche auffinden können, noch viel weniger ist das Anfängern möglich und das Buch ist schliesslich doch auch für Solche bestimmt und kann ihnen bestens empfohlen werden.

Bohn.

Bibliographie

vom 1. December 1877 bis 28. Februar 1878.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 22. Bd., Jahrg. 1877. Göttingen, Dieterich. 28 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld & A. Winnecke. 12. Jahrg. 1877, 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Cl. 37. Bd. Wien, Gerold. 55 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem. - naturw. Cl. 1. Abth., 75 Bd., 4. Heft. Wien, Gerold. 4 Mk. 40 Pf.

——, 2. Abth., 75. Bd., 5. Heft und 76. Bd., 1. Heft. Ebendas. 6 Mk. 40 Pf.

——, 3. Abth., 75. Bd., 1.—5. Heft. Ebendas. 6 Mk. 40 Pf.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 13. Bd. (4 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht, herausgegeben von V. Hoffmann. 9. Jahrg. (6 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 10 Mk. 80 Pf.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. Wiedemann. Jahrg. 1878. (12 Hefte.) 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

——, Beiblätter hierzu. Jahrg. 1878. (12 Hefte.) 1. Heft. Ebendas. pro compl. 12 Mk.

Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik, mathem. und astron. Instrumentenkunde. 14. Bd. (6 Hefte), 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 20 Mk.

Zeitschrift für Meteorologie, redig. von J. Hann. 13. Bd. Nr. 1. Wien, Braumüller. pro compl. 10 Mk.

Repertorium für Meteorologie, redigirt von H. Wild. 5. Bd., 2. Heft. Le[illegible] Voss. 10 Mk. 50 Pf.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 6. Jahrg., 1. Heft. Berlin, Mittler. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica: ed. A. Metzger. 27. Jahrg., 1. Heft, Januar-Juni 1877. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. 17. Bd.: Geschichte der Mathematik von J. Gerhardt. München, Oldenbourg. 4 Mk. 80 Pf.

Günther, S., Studien zur Geschichte der mathemat. und physikal. Geographie. 3. Heft. Halle, Nebert. 2 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Hager, G., Ueber die lineare Transformation der Thetafunctionen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

Gallati, E., Neue Methode der symmetrischen Multiplication und der Division mittels Reciproken. Winterthur, Westfehling. 3 Mk. 20 Pf.

Sterneck, R. v., Antilogarithmen (fünfstellig). Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Wallentin, F., Methodisch geordnete Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. und 2. Theil. Wien, Gerold. 5 Mk. 60 Pf.

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Theil: Geometrie. 1. Buch. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Prediger, C., Die Elemente der analyt. Geometrie des Raumes. Clausthal, Löwe. 12 Mk.

Solin, J., Ueber Curven dritter Ordnung, welche eine unendlich ferne Rückkehrtangente haben, und ihr Auftreten in der Statik. Prag, Rziwnatz. 1 Mk. 60 Pf.

Grassmann, H., Die lineale Ausdehnungslehre. 2. Aufl. Leipzig, O. Wigand. 6 Mk.

Arendt, G., *Géométrie dans l'espace.* Berlin, Herbig. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Pelz, K., Ueber einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Langer, P., Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze. Halle, Nebert. 1 Mk. 80 Pf.

Göbel, J. B., Die wichtigsten Sätze der neueren Statik. Zürich, Meyer & Zeller. 1 Mk. 60 Pf.

Rosachatius, E., Ueber Bewegungen ei[illegible] [illegible]öttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Gröbli, W., Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Claussen, P., Lehrbuch der mathematischen Geographie. Leipzig, Knapp. 2 Mk.

Bruns, H., Die Figur der Erde. Berlin, Schlesier. 4 Mk.

Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1876. Ebendas. 9 Mk.

Preuss, H. W., Nautische Aufgaben. 1. Heft: Breitenbesrimmungen. Oldenburg, Schulze. 1 Mk. 60 Pf.

Lohrmann, W. G., Mondcharte in 25 Sectionen und 2 Erläuterungstafeln. Herausgegeben von J. Schmidt. Leipzig, Barth. 50 Mk.

Möllinger, O., Neue grosse dritte Himmelskarte mit beweglichem Horizont. 3 Bl. Imp.-Folio. Zürich, Schmidt. 8 Mk.

Gercken, W., Ueber die mathemat. Theorie der Dispersion des Lichts. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

Eichhorn, A., Bestimmung der Interferenzen von mehreren isochronen und in gleicher Phase schwingenden Lichtcentren. Jena, Fischer. 1 Mk. 20 Pf.

Rühlmann, R., Handbuch der mechanischen Wärmetheorie.. 2. Bd., 1. Lief. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

Lorenz, L., Die Lehre vom Licht. Vorlesungen. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

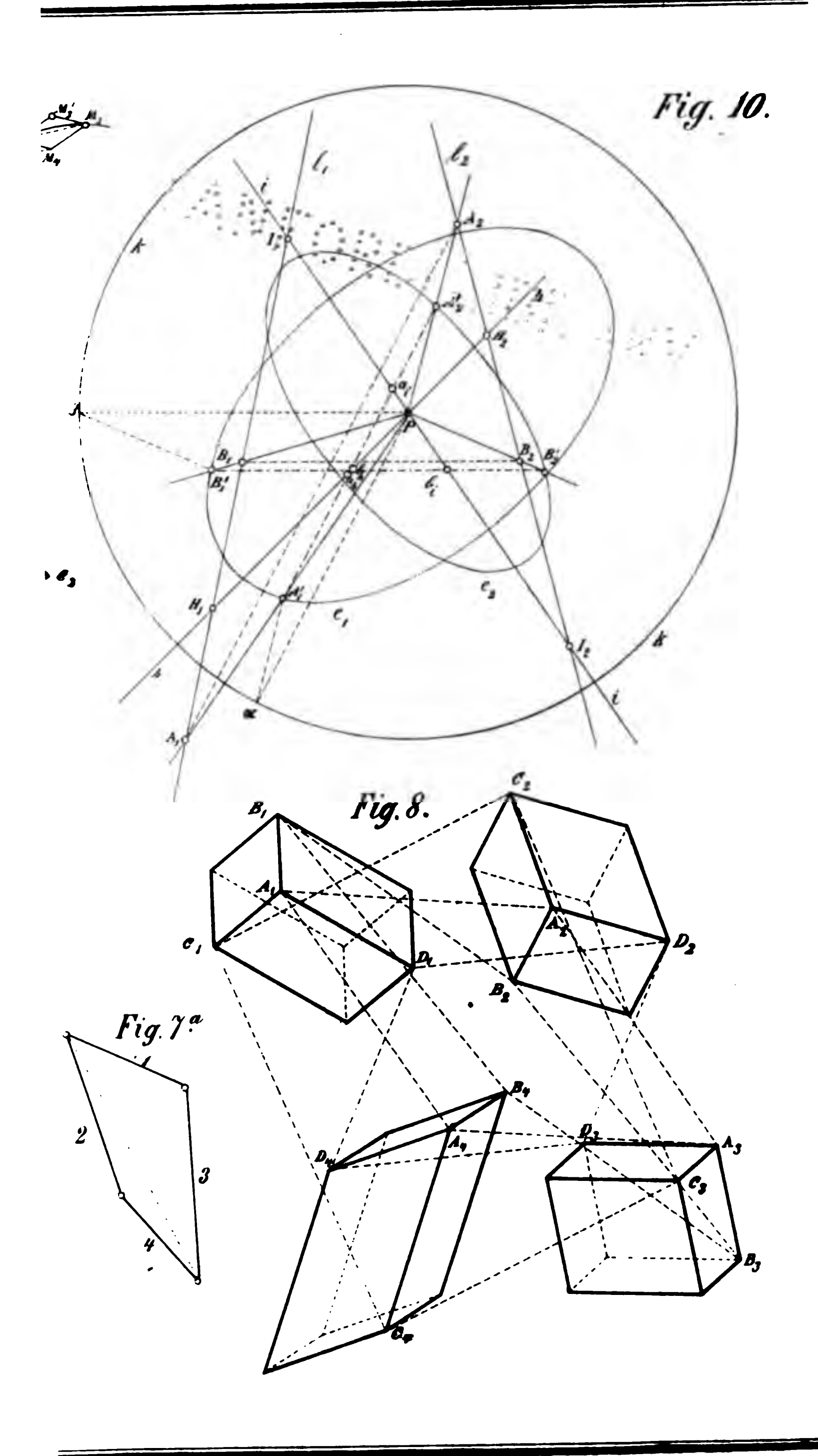
Börnstein, R., Der Einfluss des Lichtes auf die elektrische Spannung in Metallen. Heidelberg, Winter. 30 Pf.

Hüfner, G., Quantitative Spectralanalyse und ein neues Spectrophotometer. Leipzig, Barth. 1 Mk.

Puluj, J., Ein Radiometer. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Maxwell, J. C., Theorie der Wärme, übers. von F. Neesen. 1. Lief. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 20 Pf.

Horstmann, A., Ueber Verbrennungserscheinungen bei Gasen. Heidelberg, Winter. 80 Pf.


Fig. 10.
Fig. 8.
Fig. 7.a

Historisch-literarische Abtheilung.

Hermann Grassmann.

Ein Nekrolog

von

Prof. F. Junghans
in Stettin.

Es sei versucht, hier in Kürze die Lebensbahn eines Mannes zu schildern, an dessen Grabe die Vertreter zweier Wissensgebiete in gleicher Trauer sich vereinigt haben, die Vertreter der mathematischen, beziehungsweise der physikalischen Wissenschaft und die der vergleichenden Sprach- und Sanskritforschung. Es erfordert schon besonderes Talent und ausdauerndsten Fleiss, um sich nur eines dieser beiden Gebiete annähernd zu bemeistern, aber beide nicht nur zu beherrschen, sondern auf beiden Neues und Bedeutendes hervorzubringen, dazu gehört eine Genialität und Schöpferkraft ersten Ranges: Hermann Grassmann besass sie. Seiner wissenschaftlichen Grösse stand gleich die Reinheit und Güte seines Charakters, dessen Grundzüge festhaltende Treue und edle Bescheidenheit waren.

Geboren zu Stettin am 15. April 1809, ein Sohn des Professors der Mathematik J. G. Grassmann, hat Hermann Günther Grassmann das Gymnasium seiner Vaterstadt, dann von 1827 bis 1830 die Universität zu Berlin besucht und vorwiegend Theologie studirt. In seine Vaterstadt zurückgekehrt, wandte er sich zunächst dem Lehramte zu, wurde Ostern 1831 Mitglied des Seminars für gelehrte Schulen am hiesigen Gymnasium und bestand im November 1831 das Oberlehrerexamen, im Mai 1834 die erste und im Juli 1839 die zweite theologische Prüfung. Im Jahre 1836 ging er an die hiesige Ottoschule, trat 1837 in die physikalische Gesellschaft, bestand 1840 das Oberlehrerexamen in der Mathematik, kehrte 1842 an das Gymnasium zurück, wurde 1843 an die neu gegründete Friedrich-Wilhelms-Schule versetzt und im Jahre 1852 als Professor der Mathematik und Nachfolger seines Vaters an das Gymnasium berufen. Dieses Amt hat er bis zu seinem T[illegible]

Theologie hat er mit Eifer und Herzensneigung studirt, den Wunsch, Prediger zu werden, lange festgehalten und sein ganzes Leben hindurch der positiven Theologie warme Zuneigung bewahrt; schon tief in Sanskritstudien versenkt, wurde er Secretär und dann Vorsitzender des pommerschen Hauptvereins für chinesische Mission.

Dem Studium der Mathematik, zu welcher Talent und Liebe vom Vater ererbt waren, scheint er sich nach der Universitätszeit mit voller Energie gewidmet zu haben. Bei ihm war aber das Lernen zugleich ein Produciren, und so hatte er seine Ausdehnungslehre bereits vollständig erdacht und wandte ihre Gesetze auf die höhere Geometrie und die analytische Mechanik an, als er im Jahre 1840 die oben erwähnte Prüfung in der Mathematik bestand. Im Jahre 1844 erschien sein erstes grösseres Werk: Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin, dargestellt und durch Anwendungen erläutert; ein Werk, in welchem er ebensoviel Productionskraft, wie Abstractionsgabe entwickelte, dessen Grundideen aber den mathematischen Anschauungen seiner Zeit vorausgriffen und erst ein volles Menschenalter später zu richtiger Würdigung gelangten. Lange Jahre blieb das Werk unbeachtet; nicht einmal recensirt wurde es, und endlich, so wird erzählt, liess es der Verleger einstampfen.

Der Inhalt der Grassmann'schen Ausdehnungslehre kann hier nur kurz mit Grassmann's eigenen der Vorrede entnommenen Worten charakterisirt werden. Es war ihm einleuchtend geworden, dass die Geometrie keineswegs in dem Sinne, wie die Arithmetik oder die Combinationslehre, als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur Gegebenes, den Raum, sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstracter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen. Durch die neue Analyse war die Möglichkeit, einen solchen rein abstracten Zweig der Mathematik auszubilden, gegeben; ja diese Analyse, sobald sie, ohne irgend einen schon anderweitig erwiesenen Satz vorauszusetzen, entwickelt wurde und sich rein in der Abstraction bewegte, war diese Wissenschaft selbst. Der wesentliche Vortheil, welcher durch diese Auffassung erreicht wurde, war der Form nach der, dass nun alle Grundsätze, welche Raumesanschauungen ausdrückten, gänzlich wegfielen, und somit der Anfang ein ebenso unmittelbarer wurde, wie der der Arithmetik; dem Inhalte nach aber der, dass die Beschränkung auf drei Dimensionen wegfiel. Erst hierdurch traten die Gesetze in ihrer Unmittelbarkeit und Allgemeinheit ans Licht und stellten sich in ihrem wesentlichen Zusammenhange dar, und manche Gesetzmässigkeit, die bei drei Dimensionen entweder noch gar nicht oder nur verdeckt vorhanden war, entfaltete sich nun bei dieser Verallgemeinerung in ihrer ganzen Klarheit.

Es genügt demnach zu bemerken, dass Grassmann lange Zeit vor Riemann Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen der mathematischen Analyse unterworfen hat, dass Grassmann's sogenannte combinatorische Multiplication ihn bereits auf die Determinanten führt und dass die erst später auftauchenden Aequipollenzen des Italieners Bellavitis, sowie die unter dem Namen der Quaternionen bekannten Zahlen- und Raumgebilde des grossen englischen Mathematikers Hamilton sich deutlich, namentlich in der zweiten Bearbeitung der Ausdehnungslehre, welche im Jahre 1862 erschien, vorgezeichnet finden. Nur die Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig widmete, wahrscheinlich angeregt durch den Professor Möbius, einen Geistesverwandten Grassmann's, seinen Leistungen Aufmerksamkeit; sie stellte eine Preisaufgabe, die Wiederherstellung und weitere Ausbildung des von Leibnitz erfundenen geometrischen Calculs oder die Aufstellung eines ihm ähnlichen Calculs betreffend. Die von Grassmann eingelieferte Bearbeitung, welche ebenfalls eine Darstellung seiner neuen Analyse enthält, wurde im Jahre 1846 gekrönt und von Möbius mit einer erläuternden Abhandlung begleitet. Aber ein weiterer Antheil der Mathematiker an seinen Bestrebungen tritt in den nächsten beiden Jahrzehnten doch nicht hervor, wiewohl er in Crelle's Journal eine Reihe werthvoller Abhandlungen über Anwendung seiner Analyse auf Curvenlehre erscheinen liess: eine Erfahrung, die ihm schmerzlich genug und vielleicht mit die Veranlassung war, dass er sich fortan mehr der Sprachwissenschaft zuwandte. Erst nach der Mitte der sechziger Jahre, seit welcher das Studium der höheren Algebra und ihrer Anwendung auf Geometrie durch deutsche und englische Mathematiker einen erhöhten Aufschwung nahm, machten die Professoren Clebsch und Hankel auf die Arbeiten Grassmann's aufmerksam und zollten ihnen lebhafte Bewunderung. Eine Andeutung der Ursachen, welche der gerechten Würdigung derselben hinderlich waren, findet sich in Hankel's Buche über die complexen Zahlen. Nachdem er die Ideen Grassmann's charakterisirt und gewürdigt hat, sagt er Seite 16: „Wenn trotzdem die Untersuchungen des geistreichen Forschers die Anerkennung nicht gefunden haben, die sie verdienen und die Jeder, welcher sie kennt, ihnen zollen muss, so ist dies meines Erachtens hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, dass ihr Verfasser allen Sätzen sogleich die allgemeinste Form in Bezug auf n Dimensionen gegeben, dadurch aber die Uebersicht und das Verständniss ungemein erschwert hat.“ Aehnlich äussert sich Möbius in der vorher erwähnten Abhandlung dahin, dass Grassmann's Analyse deshalb schwer zu verstehen sei, weil der Verfasser sie auf eine Weise zu begründen suche, welche dem bisher bei mathematischen Betrachtungen gewohnten Gange ziemlich fern liege, und dass er nach Analogien mit arithmetischen Operationen Objecte als Grössen behan[illegible] Grössen seien,

mann's gewidmeten Artikel der „Allgemeinen Zeitung“, „was diese Arbeiten, deren erste noch in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein später aufgegebenes mathematisches Residuum zeigt, vor anderen auszeichnet, so ist es nicht die Tiefe und Weite der Gelehrsamkeit, denn er arbeitete mit wenig Büchern, auch nicht die Beweglichkeit einer wissenschaftlich geschulten Phantasie, denn etymologische Fünde sind in ihnen so gut wie nicht vorhanden — sondern es ist die Helligkeit des Nachdenkens, das in alle Winkel des Gegenstandes eindringt, die Beharrlichkeit, mit welcher dem Stoffe so lange zugesetzt wird, bis er sich die einfachste Formulirung des Gesetzes hat abringen lassen; es ist die Unermüdlichkeit der mathematischen Abstraction, die in diesen Aufsätzen vorzugsweise zur Erscheinung kommt.“

Diese sprachvergleichenden Untersuchungen führten ihn zum Studium der ältesten indischen Sprache, des Sanskrit, und er suchte sich in jener Sammlung altindischer religiöser Hymnen heimisch zu machen, welche der Rig-Veda genannt wird, eine Arbeit, zu welcher ihm im Jahre 1861 nur der erste Band des Aufrecht'schen Textes und kaum die Hälfte des grossen Böthlingk-Roth'schen Wörterbuches zu Gebote standen. Diesem nach dem Urtheile von Sachkennern staunenswerthen Unternehmen folgte die Herausgabe der beiden Werke, welche ihm mehr äussere Anerkennung eingetragen haben, als seine mathematischen, des Wörterbuches zum Rig-Veda und der Uebersetzung, zu welcher letzteren er sich verpflichtet fühlte, weil er es für nöthig fand, das Wörterbuch nach der Seite der Interpretation zu ergänzen. „So ist es ihm“, indem wir Delbrück's Worten folgen, „unter angestrengtester Aufbietung seiner geistigen Kraft, die uns ebenso sehr durch Ausdauer, wie durch Geschmeidigkeit Bewunderung abringt, gelungen, zwei eng verbundene grosse Werke fertig hinzustellen, die für lange Zeit ein wichtiges Werkzeug zur Bekämpfung der Schwierigkeiten des Veda sein werden. Die Anerkennung der Fachgenossen konnte nicht würdiger ausgesprochen werden, als es durch Rudolf Roth, den ersten Kenner der Vedas, geschehen ist, mit dessen Worten die Tübinger philosophische Facultät ihren Ehrendoctor vom Jahre 1876 rühmt als einen Mann, *qui acutissima vedicorum carminum interpretatione nomen suum reddidit illustrissimum*“.

„Welch ein Weg von der Ausdehnungslehre bis zur Uebersetzung des Rig-Veda! Und doch erschöpft das, was hier aufgezählt ist, noch lange nicht die Leistungen dieses merkwürdigen Geistes. Sein Interesse für die Schule bekundete er durch eine Reihe von Lehrbüchern, unter anderen ein deutsches Lesebuch; seine ungewöhnliche musikalische Begabung nicht blos durch Leitung eines Gesangvereins, sondern, neben Fertigkeit auf dem Clavier und der Orgel, auch dadurch, dass er in den Jahren 1861—1872 zahlreiche Volkslieder sammelte, ihre Melodien nach *dem Gehör* aufschrieb und zum Singen in seiner Familie dreistimmig

Darin macht Grassmann in grösster Bescheidenheit sein Prioritätsrecht geltend. „Jene Stelle in meinem Programm", so sagt er, „in welcher unter der Reihe der harmonischen Nebentöne die jetzt als Obertöne oder Partialtöne bezeichneten Töne verstanden sind, obwohl sie eine vollständige Theorie der Vocaltöne, an der es bis jetzt noch fehlte, in sich schliesst, ist gänzlich unbeachtet geblieben." Er spricht dies nicht etwa klagend aus, noch macht er irgend einen Anspruch auf Vorrang gegen Helmholtz; er begnügt sich damit, dass die Wahrheit zu Tage gebracht ist und in Helmholtz einen so mächtigen Vertreter gefunden hat, bezeichnet die Grundlage der Theorie von Helmholtz als irrig und setzt in jenem Aufsatze eine neue an ihre Stelle, ohne sich künstlicher Hilfsmittel, wie der Resonatoren, die er als unzuverlässig bezeichnet, zu bedienen, indem er sich nur auf sein feines musikalisches Ohr verlässt. Gleichzeitig erfahren wir, dass er seit 1832 unausgesetzt bemüht war, die Theorie der Vocallaute und der Sprachlaute überhaupt auszubilden und fest zu begründen.

Aber nicht nur als theoretischer, sondern auch als praktischer Physiker war er bedeutend. Dies beweist ein neuer, sich vorzüglich bewährender Heliostat, bei welchem die Reibung ein Minimum ist: er hat ihn auf neuem Princip ausgedacht, das Modell dazu mit den einfachsten Hilfsmitteln selbst construirt und das Instrument bei einem Berliner Mechaniker im Auftrage der hiesigen physikalischen Gesellschaft anfertigen lassen.

Nach den von Grassmann hinterlassenen Aufzeichnungen scheint er seit dem Jahre 1852 Sanskrit und Sprachvergleichung studirt zu haben. Es mag sein, dass die mangelnde Anerkennung seiner mathematischen Fachgenossen zu dieser Wendung beitrug; indessen lag einem so exact geschulten Geiste, wie dem seinigen, der Uebergang auf ein Gebiet nicht fern, wo es ebenfalls galt, formale Gesetze aufzusuchen, wenn auch nicht auf dem Wege der Deduction, sondern der Induction. Und er muss sich der Fähigkeit bewusst gewesen sein, auch hier Selbstständiges zu schaffen, denn sonst hätte er sich nicht schon seit 1832 mit der Theorie der Sprachlaute beschäftigt. Er arbeitete also von jetzt ab auf zwei Gebieten. Nach Vollendung der zweiten Ausgabe der Ausdehnungslehre gewann in den Jahren 1862—1870 die Beschäftigung mit Sprachwissenschaft und Sanskrit die Oberhand, bis in den siebziger Jahren die Mathematik wieder gleichzeitig neben der Sprachwissenschaft hervortritt. Die ersten seiner vielen in Kuhn's Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung veröffentlichten Abhandlungen erschienen in den Jahren 1859 und 1861, als er schon über 50 Jahre alt war. Sie hatten die Lautlehre zum Gegenstande, den Einfluss des *v* und *j* auf benachbarte Consonanten, und gewisse Erscheinungen im Gefolge der Aspiraten. „Fragt man sich", so sagt sein Freund B. Delbrück in Jena in einem dem Andenken Grass-

Recensionen.

Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Von B. Erdmann. Leipzig, L. Voss. 1877. X, 174 S.

Die mathematische Analyse der unserer Geometrie zu Grunde liegenden Begriffe, wie sie von Légendre, Gauss, Lobatschewsky und Bolyai begonnen, von Riemann, Helmholtz und Klein weiter geführt wurde, hat gezeigt, dass unsere Geometrie nur ein Specialfall eines allgemeinen Begriffssystems ist, und hat weiter die einfachen Kriterien nachgewiesen, welche dazu dienen können, unsere Geometrie zu charakterisiren und von den übrigen möglichen als die der Erfahrung entsprechende auszusondern.

Die Berechtigung dieser rein mathematischen Untersuchungen ist für den Mathematiker, der auch die Elemente seiner Wissenschaft auf ihren Zusammenhang und ihre Abhängigkeit von allgemeineren Voraussetzungen zu behandeln gewohnt ist, selbstverständlich. Aber es knüpfen sich an diese Untersuchung auch philosophische Fragen, wie die nach dem psychologischen Ursprung unserer Raumvorstellungen selbst; speciell ob etwa jener allgemeineren Geometrie überhaupt noch solche Vorstellungen entsprechen können etc. Für den Mathematiker ist es daher zunächst wichtig, dass seine Untersuchungen in richtiger Würdigung in die philosophische Forschung eingehen. Eine Schrift, wie die vorliegende, welche sich gerade diese Aufgabe gestellt und auch gelöst hat, kann also auch in dieser mathematischen Zeitschrift eine eingehendere Anzeige beanspruchen.

Die philosophische Bedeutung der geometrischen Theorien ist wohl auch von Riemann berührt, von Helmholtz in seinem Aufsatze „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" (Pop. wiss. Vorträge Heft 3, 1876) ausführlicher behandelt und in einer Bestätigung der empiristischen Theorie gefunden worden; aber die Mathematik konnte von Seiten der Philosophen selbst eine systematische Verarbeitung des neuen Stoffes verlangen, an Stelle des bisherigen Mangels an Verständniss für die leitenden mathematischen Gesichtspunkte, der in

setzte; seine Kenntniss der Botanik zeigte ein Buch über deutsche Pflanzennamen, durch welches er eine deutsche Pflanzenbenennung einzuführen suchte. Endlich sei erwähnt, dass er, inmitten des glücklichsten Familienlebens, für die grossen und kleinen Erlebnisse seiner zahlreichen Kinder, von denen noch acht am Leben sind, ein gleich wachsames und liebevolles Auge hatte."

„Ueberblickt man nun dieses äusserlich so gleichförmige, auf engem Raume sich abspielende, aber innerlich so bewegte Dasein, so wird man mit Genugthuung gewahr, dass dem Drama ein glücklicher Abschluss nicht fehlt: in strebender Jugend ein freudiges Aufflammen, dann lange Jahre der Widerstand der stumpfen Welt und endlich ein durch reiche Anerkennung verschönter Lebensabend."

Am Schluss der Vorrede zur zweiten Ausgabe der Ausdehnungslehre, wo Grassmann in einer Art Prophetie mit ergreifenden Worten seinen unbeachtet gebliebenen Ideen die Anerkennung späterer Geschlechter voraussagt, spricht er von dem sehnsüchtigen Wunsche, in anderer äusserer Stellung einen Kreis von Schülern mit jenen Ideen befruchten zu können. Die Erfüllung dieses Wunsches ist ihm versagt geblieben.

Den sonst immer Gesunden erfassten in den letzten beiden Jahren schwere Körperleiden. Er hielt muthig Stand und suchte sich durch fortgesetzte wissenschaftliche Thätigkeit, von welcher noch fünf in seinem Todesjahre veröffentlichte Abhandlungen mathematischen, physikalischen und sprachwissenschaftlichen Inhalts Zeugniss ablegen, sowie durch Verwaltung seines Amtes bis zur Grenze des Möglichen, aufrecht zu erhalten. Er erlag am 26. September 1877.

---

mal unserer Raumvorstellung ausspricht; aber dieses Merkmal kann nicht in jene bestimmte Form gefasst werden, ohne zuvor von der an sich einfachen Raumvorstellung eine Abstraction auf das erste Constructionselement, den Punkt, gemacht zu haben. Machen wir etwa zunächst die Abstraction auf die Gerade, so haben wir unserem Raume vier Dimensionen zuzuschreiben, während die Axiome der Congruenz (mit den zu Grunde liegenden Thatsachen der sechsfach unendlich vielen freien Bewegungen eines festen Körpers) dabei unverändert erhalten bleiben. Wir wollen mit dieser Bemerkung nur darauf hinweisen, dass eine solche vorherige Abstraction auf den Punkt für das Axiom nothwendig ist, ohne die vielleicht physischen Gründe zu berühren, welche zu einer solchen Abstraction führen und welche auch einer psychologischen Untersuchung bedürfen.

Bevor der Verfasser an die Untersuchung der geometrischen Axiome geht, scheint es ihm nöthig, die logische Vorfrage zu erledigen, ob man unsere Raumvorstellung überhaupt definiren könne, da sie ja als einzigartige Anschauung keinem höheren Begriffe untergeordnet wäre; aber da ihr Inhalt in Begriffe gefasst werden kann, und zwar in Grössenbegriffe, so entsteht keine Schwierigkeit. Man hat nur solcher Grössenbegriffe mehrere aufzufinden, mit welchen sich derjenige unseres Raumes vergleichen lässt.

Diese Möglichkeit der Definition würde sogleich klarer geworden sein, wenn der Verfasser die Thatsache benutzt hätte, dass man denselben Inhalt unserer Raumanschauung auf sehr verschiedene Weise in Begriffe fassen kann. Denn wir haben schon erwähnt, dass man sich den Raum, statt durch continuirliche Bewegung eines Punktes, auch durch Bewegung eines andern Gebildes, etwa einer Geraden, erzeugt vorstellen kann; hierbei ergiebt sich aber offenbar der Grössenbegriff einer durch n Veränderliche bestimmten — oder specieller einer gleichartig ausgedehnten und congruenten — Mannigfaltigkeit. Ueberhaupt wäre es vortheilhaft, wenn neben den nach Helmholtz gewählten Beispielen der Farben- und Tonreihe als solches unser vierfach ausgedehnter, aus Geraden erzeugter Raum betrachtet würde. Denn eine Reihe von Einwänden, welche gegen diese Beispiele, wegen der Schwierigkeit, Analoga für die Congruenzbedingungen etc zu finden, erhoben worden sind, fallen hier von selbst weg, so vor Allem der Einwand gegen die Möglichkeit einer $n$fach ausgedehnten anschaulichen Mannigfaltigkeit. Ausserdem aber würde diese Auffassung dazu dienen, das, was in unserer Raumvorstellung wirklich enthalten ist, von dem zu trennen, was nur infolge von Definitionen und hinzugetretenen Massbestimmungen in den Axiomen zum Ausdruck gelangt. Denn das Erstere bleibt auch bei unserem Linienraume erhalten, das System von Axiomen aber wird anders geartet. So sieht man z. B., dass man, um den Begriff der Festig-

keit mathematisch zu fassen, hier zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten je zweier Elemente annehmen muss. Lässt man ein Element fest, so kann der feste Körper noch Schraubenbewegungen um diese Axe beschreiben, auf welche sich das nächste Axiom zu erstrecken hat etc.

Geht man nun von Grössenbegriffen aus, so bieten die Massbestimmungen ein Princip der Eintheilung der verschiedenen ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. An den Flächen hat Gauss die Bedeutung des Krümmungsmasses erwiesen, insbesondere des constanten Krümmungsmasses für diejenigen Eigenschaften, die man jetzt als Congruenz bezeichnet. Auf den letzteren Flächen construirt man auch, mit Hilfe ihrer geodätischen Linien als Gerade, die drei Geometrien, die pseudosphärische, die sphärische und die ebene Geometrie, welche sich uns auch durch die verschiedenen, das elfte und zwölfte Euklidische Axiom ersetzenden Voraussetzungen ergeben. — Obwohl nun eine solche anschauliche Interpretation der verschiedenen Geometrien auf drei Dimensionen sich nicht ausdehnen lässt, so ist eine solche Ausdehnung doch analytisch bei der Formel für das Linienelement möglich, welche für alle Massbeziehungen den zusammenfassenden Ausdruck darstellt; und hiernach wird es weiter möglich, auch bei den drei Dimensionen auf die Bedingungen (der Congruenz) zurückzuschliessen, aus welchen jener Ausdruck folgt. In diese Bedingungen gehen aber die geometrischen Begriffe der Festigkeit und Bewegung ein, welche, da sie auch Massverhältnisse der wirklichen Körper geben wollen, auch mechanische Begriffe ausdrücken müssen. Die Erfahrung ergiebt mit grösster Wahrscheinlichkeit, dass wir unseren Vorstellungen eine ebene Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen haben. Die scheinbare Erweiterung unserer Raumanschauung ins Unendliche kann aber keinen Grund für die Annahme dieser ebenen Geometrie abgeben; denn das Unendliche tritt bei der pseudosphärischen Geometrie ebenfalls auf, der unbegrenzte Fortgang sogar bei jeder der drei Geometrien; das erstere ist überhaupt nur eine Hypothese über die Massbestimmung, über die unsere an das Endliche gebundene Vorstellung Nichts aussagt.

Illustrirt wird dieser Beweisgang durch das von Helmholtz in dem oben citirten Aufsatze ausgeführte treffende Beispiel von den Vorgängen in einem Convexspiegel, welcher die äusseren Vorgänge abspiegelt. Aber die Argumentirung des Verfassers hätte sich noch wesentlich verstärken lassen durch die Entwickelungen, welche F. Klein gegeben hat. Denn setzen wir selbst die Punkte, Geraden und Ebenen in unserem Raume schon als gegeben voraus, so lassen sich in demselben die drei aus der Congruenz entspringenden Geometrien anschaulich construiren. Man verwendet dabei alle Vorstellungen, die wir uns vom Raume gebildet haben, und behält selbst dieselben Gebilde, welche wir Gerade nennen, wieder als sol[illegible] Nur dasjenige Mass, welches

mittels Bewegung der existirenden festen Körper auf den Raum angewandt wird, wird durch ein analoges ersetzt. Dabei zeigt sich, dass diejenige Eigenschaft des Raumes, welche wir durch den Werth des Krümmungsmasses charakterisiren, in Wirklichkeit nur eine solche unseres Masssystems ist. — Durch diese Darlegung würden mehrere Vortheile erreicht: es zeigt sich vor Allem, dass der Begriff „Richtung" für sich allein noch nicht das Mass liefern kann, da ja hier die Gerade ohne das gewöhnliche Mass fortexistirt. Es wird aber weiter dadurch eine vielverbreitete Unterschiebung zurückgewiesen, welche hauptsächlich der Grund der falschen Auffassungen und der Angriffe gegen die mathematischen Theorien geworden ist, vor welcher aber schon Helmholtz (S. 38 seines Aufsatzes) gewarnt hat: dass diejenigen Verhältnisse, welche sich nur auf die sinnliche Anschauung krummer Flächen beziehen, auf unsern Raum übertragen werden. Wir haben vielmehr, wenn wir unserm Raume positives oder negatives Krümmungsmass zuschreiben, unsere allgemeine Anschauung in Nichts abzuändern; und auch für einen Beobachter, der sich in einer fictiven vierten Dimension befände, könnte unser Raum dabei als ein ebener Schnitt erscheinen. So wird auch das Dilemma Riemann's verständlich: „Es muss entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden." Denn da dieselbe stetige Mannigfaltigkeit verschiedener Massverhältnisse fähig ist, so kann der Grund, welcher unsere specielle Massbestimmung bedingt, nicht aus dem Begriffe der Mannigfaltigkeit folgen, sondern nur ein äusserer, etwa ein mechanischer, sein.

Der Verfasser kommt in dem ersten Theile seines Aufsatzes zum Schlusse, dass die drei Axiome: von den drei Dimensionen, von der Congruenz und von der Ebenheit, für unsere Euklidische Geometrie nothwendig und genügend seien. Wir wollen hier auf diesen Schluss nicht näher eingehen, da wir diese ganze Frage noch durchaus nicht für abgeschlossen halten. Denn nach unserer Ansicht müsste das zweite dieser Axiome zunächst kommen, dann ein solches, welches die Zahl 6, von den sechsfach unendlich vielen freien Bewegungen eines festen Körpers herrührend, unter die charakteristischen Merkmale unserer Raumvorstellung aufnimmt, sowie auch diejenigen Zahlen, welche den Untergruppen dieser Bewegungen angehören.

Nach der Feststellung der Voraussetzungen, welche dem Inhalt unserer Raumvorstellungen zu Grunde liegen, gelangt der Verfasser nun zur psychologischen Frage nach den Bedingungen ihrer Entstehung. Während die mathematische Untersuchung von allen philosophischen Annahmen über die Art dieses Ursprungs unabhängig war, nimmt die letztere Untersuchung aus jener wenigstens Anlass zu neuen Fragestellungen, *wenn auch nicht* eigentliche Entscheidungsgründe. Denn in jeden sol-

chen, scheinbar aus der mathematischen Analyse gezogenen Schluss tritt noch wenigstens ein psychologisches Moment ein, wie etwa das von Helmholtz angenommene Kriterium: dass Alles, was durch Momente, die nachweislich die Erfahrung gegeben, im Anschauungsbilde überwunden und in sein Gegentheil verkehrt werden kann, auch nicht ursprünglich gegeben sein kann.

Der Verfasser steht bei dieser Untersuchung wesentlich auf dem empiristischen Standpunkte Lotze's, wornach unsere Empfindungen nur Zeichen für äussere Verhältnisse sind, welche das Mittel bilden, unsere allgemeine Vorstellungsweise in Uebereinstimmung zu setzen mit diesen Verhältnissen der Dinge unter sich. Nach dieser Theorie ist auch die Ausbildung der Vorstellungsweise, je nach den verschiedenen Formen der Dinge selbst, abänderungsfähig. Bei der hierbei auftretenden Frage, welche Elemente eine bestimmte Ausbildung bedingen, bleibt aber die erkenntnisstheoretische Frage, was in den äusseren Dingen selbst dem Räumlichen entspreche, oder sogar die Frage nach der Ursprünglichkeit der Raumvorstellung bei Seite.

Die Begründung dieses Standpunktes des Verfassers ergiebt sich vollständiger, wenn man seine Schrift mit der von Stumpf „Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung", Leipzig 1873, zusammenhält. In dieser letzteren Schrift soll zunächst nachgewiesen werden, wie der Raum ein wirklicher Inhalt unserer Vorstellungen ist, ähnlich wie die anderen Empfindungsgehalte, nicht blos eine Form unserer Anschauung. Hierdurch wird es verständlich, wie specielle Raumvorstellungen einer besondern Ausbildung fähig werden. Zu den physischen und psychischen Bedingungen der Raumvorstellung, welche Stumpf entwickelt, kommen nun hier noch neue hinzu, welche direct diese Ausbildung anzeigen; denn es ist die Nothwendigkeit mechanischer Hypothesen zur Feststellung der Massbeziehungen, welche einen Theil des Inhalts unserer Vorstellungen ausmachen, nachgewiesen. Und wir haben weiter in unseren oben gegebenen Ausführungen dargelegt, dass man verschiedene dieser Beziehungen anschaulich construiren, also die gewohnten Vorstellungen abändern kann. — Es möchte wohl auch die Nothwendigkeit der Abstraction auf den Punkt zur Vorstellung der drei Dimensionen für das empiristische Element in dieser Vorstellung sprechen.

Für die oben berührte erkenntnisstheoretische Frage ergiebt sich dem Verfasser aus seiner Untersuchung nur ein negatives Resultat, ebenso wenig ein Kriterium zur Entscheidung zwischen den drei verschiedenen Formen, welche nach dem Verfasser der Empirismus annehmen kann.

Indem ich mich zum dritten Theile des Aufsatzes, einer zusammenfassenden Theorie der Geometrie, wende, habe ich zunächst zu constatiren, dass hier eine viel speciellere Auffassung des Begriffes der mathematischen Wisse[illegible] kommt, als es in den meisten

der heutigen mathematischen Schriften geschieht. Nach dieser allgemeinen Auffassung ist Mathematik diejenige Wissenschaft, welche alle Ordnungsbeziehungen, die stetige oder discrete Mannigfaltigkeiten zulassen, entwickelt und die Kriterien untersucht, die diese Beziehungen charakterisiren; ganz unabhängig davon, welche dieser Kriterien bei einer gegebenen Mannigfaltigkeit erfüllt sind. Unter Geometrie versteht man daher jetzt in der Regel (von einzelnen inconsequenten Stellen abgesehen) etwas sehr viel Allgemeineres, als dasjenige System, welches die in unserem Raume vermöge der festen Körper gegebenen Massbeziehungen behandelt; und ebenso giebt es eine allgemeinere Arithmetik, als die gewöhnliche, deren Gegenstand die rationalen und irrationalen Zahlen sind. — Die Frage aber, welches der mathematischen Systeme im gegebenen Falle specielle Anwendung (z. B. speciell-geometrische Verwendung) zu finden hat, liegt über den Grenzen der Mathematik; genug, dass sie die Kriterien darbietet.

Was der Verfasser also von der Geometrie und, wie er bemerkt, von der Mathematik überhaupt aussagt, bezieht sich nur auf die Frage nach denjenigen Systemen, welche für specielle Mannigfaltigkeiten, wie den Raum unserer gewohnten Vorstellung oder das gewöhnliche Zahlengebiet, zur Anwendung zu gelangen haben. Auf die mathematische Wissenschaft überhaupt aber beziehen sich seine Bemerkungen nicht.

Die Theorie ist im Wesentlichen die folgende:

Der Inhalt unserer gewohnten Raumanschauung kann völlig auf eine begrenzte Zahl von Definitionen und Axiomen zurückgeführt werden, die möglichst einfache Abstractionen ihres Gebiets sind, abweichend von den übrigen Wissenschaften, in welchen die Grundbegriffe gerade die schwierigsten und letzten sind. Die Axiome sind nicht nothwendig, allgemein und unveränderlich in absolut rationalistischem Sinne; vielmehr enthalten sie Urtheile über Erfahrungsthatsachen und sind nur relativ nothwendig und allgemein insofern, als sie unsere Anschauungen überall darstellen. Auch die Constructionsbegriffe enthalten empirische Elemente, wenn auch keine neuen, als die schon in den Axiomen ausgesprochenen; sie sind aber keine blossen Abstractionen, sondern auch Modificationen des empirisch Gegebenen, ideale Bilder, deren Conception rein vollzogen werden kann. — Diese letztere Möglichkeit soll nur auf der Gleichartigkeit der Raumelemente beruhen. Wir möchten aber doch den Grund dieser Art von Vorstellungen darin finden, dass die einfachsten Gebilde, Gerade und Ebene, selbst als durch die eine oder andere Art der Construction aus den Raumelementen erhalten gedacht werden. — Endlich sind auch die Axiome der Grössengleichheit empirisch.

Ausser den Grundbegriffen ist auch die Methode für das Wesen der Geometrie charakteristisch. Die Geometrie verfährt einmal (*abgesehen von ihren Axiomen*) synthetisch, da in jedem geometrischen Lehrsatze

neue Merkmale durch Definition eingeführt und verschiedene Begriffe miteinander combinirt werden. Diese *Kant*'sche Bemerkung schliesst aber nicht aus, dass auch das Analysiren des Inhalts der gegebenen Voraussetzungen ein wesentliches Element der Entwickelungen bildet. — Was sodann die *Sicherheit* des geometrischen Fortschritts betrifft, so beruht dieselbe darauf, dass man eben schon die Axiome als allgemein giltig ansieht, somit unabhängig wird von jeder besondern Erfahrung; denn die angewandte deductive Methode giebt dann jedem Satze dieselbe relative Nothwendigkeit und Allgemeinheit, welche die elementaren Beziehungen schon besitzen. Hier aber schliessen wir uns mehr der *Schopenhauer*'schen Ansicht an, nach der durch eine solche Zurückführung wohl das „Dass", aber nicht das „Warum" eines jeden Satzes erklärt wird; denn nur das directe Zurückführen eines Satzes auf diejenigen Thatsachen der Erfahrung, aus welchen die Axiome selbst erst abgezogen sind, giebt volle Befriedigung.

Nach dieser Theorie des Verfassers stellt sich der wesentlichste Unterschied der Geometrie von den übrigen Wissenschaften dahin, dass sie ein Gebiet zu untersuchen hat, welches nach den verschiedenen Richtungen hin in sich *gleichartig* ist. Gerade dieser Unterschied trifft für die reine Mathematik selbst, deren Gebiet ein viel weiteres ist, nicht zu. Auch ist zu bemerken, dass die Voraussetzungen, welche für unsere Geometrie mit Recht als Axiome ausgelegt werden, in dem System der reinen Mathematik eine ganz andere Stellung einnehmen: sie werden hier ebenfalls zu Definitionen und sind als solche weder nothwendig, noch allgemein, sondern insoweit willkürlich, als sie sich nicht selbst widersprechen.

Wir sehen bei dieser Besprechung von vereinzelten Mängeln in der Darstellung, wie etwa auf S. 57, wo der *Riemann*'sche Ausdruck des Krümmungsmasses mit dem davon verschiedenen *Lipschitz*'schen identificirt wird etc., ab, da dieselben ohne Einfluss auf die Betrachtungen geblieben sind. Dagegen haben wir über die in dem Buche ausgeübten Kritiken noch einige Worte hinzuzufügen. Die Kritik gegen *Zöllner*'s Auffassung, nach der der Raum vier Dimensionen haben könne und weiter nothwendig positiv gekrümmt sein müsse, lässt sich durch wesentliche Argumente verstärken. Denn wie sollen in einem ebenen Raume von vier Dimensionen die mechanischen Gesetze beschaffen sein, damit in einem *Schnitte* desselben, in unserem Raume nämlich, die bekannten Principien Geltung behalten, wie die Constanz jeder Masse, das Gesetz von der Erhaltung der Kraft etc.? Kann man ja doch auch nicht solche Gesetze für diejenigen Schnitte gelten lassen, welche eine feste oder bewegliche Ebene, oder gar alle gleichberechtigten Ebenen, aus den Körpern unseres Raumes ausschneiden. Auch der Schluss *Zöllner*'s auf den unendlich grossen Druck ist schon mathematisch unhaltbar.

In der Auffassung einiger Stellen aus der Schrift von F. Klein: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", begeht der Verfasser offenbar einen Irrthum. Aus dieser Stelle wird geschlossen, dass Klein aus den neueren geometrischen Theorien (worunter seine eigene ist) gar keine philosophischen Consequenzen, auch nicht psychologische, zulasse. Aber aus dem ganzen Zusammenhange dieser Stellen geht hervor, dass Nichts weiter ausgedrückt werden soll, als was der Verfasser selbst S. 88 ausspricht: dass die philosophische Fragestellung nach dem Ursprung des Parallelenaxioms zwar durch die mathematischen Untersuchungen angeregt ist, aber mit Hilfe selbstständiger Erkenntnissprincipien erfolgen muss. Hierin liegt Nichts weiter, als eine Enthaltung des Mathematikers als solchen von einem Urtheil über mögliche philosophische Consequenzen. Auch die in dem Texte der Schrift (S. 125 flgg.) gemachten Bemerkungen werden hinfällig, wenn man beachtet, dass Klein mit „Vorstellung" offenbar den sonst „Fiction" genannten Begriff bezeichnet hat.

Erlangen, October 1877. M. Noether.

Die Bedeutung der Pangeometrie. Mit Bezug auf den Aufsatz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, von Helmholtz". Von Schmitz-Dumont. Leipzig, Koschny. 1877. 47 S.

Diese Schrift gehört zu den zahlreichen philosophischen Arbeiten, in denen, wie es in der vorhergehenden Recension erwähnt worden ist, selbst die Bedeutung der mathematischen Untersuchungen für die Bildung des Axiomensystems missverstanden wird. Der Verfasser nimmt philosophisch einen ihm eigenthümlichen Standpunkt ein, wornach der Raum nur eine Form des logischen Denkens sein soll. Hiernach löst sich für ihn der ganze Inhalt unserer Raumvorstellung in nothwendige logische Begriffe auf, ja, Sätze der Mechanik, wie der, dass eine Masse ohne äusserlich neu hinzutretendes Moment Richtung und Geschwindigkeit gleichförmig beibehält, sind für ihn nur Ausdrücke des Identitätssatzes. Ausserdem enthält die Schrift auch durchgehends die auf S. 80 der vorigen Recension angegebene Unterschiebung.

Der Verfasser kleidet seine Beweise vorzugsweise in mathematische Form, aber es charakterisirt den logischen Standpunkt des Verfassers genügend, dass er bei jedem solchen Beweise entweder für den Mathematiker unverständlich wird (wie S. 8, wo aus einer doppelten Abbildungsart eines Kreises wohl selbstverständlich zwei verschiedene Resultate erscheinen müssen), oder unmögliche mathematische Begriffe aufstellt (*wie seine* „absolut kürzeste" Linie oder seine Conception von mehr als

zwei zu einander senkrechten Linien in derselben Ebene), oder dass er Schlussfehler begeht (wie S. 14—15, wo er ein in keiner der drei Geometrien mögliches Masssystem einer in einer solchen gedachten Dreiecksmessung zu Grunde legt), oder endlich, dass er den logischen Grund der drei Dimensionen, analog dem der algebraischen Unauflösbarkeit von allgemeinen Gleichungen von höherem als viertem Grade, in mystischen Zahleneigenschaften sucht!

Erlangen, October 1877. M. Noether.

Geschichte der Astronomie von Rudolf Wolf, auf Veranlassung und mit Unterstützung Sr. Majestät des Königs von Bayern, Maximilian II., herausgegeben durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften. München 1877, bei R. Oldenbourg. XVI, 815 S.

Der uns vorliegende stattliche Band führt einen doppelten Titel. Den zweiten haben wir hier als Ueberschrift gewählt. Der auf einem ersten Blatte ihm vorausgehende heisst: Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. XVI. Band. Geschichte der Astronomie. Ein auffälligerer Widerspruch, als der zwischen den beiden Titeln lässt sich nicht wohl denken. Der allgemeine Plan, der der ganzen Reihe geschichtlicher Werke, welche durch die historische Commission in München herausgegeben werden, zu Grunde liegt, verlangt die Darstellung der Entwickelung der einzelnen Wissenschaften in Deutschland in neuerer Zeit. Herr Wolf stellte sich allgemein die Aufgabe, eine Geschichte der Astronomie zu schreiben. Die Verdienste deutscher Forscher auf dem Gebiete der Sternkunde kommen zur Geltung, aber kaum mehr, als die von Astronomen aus irgend einem andern Volke. Und ebenso wenig wie an die Schranke der Nationalität, band sich der Verfasser an die Schranke der vorgeschriebenen Zeit. So weit eine beglaubigte Geschichte der Astronomie möglich ist, greift Herr Wolf zurück und lässt in einem fast 14 Bogen starken ersten Buche: die Astronomie der ältesten Völker an dem Leser vorüberziehen, bevor er in einem zweiten Buche gleichen Umfanges zu der Reformation der Sternkunde, in einem dritten erst zur neueren Astronomie gelangt. Wenn wir diesen Widerspruch hervorheben, so geht unsere Absicht durchaus nicht dahin, dem gelehrten Verfasser einen Vorwurf daraus zu machen, dass er die Aufgabe anders begriff und anders löste, als sie ihm von aussen gestellt war. Wir betonen nur mit Genugthuung, dass in diesem Abweichen von dem vorgesteckten Ziele eine Uebereinstimmung mit den Ansichten sich kundgiebt, welche wir vor

zwölf Jahren bei der Anzeige von *Quételet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Zeitschr. Math. Phys. XI, Literaturzeitung S. 29) dahin ausführten, es sei nicht möglich, eine Geschichte der Mathematik in Italien, in Belgien, in Deutschland zu schreiben. Zwischen der Geschichte der Astronomie und der der Mathematik findet aber der engste Zusammenhang statt, so dass kaum ein Name in der ersten zur Geltung gelangt, der nicht auch der zweiten angehört, so dass also auch die gleichen Einflüsse und Abhängigkeiten in der einen, wie in der andern zu Tage treten. Diese Gemeinsamkeit ist es auch, welche uns gestattet, ein Urtheil über eine Geschichte der Astronomie öffentlich auszusprechen, während wir einem theoretisch oder gar einem praktisch astronomischen Werke gegenüber es nicht wagen würden, unsere Laienstimme zu erheben.

Mit dem Urtheil über ein so umfassend angelegtes und zugleich tausend Einzelheiten in sich schliessendes Werk ist es eine eigenthümliche Sache. Man würde offenbar dem Verfasser zu nahe treten, wenn man Quételet's Wort: „eine Stecknadel in einem Bunde Heu aufsuchen zu wollen", auf sein Werk anwendete und jede kleine im Texte oder in den Anmerkungen zerstreute Notiz sorgsam prüfte, ob nicht ein Irrthum unterlaufen ist. Keinen Irrthum zu begehen, ist kaum der sicher, der nur solche Dinge aufnimmt, welche in allen Geschichtswerken gleichmässig berichtet werden. Wer dagegen überall, wo es ihm möglich ist, auf die Quellen selbst zurückgeht, wem die eigene Auffassung, auf gründlichem Studium beruhend und mit fremden Meinungsäusserungen verglichen, das Vorrecht vor altüberkommenen Berichten besitzt, der wird um so gewisser da und dort eines kleinen Missverständnisses, einer kleinen Uebereilungssünde sich schuldig machen, aber dessen Schriften werden auch den Leser mit dem Bewusstsein erfüllen, Neues gelernt zu haben und darunter unverhältnissmässig mehr Richtiges, als die kleinen unvermeidlichen Mängel betragen. Ein solcher Forscher, wie wir ihn hier schilderten, ist aber Rudolf Wolf. Wir wissen kaum, was wir mehr an ihm bewundern sollen, ob die Geistesarbeit, mit welcher er die Werke der grossen Astronomen aller Zeiten in sich aufzunehmen und dem modernen Leser mundgerecht zu machen wusste, oder die Sammelthätigkeit, welche Einzelschriften über hervorragende Männer oder besonders denkwürdige Ereignisse aufspürte, von deren Vorhandensein kaum Antiquariatskataloge eines Friedländer & Sohn oder eines Gauthier-Villars Kunde geben. Wenn Herr Wolf den unglaublichen Reichthum an biographischen und literarischen Nachweisungen in Poggendorff's Handwörterbuche rühmt, welches er unendlich oft benutzen konnte, so ist Referent mit der Werthschätzung jenes zweibändigen, gegenwärtig jedem Geschichtsforscher auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften unentbehrlichen Hilfswerkes völlig einverstanden; aber die Gerechtigkeit verlangt,

dass man hinzufüge: **Poggendorff's** Handwörterbuch lässt an häufigen Stellen durch **Wolf's** Geschichte der Astronomie sich ergänzen.

Dass Herr **Wolf** bei so unabhängigen und ins Kleinste eindringenden Forschungen nicht selten von hergebrachten Erzählungen sich entfernt, dass er dabei auf manche gelegentliche Polemik sich einzulassen genöthigt ist, kann nicht verwundern. Wir möchten dieselbe sogar in eine doppelte Art von Polemik unterscheiden, in eine solche, wo er fast mehr gegen die Verfasser von anspruchsvoll auftretenden, aber keinerlei Ansprüche befriedigenden Schriften mit Namensnennung zu Felde zieht, und in eine solche, wo es ihm nur um den Gegenstand der Controverse zu thun ist. In letzterer Beziehung fühlten wir selbst an einzelnen Stellen uns getroffen, ohne dass Herr **Wolf** unseren Namen dabei genannt hätte, während wir gewiss keinen Grund haben, mit der Art, in welcher wir an anderen Orten von ihm genannt wurden, unzufrieden zu sein. Wir würden auch da, wo Herr **Wolf** als unser Gegner oder, wie wir gern gestehen, theilweise als unser Berichtiger auftritt, gegen eine offene Polemik Nichts einzuwenden gewusst haben, so liebenswürdig ist die gewählte Form. Von etwas derberer Natur sind die Schläge, welche Herr **Wolf** jenen Personen angedeihen lässt, die er zu diesem Zwecke besonders nennt. Er mag ja in der Auswahl dieser Prügelknaben mit einer einzigen Ausnahme richtig getroffen haben, allein wir wünschten doch einen etwas unnachsichtigeren Rothstift gegen gewisse Ausdrücke angewandt, deren Naturwüchsigkeit ihrer Salonfähigkeit im Wege steht. Wenn wir eine Ausnahme noch besonders erwähnten, so meinen wir Seite 445 und 468, wo Herr **Wolf** von einem nach unserer festen Ueberzeugung ungerechtfertigten Verdachte gegen einen Gelehrten beeinflusst erscheint, der uns als Forscher, wie als Ehrenmann gleich hoch steht und dessen Wahrhaftigkeit da gewiss nicht angezweifelt werden kann, wo er sich einer Leichtgläubigkeit schuldig bekennt, welche ihm den Spott der Welt und den Verlust einer einem kleinen Vermögen gleichkommenden Summe eintrug.

Unsere bisherigen Bemerkungen konnten möglicherweise den Eindruck hervorbringen, als sei das von uns besprochene Werk vorwiegend als Detailarbeit schätzenswerth. Wir wollen nicht verhehlen, dass in der That das Neue, welches uns darin begegnete, weniger in grossen bahnbrechenden geschichtlichen Gedanken, als in einer Fülle von kleineren, wenn auch mitunter Nichts weniger als unbedeutenden Entdeckungen besteht. Aber damit soll keineswegs gesagt sein, die Geschichte der Astronomie trete nicht genugsam in grossen Zügen hervor. Die reiche Verzierung jedes einzelnen Gliedes der Kette verhindert keineswegs, dass es als Kettenglied erkannt werde. Man lese nur die einem **Ptolemäus**, einem **Copernicus**, einem **Kepler**, einem **Laplace** gewidmeten Auseinandersetzungen und [illegible] die Bilder dieser grossen Männer

deutlich hervortreten sehen, man wird nicht einen Augenblick in Zweifel darüber sein, was ein Jeder derselben für die Entwickelung der Sternkunde geleistet hat. Eines vielleicht möchte man vermissen: eine übersichtliche synchronistische Zusammenstellung der Kenntnisse, welche zu verschiedenen Zeiten allgemein verbreitet waren. Wie dachte man über den gestirnten Himmel etwa in den Jahren 300 v. Chr., 1400, 1500, 1650? um nur einige Hauptepochen zu bezeichnen. Diese Frage stellt sich gewiss mancher Leser, der in einem Zuge das Wolf'sche Buch durchliest und sich nicht etwa begnügt, mit Hilfe des musterhaft genauen Inhaltsverzeichnisses über ihm besonders wichtige Dinge Bescheid zu suchen. Diese Frage wird ihm aber nicht beantwortet. Wir wissen wohl, dass die Beantwortung an Schwierigkeit ihres Gleichen sucht. Ohne allzu merkliche Wiederholung von bereits im Detail Gesagtem in kürzester Form auf wenigen Seiten ein hinreichend deutliches Bild des geistigen Zustandes einer längst verstorbenen Zeitgenossenschaft zu entwerfen, das ist keine Aufgabe, die ein jeder Schriftsteller lösen könnte. Dass wir Herrn Wolf sie stellen, mag ihm und unseren Lesern den Beweis liefern, welchen Anforderungen wir ihn gewachsen glauben.

Cantor.

Das Mathematische im Talmud. Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhaltes von Dr. B. Zuckermann. Beilage zum Jahresbericht des jüdisch-theologischen Seminars „Fränckel'scher Stiftung". Breslau 1878. 64 S.

Herr Zuckermann hat sich durch Veröffentlichung dieses Programms entschiedene Verdienste erworben. Die vergleichende Geschichte der Mathematik, wie sie insbesondere für ältere und älteste Zeiten zur Erkenntniss culturhistorischer Zusammenhänge allein verwerthbar ist, bedarf der Vorarbeiten, die Demjenigen unmöglich zugemuthet werden können, der auf die Vergleichung selbst hinreichend anstrengende und zeitraubende Thätigkeit zu verwenden hat. Zu diesen wesentlich sammelnden Vorarbeiten sind nur wenig zahlreiche Forscher befähigt, denen die Sprache der abzusuchenden Werke gleich geläufig sein muss, wie der Gegenstand, dem sie nachspüren wollen. Herr Zuckermann scheint zu diesen berechtigten und berufenen Arbeitern zu gehören. Seine Stellung an der Fränckel'schen Stiftung dient uns zum Beweise, dass die Sprache des Talmuds für ihn keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bietet, und der Besitz der mathematischen Kenntnisse, welche gefordert werden müssen, erweist der Verfasser in seiner Abhandlung selbst. Die mathematischen Kenntnisse, welche zur Erläuterung der hier behandelten Talmudstellen erforderlich erscheinen, liegen übrigens recht eng bei einander. In der That kommt es in fast allen von Herrn Zuckermann erläuterten Streit-

fragen nur auf Dreierlei an: auf den Werth von $\sqrt{2}$, auf die Fläche des Kreises, auf den Kreisumfang.

Für $\sqrt{2}$ müssen in aufeinander folgenden Zeiträumen verschiedene Näherungswerthe üblich gewesen sein. Die älteste Mischna Oholot nahm $\sqrt{2}=\frac{4}{3}$, die spätere Mischna Erubin $\sqrt{2}=1\frac{3}{7}\frac{1}{5}$ an mit dem Bewusstsein, dieser Werth sei ein wenig zu klein, was sich aber nicht näher bestimmen lasse; dem noch späteren Talmud genügte $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ (S. 11). Auf diesen letzteren Werth hat auch schon S. Günther (Vermischte Untersuchungen zur Gesch. d. math. Wissensch. Leipzig 1876. S. 304 Note **) aufmerksam gemacht. Wir benützen die Gelegenheit, hier eine Bemerkung zu veröffentlichen, welche auf das Vorkommen desselben Näherungswerthes bei Griechen sich bezieht und zu welcher wir vor etwa einem Jahre gelangten. Die erste beweisende Stelle fanden wir bei Proklos (Commentar zu Euklid *edit.* Friedlein *pag.* 427 *lin.* 1—24), wo es heisst: *οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος, εἰ μὴ λέγοι τις τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ $\bar{\zeta}$ τοῦ ἀπὸ τοῦ $\bar{\varepsilon}$ διπλάσιός ἐστιν $\bar{\alpha}$ δέοντος.* Nicht mit gleicher objectiver Bestimmtheit, aber persönlich von der Richtigkeit unserer neuen Auffassung überzeugt, weisen wir auf Heron von Alexandrien (*edit.* Hultsch *pag.* 212 *lin.* 29—30) hin. Wir haben die gleiche Stelle in Anmerkung 75 unserer „Agrimensoren" bereits hervorgehoben, damals aber noch nicht verstanden. Es handelt sich um die Auffindung der Hypotenuse 50 des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 30 und 40, und diese Auffindung lehrt Heron ausser durch $50=\sqrt{30^2+40^2}$ auch folgendermassen: *σύνθες τὰς β′ πλευρὰς τὰ λ′ καὶ τὰ μ′. γίνονται ο′. ταῦτα ἐπὶ ε′ τν′. τούτων τὸ ζ″ ν′.* D. h. $50=(30+40).5.\frac{1}{7}$. Der Sinn dieser Rechnung scheint uns nun der zu sein, dass da bei Gleichheit der beiden Katheten die Hypotenuse durch Vervielfältigung der Kathete mit $\sqrt{2}$ gefunden wurde, bei Ungleichheit der Katheten ihr arithmetisches Mittel mit derselben $\sqrt{2}$ vervielfältigt werden oder ihre Summe durch $\sqrt{2}$ getheilt werden soll, was wegen $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ in Gestalt einer Multiplication der Summe der beiden Katheten mit $\frac{5}{7}$ ausgerechnet wird.

Die zwei auf den Kreis bezüglichen Regeln werden zwar jede für sich in scheinbar von einander ganz unabhängiger Weise aufgestellt, sagen aber im Grunde genau das Gleiche. Die Richter in Caesarea, so erzählt der babylonische Talmud sowohl Erubin 76*b*, als Succa 8*a*, *b*, besassen den zur Schlichtung von Streitigkeiten benutzten Satz: „Der Kreis im Quadrat ist ein Viertel, das Quadrat im Kreise ist die Hälfte." Zu grosse Klarheit wird Niemand diesem Satze vorwerfen; im Gegentheil wird man es wohl begreiflich finden, dass im Laufe der Zeiten der Sinn mehr als einmal verloren ging und aus dem annähernd wahren Satze die verkehrtesten Folgerungen gezogen wurden.

dass, wie die zweite Hälfte des Satzes zu verstehen giebt, das einem Kreise eingeschriebene Quadrat genau die Hälfte des demselben Kreise umschriebenen Quadrates bildet, während der ersten Hälfte des Satzes zufolge der Kreis selbst um ein Viertel weniger Fläche einnimmt, als das ihm umschriebene Quadrat. Ueber diesen mit dem Wortlaute nicht ganz übereinstimmenden Sinn lassen aber Commentare und Anwendungen keinen Zweifel zu. Die Fläche des dem Kreise umschriebenen Quadrates ist $4r^2$, und wird diese um ein Viertel verringert, so bleibt für die Kreisfläche $3r^2$, mithin $\pi = 3$. Wieder der babylonische Talmud spricht nun auch den zweiten Satz aus: „Alles, was im Umfange 3 Handbreiten hat, ist 1 Hand breit" und damit ist das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser oder $\pi = 3$ wiederholt festgestellt, wenn auch, wie wir schon sagten, der Zusammenhang beider Vorschriften auf den ersten Blick nicht einleuchtet. Den Talmudisten selbst muss wohl, wie bei dem damaligen Zustande griechischer Wissenschaft und dem griechisch-palästinischen Verkehre einleuchtet, das Vorhandensein eines genaueren Werthes für π nicht fremd gewesen sein. Darauf deutet die Frage jenes neugierigen Anonymus (Erubin $14a$): Woher leitet man den Satz ab, dass dem Durchmesser 1 der Umfang 3 entspreche? Er erhält zur Antwort: 1. Könige VII, 23. Anknüpfend an dieselbe Stelle, welche die Gestalt des sogenannten ehernen Meeres betrifft, welches 10 Ellen von einem Rande zum andern mass, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Mass rings herum, haben wir früher einmal (Zeitschr. Math. Phys. XX, histor.-literar. Abth. S. 163—165) versucht, die gleiche Frage des: „Woher $\pi = 3$?" zu erörtern und sind zur Wahrscheinlichkeit gelangt, diese Annahme sei altorientalisch, muthmasslich babylonisch. Wir haben dafür auf das Auftreten dieses Näherungswerthes in China, in Griechenland hinweisen dürfen; wir haben später (Zeitschr. Math. Phys. XXII, histor.-literar. Abth. S. 17) den gleichen Werth bei Indern auftreten sehen, was unsere Meinung noch bestärkt. Da wir an dem erst angegebenen Orte (Bd. XX dieser Zeitschrift) uns, wie wir durch briefliche Anfragen erst vor Kurzem erfahren haben, über die eine Art von Anwendung des Werthes $\pi = 3$ nicht mit hinlänglicher Deutlichkeit ausgedrückt haben, so sei gestattet, hier darauf zurückzukommen. Aus den Abmessungen des ehernen Meeres, zusammengehalten mit den 2000 Bath, welche hineingegangen sein sollen, zogen wir damals den Schluss, den Verfertigern des ehernen Meeres habe die Formel $\frac{4}{3}\pi r^3$ für den Kugelinhalt unter Annahme von $\pi = 3$ gedient. Wir meinten natürlich nicht, dass jene Formel als solche bekannt war; sie war es so wenig, wie die $2\pi r$ für den Kreisumfang, wie πr^2 für die Kreisfläche! Aber wir meinten, man habe den Kugelinhalt berechnet als $4r^3$ oder, was vielleicht noch deutlicher ist, als $\frac{1}{2}.(2r)^3$. Mit anderen Worten: Der Kreisumfang galt für das Dreifache des Durchmessers, die Kreisfläche für drei Viertel des

umschriebenen Quadrates, der Kugelinhalt für die Hälfte des umschriebenen Würfels, lauter scheinbar verschiedene Regeln, zusammenhängend aber und sogar richtig, sofern $\pi = 3$ wäre. Ob freilich jene Behauptung, die wir für den Kugelinhalt aussprachen, als der Wissenschaft gesichert hingestellt werden kann, ist zweifelhaft geworden. Wir hatten als Ausgangspunkt die metrologischen Annahmen gewählt, welche J. Oppert in seinem *Étalon des mesures Assyriennes* ableitete. Diese Annahmen selbst sind inzwischen durch R. Lepsius (Die babylonisch-assyrischen Längenmaasse nach der Tafel von Senkereh. Aus den Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1877) angefochten worden. Der Streit spann sich in den Monatsberichten der Berliner Akademie für December 1877 und Februar 1878 weiter und ist bis zur Druckbeförderung dieser Zeilen als abgeschlossen noch keineswegs zu betrachten. Bei diesem Streite dreht es sich schliesslich um die Bedeutung einzelner Keilschriftzeichen und um thatsächliche Abmessungen, welche genügen, wenigstens ein Grundmass über jeden Zweifel zu erheben. Weder in der einen, noch in der andern Beziehung competent oder im Besitze des erforderlichen reichhaltigen Materials, müssen wir in dieser Polemik die Person eines zwar nicht interesselosen, aber der Entscheidung nicht fähigen Zuhörers bilden, abwartend, bis das letzte Wort von jeder Seite gesprochen sein wird. Vielleicht würde Herr Zuckermann, der in seinem mir allerdings nicht zu Gesicht gekommenen Buche „Das jüdische Masssystem" (Breslau 1867) genöthigt war, wenigstens auf die jüdischen Längen- und Hohlmaasse näher einzugehen, Mancherlei zur Unterstützung einer der beiden Meinungen beibringen können.

Unter den Streitfragen der Talmudisten selbst, bei denen mathematische Dinge, also im Wesentlichen die genannten Zahlenwerthe zur Rede kommen, wollen wir nur eine einzige hervorheben, weil bei ihr ein grösster Werth vorkommt. Im Pentateuch (3. Mose XIX, 19) heisst es: Du sollst dein Feld nicht besäen mit mancherlei Samen. Die Schriftgelehrten suchten nun Vorschriften zu bilden, nach welchen verschiedenartige Pflanzungen unter Verwerthung eines grösstmöglichen Feldstückes und unter Festhaltung der Satzung, dass das Verschiedenartige nur an einzelnen Punkten, nie an Linien zusammentreffen dürfe, vorgenommen werden können. Aus dem quadratischen Felde von der Seitenlänge l lässt man zu diesem Zwecke vier Eckquadratchen von der Seitenlänge x frei und bepflanzt die zwischen denselben sich ergebenden Rechtecke am Rande des Feldes mit je einer Samengattung. In das bis jetzt noch freie innere Quadrat beschreibt man ein anderes von halber Grösse, welches seine Ecken in den Mitten der vier Randrechtecke besitzt, und besät dieses mit einer fünften Samengattung. Das besäte Feld soll nun ein Maximum werden. Da x die Höhe, $l-2x$ die Bas

rechteckes bezeichnet, da ausserdem $l-2x$ die Seite des inneren Quadrates bildet, in welches die fünfte Samengattung in selbst quadratischer Form eingesät werden soll, so ist die Function, welche zu einem Maximum werden soll,

$$f(x)=4(l-2x).x+\tfrac{1}{2}(l-2x)^2=\frac{l^2}{2}+2lx-6x^2.$$

Demnach ist $f'(x)=-12x+2l$, $f''(x)=-12$. Ein Maximum entsteht also bei $x=\frac{l}{6}$, woraus die Construction leicht folgt. Genau eben diese Construction lehrte aber Maimonides (1135—1204). Freilich giebt er keinerlei Auskunft darüber, wie er zu seiner Construction gekommen sei und welchen Zweck er dabei im Auge habe. Vielleicht mochten ihm gewisse elementare Betrachtungen des relativen Werthes dieser und anderer Zerfällungen des ursprünglichen Feldes in Beete dienen, wie sie auch Herr Zuckermann S. 15—16 benutzt.

Cantor.

Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert von Prof. Dr. S. Günther. Programm zur Schlussfeier des Jahres 1876—77 an der königl. Studienanstalt zu Ansbach.

Seit Euklid die erste uns erhaltene Parallelentheorie auf eine Forderung stützte, welche bei jedem Leser den Zweifel wach rufen musste, ob denn diese Forderung auch zu erfüllen sei, sind mehr als zwei Jahrtausende verflossen. Jener Zweifel, den wir als naturgemäss bezeichneten, liess nicht lange auf sich warten. Schon Claudius Ptolemäus, der grosse alexandrinische Astronom, schrieb eine besondere Schrift über das sogenannte elfte Axiom, welche uns allerdings verloren gegangen ist, deren Hauptinhalt aber von Proklus in seinem Commentar zu den euklidischen Elementen aufbewahrt wurde. Das einmal gegebene Beispiel fand Nachahmung zu den verschiedensten Zeiten, und wenn wir nur auf das XIX. Jahrhundert uns beschränken wollten, so wäre es eine zum Erschrecken stattliche Anzahl von Versuchen, die Parallelenlehre auf festem Grunde aufzubauen, welche uns begegnen würde. Herr Günther hat aus den vielen sogenannten Beweisen des elften Axioms einen hervorgehoben, der es nach mancherlei Richtung verdiente, geschichtlich verfolgt und mit prüfendem Blicke nach seinen Schwächen untersucht zu werden. Es ist das der Beweis, den Thibaut seit dem Anfange unseres Jahrhunderts in seinen von Hunderten von Zuhörern besuchten Vorlesungen lehrte und in seinem „Grundrisse der reinen Mathematik" niedergelegt hat, jener Beweis, welcher zunächst die Winkelsumme des Dreiecks zu zwei Rechten vermöge einer in drei Acten mit zwischen*liegender Translation* vollzogenen vollen Rotation begründet und von

dieser Winkelsumme aus die Eigenschaften der durch eine Transversale und zwei Parallelen hervorgebrachten Winkel ableitet. Der Verfasser des uns vorliegenden Schulprogramms hat mit bekannter Belesenheit die Spuren dieses Thibaut'schen Beweises bis auf die Gegenwart zu verfolgen gewusst, hat überdies aufmerksam darauf gemacht, welche Zweifel auch ihm sich gegenüberstellen. Wir heben nur zwei von diesen Bedenken heraus. Unterscheidet man, wie neuere Geometrie es zu thun liebt, zwei Seiten einer Geraden etwa als untere und obere Seite, so schliesst sich bei vollzogener voller Umdrehung die obere an die untere Seite der gedrehten Geraden an, und es setzt demnach der Beweis auch die Behauptung als richtig voraus, dass zwei Gerade zusammenfallen, wie sie auch mit Festhaltung zweier Punkte aneinander gelegt werden. Das andere Bedenken geht dahin, ob es statthaft sei, die Zwischenschiebung fortschreitender Bewegung zwischen drehende Bewegungen vorzunehmen, ohne den Satz der Bewegungslehre vorauszuschicken, dass solche Einschiebung erlaubt sei, ein Satz, der selbst wieder zu seinem Beweise die Lehre von den Parallelen, genauer vom Parallelogramm, erfordert.

Cantor.

Philipp Reis, der Erfinder des Telephon, von Prof. Dr. Schenk, Vorsteher der Garnier'schen Unterrichts- und Erziehungsanstalt zu Friedrichsdorf. Frankfurt a. M. 1878, bei Joh. Alt. 16 S. mit 9 Holzschnitten. Der Ertrag der Broschüre ist für die Hinterlassenen des Erfinders bestimmt.

Wir möchten dieses kleine Schriftchen recht sehr empfohlen haben. Es enthält in einfach-warmer Sprache die Lebensgeschichte des Erfinders jenes Apparates, der, zuerst 15 Jahre lang fast nur Physikern von Fach bekannt, plötzlich das Interesse aller Gebildeten und Ungebildeten in einem Grade auf sich zog, wie kaum je eine andere Erfindung. Und doch hatte Philipp Reis das Telephon in seinen Hauptbestandtheilen bereits fertig. Einen bedeutsamen Unterschied erkennt man höchstens in der jetzigen Benutzung eines Metallblättchens, wo bei Reis eine thierische Membran sich fand. Wie sehr Reis des theoretischen Grundes und der zu erhoffenden praktischen Tragweite seines Telephons sich bewusst war, erkennt man aus seiner Originalmittheilung von 1861, welche Prof. Schenk in sehr richtigem Gefühle hier auf's Neue abdrucken liess.

Cantor.

Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene. Inaugural-Dissertation von Benno Klein.

Von den Gebilden zweiter Ordnung als Erzeugnissen zweier geraden projectivischen Punktreihen ist ein Fortschreiten zu den Gebilden dritter

Ordnung entweder als Erzeugniss einer geraden Punktreihe und einer zu ihr projectivischen geraden Involution, oder als Erzeugniss einer geraden und einer zu ihr projectivischen krummen Punktreihe (zweiter Ordnung) möglich. Von der ersteren Erzeugungsart ausgehend, behandelt Weyr die Curven dritter Classe und Regelflächen dritter Ordnung in den beiden Werken: „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde“ und „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde“; von der zweiten Erzeugungsart aus hat Schroeter in der Abhandlung: „Erzeugnisse krumm-projectivischer Gebilde“, Crelle's Journal Bd. 54, die Curven dritter Classe untersucht. Die vorliegende Dissertation führt diese Untersuchung für den Fall weiter, dass die Träger der beiden Punktreihen, die Gerade e und der Kegelschnitt $\varkappa^2$, nicht in derselben Ebene liegen; sie zeigt zunächst, dass das Erzeugniss dieser Punktreihen eine Regelfläche dritter Ordnung mit einer Doppellinie d ist, dem Orte der Schnittpunkte von Erzeugenden der Fläche. Die windschiefen Geraden e und d sind die einfache und die doppelte Leitlinie der Regelfläche. Diese Regelfläche lässt sich auch durch eine Gerade erzeugen, welche an einer Curve zweiter Ordnung und zwei windschiefen Geraden gleitet, von denen die eine mit der Curve einen Punkt gemein hat; sie lässt sich auch als Erzeugniss eines Ebenenbüschels zweiter Ordnung und eines projectivischen Ebenenbüschels erster Ordnung auffassen, dessen Axe nicht durch den Mittelpunkt des ersteren geht und in keiner Ebene desselben liegt, woraus dann folgt, dass sie auch durch eine Gerade erzeugt wird, welche auf zwei windschiefen Geraden und einer Kegelfläche zweiter Ordnung gleitet, die von einer der beiden Geraden berührt wird. Dann wird die Classe der Fläche bestimmt; die auf ihr liegenden Curven und ihre Berührungsebenen werden untersucht: die gefundenen Resultate lösen einige Aufgaben, welche Reye der zweiten Auflage seiner Geometrie der Lage beigefügt hat; vergl. Reye, Geometrie der Lage, S. 178—181. Aus den beiden mitgetheilten reciproken Erzeugungsarten der Fläche durch die projectivischen Punktreihen e und $\varkappa^2$ oder durch die projectivischen Ebenenbüschel erster und zweiter Ordnung d und A folgt: Wenn die Punktreihen $\varkappa^2$ und e als zu einem Raume Σ, die Büschel A und d als zu einem andern Raume Σ_1 gehörend betrachtet werden, so sind die Räume Σ und Σ_1 durch die Regelfläche reciprok auf einander bezogen in der Art, dass sie zusammen ein Nullsystem bilden, in welchem den Punktreihen $\varkappa^2$ und e die Büschel A und d zugeordnet sind. Aus dem ersten Absatze des § 6 kann unmittelbar gefolgert werden — was nicht ausdrücklich geschehen ist —, dass die Regelflächen auch erzeugt werden durch eine Punktreihe auf der doppelten Leitlinie d und eine zu ihr projectivische Involution auf der einfachen Leitlinie e. Die ursprünglich gegebene Curve $\varkappa^2$ kann durch *irgend eine* andere Curve zweiter Ordnung λ^2, welche auf der Regelfläche

liegt, ersetzt werden (§ 3); alle auf dieser liegenden Curven zweiter Ordnung werden von zwei durch c gehenden Ebenen, den Cuspidalebenen, berührt; sämmtliche Berührungspunkte liegen auf zwei Geraden, den singulären Erzeugenden, deren Schnittpunkte mit d die Cuspidalpunkte sind.

Der zweite, umfangreichere Theil der Arbeit (S. 18—57) bringt die Abbildung der Fläche auf einer Ebene und behandelt mit ihrer Hilfe die Geometrie auf der Fläche. Die Abbildung, zu welcher schon Clebsch, Reye und Cremona gelangt sind, projicirt jeden Punkt der Fläche durch diejenige Gerade, welche durch diesen Punkt gelegt ist und zwei feste windschiefe Erzeugende a und b schneidet, auf die Bildebene ε; diese ist durch die doppelte Leitlinie d gelegt und enthält weder a, noch b. Es werden die Bilder der Erzeugenden, Leitlinien und Curven der Fläche bestimmt; jedem durch die Fläche bestimmten Nullsystem entspricht in der Bildebene ein Polarsystem (§ 9). Die letzten Paragraphen beschäftigen sich mit den Curven, in denen die Regelfläche dritter Ordnung von anderen algebraischen Flächen geschnitten wird, mit den Berührungscurven und den Haupttangentencurven.

Der dritte Theil (S. 58 – 61) behandelt noch den speciellen Fall, dass die projectivischen Gebilde c und $\varkappa^2$ einen Punkt gemein haben; das Erzeugniss derselben ist in diesem Falle eine Regelfläche dritter Ordnung mit einer Doppellinie.

Aus der Inhaltsangabe ergiebt sich, dass das Schriftchen von einem neuen Ausgangspunkte an die Haupteigenschaften der Regelflächen dritter Ordnung entwickelt. Es wird Demjenigen, der sich für den behandelten Gegenstand interessirt, eine angenehme Lecture sein. Milinowski.

Hilfstafeln für barometrische Höhenmessungen, berechnet und herausgegeben von Ludwig Neumeyer, Premierlieutenant und Sectionschef im topographischen Bureau des königl. bayrischen Generalstabes. München, R. Oldenbourg. 1877. gr. 8⁰. X, 194 S.

Die Haupttabelle ist in der Art berechnet, wie ältere Hilfstafeln, indem als erstes Argument das arithmetische Mittel, als zweites Argument der Unterschied der auf 0^0 reducirten Barometerstände dient. Die Tabelle lässt (unter Voraussetzung von 0^0 Lufttemperatur) Höhenunterschiede in Meter finden, welche Druckunterschieden von 0,1 bis $24,9^{mm}$ bei der halben Barometerstandssumme 600,5 bis $779,5^{mm}$ (nach ganzen Millimetern fortschreitend) entsprechen. In der sehr kurz und nicht ganz präcis gehaltenen Erläuterung (drei splendid gedruckte Seiten und eine vierte für ein Beispiel) wird Berechnungsweise und Gebrauchsweise der Tafel angegeben, nicht aber erwähnt, welcher Werth der Constanten benützt

wurde. Nachrechnend findet man, dass dieser 18403 war. Bauernfeind und Rühlmann geben die Zahlen 18404,9 und 18429,1 an für die geographische Breite 45°, woraus sich für die Breite von München, dem Ausgabeorte der Tafeln (48°) oder für die Breite (50°) von Mitteldeutschland 18381,5 und 18378,2 oder 18405,7 und 18402,4 berechnen. Durch die Correcturglieder wegen Feuchtigkeit und mittlerer Meereshöhe werden diese Zahlen nicht unbeträchtlich grösser.

Gegen die unbestrittene Regel, in Tafeln keine überflüssigen Zahlen zu schreiben, verstösst das Buch bedeutend. Das zweite Argument schreitet nach Zehnteln fort, welche der Verfasser aber als Hundertel schreibt, was auf jeder Seite 10, im Ganzen 1800 überflüssige Nullzeichen einführt. Auch das erste Argument enthält eine zweite Decimalstelle, die stets Null ist — macht weiteren Ueberfluss von 180 fettgedruckten Nullen. Wären als Argument ganzzahlige Millimeter genommen statt der ungeradzahligen halben Millimeter, so wären abermals 180 fettgedruckte Ziffern erspart worden und zugleich, insofern man leichter auf ganze als auf halbe Millimeter rechnet, die Interpolation bequemer geworden. Der einem Millimeter Druckdifferenz entsprechende Höhenunterschied steht nicht nur in der Tabelle, sondern fett gedruckt nochmals fünfstellig in der Ueberschrift — Verschwendung von 900 Ziffern und 180 Kommata, nebst ebensovielen Punkten und Gleichheitszeichen. Diese Gleichheitszeichen haben eine von der gewöhnlichen abweichende Bedeutung und wären, wie unter ähnlichen Verhältnissen in Logarithmentafeln üblich, besser durch einen Stern ersetzt, denn es hat etwas mathematisch Verletzendes, die Unwahrheit 643,50 = 12,420 zu lesen.

Der Umfang der Tafeln scheint viel zu gross. Einmal haben Centimeter für barometrisch bestimmte Höhenunterschiede keine ernsthafte Bedeutung, die Weglassung der zweiten Decimale hätte eine Ersparung von 54360 Ziffern ermöglicht. Zum Andern ist zu bemerken: Es ist kaum möglich, dass das Mittel der in Höhenmessungen (Tiefenmessungen in Gruben eingeschlossen) vorkommenden (auf 0° reducirten) Barometerstände 779,5 erreicht; damit es aber auf 600,5 herabsinke, müssen die Messungen in Höhen über 2000 Meter gemacht werden, über der Schneegrenze Deutschlands und der sie umgebenden Länder. Das Bedürfniss und damit die Berechtigung einer Tafel besteht nur, wenn ein häufiger Gebrauch derselben vorkommt. Nimmt man an, ausgedehnte (Tafeln wünschenswerth machende) barometrische Höhenmessungen kämen in Deutschland von Gruben, die noch etwas unter das Meeresniveau reichen, bis zu einer Seehöhe von 1000 Metern vor, so genügte gerade die Hälfte des Umfanges der Tafeln, 103320 Ziffern, sehr viele Komma, Buchstaben blieben erspart.

Die Ansichten über zweckmässige Ausführlichkeit von H
verschieden. Der Berichterstatter benützt die Gelegenheit,

den vorliegenden Tafeln zu exemplificiren. Darnach könnte der wesentliche Inhalt der fraglichen Tabelle, unter Beibehaltung des als zu gross erkannten Umfangs (600—779) auf $\frac{1}{65}$ der Druckfläche bei gleicher Zifferngrösse gegeben werden. Nämlich statt auf einer Seite das 0,1- bis 24,9fache einer Zahl zu geben, genügt es, das 1- bis 9fache dieser Zahl in einer Zeile zu geben. Die Zeile beansprucht (mit Vorsetzung des Arguments) 300 Quadratmillimeter, eine Seite der vorliegenden Tafel aber hat (abgesehen von Ueberschrift u. s. w.) innerhalb des Rahmens 19656 Quadratmillimeter Druckfläche. Die ganze Tafel liesse sich auf 6 Seiten klein Octav (mit sehr breitem Rande), statt auf 180 Seiten gross Octav bringen, und bei Abkürzung der Tafel auf den halben Umfang liesse sich auf 2 Seiten gross Octav Alles zusammendrängen — stets die gleiche Zifferngrösse beibehaltend. Diese ausserordentliche Ersparung von Papier, von 165246 Ziffern, 6384 Buchstaben, Komma und Punkte, wird erkauft mit der Mühe, statt eine Zahl auf einer Seite zu suchen, deren drei in derselben Zeile stehende aufzuschlagen und zu addiren. Die abgekürzten Tafeln verlangten nur, einen vierten Addenden aus derselben Zeile zu nehmen, wenn der Barometerstandsunterschied nach Hundertelmillimetern in Rechnung gezogen werden soll — die ausführlichen Tafeln nöthigen zu einer Interpolation, zu deren Erleichterung Nebentafeln mit Differenzen und Proportionaltheilungen gegeben sind, die bei den gekürzten Tafeln entbehrlich sind. Noch mehr: Die ausführlichen Tafeln reichen nur bis zu einem Druckunterschiede von $24{,}9^{mm}$ und fordern für grössern Unterschied Theilung und Zusammenstellung — die abgekürzten Tafeln leiden nicht unter dieser Beschränkung.

Die zweite Tabelle giebt die Verbesserungen, welche an den unter der Voraussetzung von 0^0 Lufttemperatur berechneten Ergebnisse anzubringen sind, nämlich $\frac{1}{500}$ dieser Nullhöhe mal der Summe der nach Celsiusgraden an den Endstationen gemessenen Temperaturen. Das eine Argument der Tafel bildet die Temperaturensumme in der nach oben wohl unnöthig weiten Ausdehnung von 0^0 bis 70^0 um je $\frac{1}{2}^0$ fortschreitend, das andere Argument ist die Nullhöhe in der Ausdehnung von 10 bis 250^m je um 10^m fortschreitend. Auch hier scheint es vortheilhafter, nur das 1- bis 9fache der Correctureinheit anzugeben, wodurch Raumersparniss erzielt wird und der Vortheil, auch über 250^m Nullhöhe hinaus in gleichmässiger Weise die Tafel gebrauchen zu können.

Die Ausstattung des Buches ist vortrefflich; so weit die Prüfungen des Berichterstatters reichen, sind Druckfehler vermieden.

Bohn.

Ergebnisse physikalischer Forschung, bearbeitet von Dr. C. Bohn, Professor der Physik an der Forstlehranstalt Aschaffenburg. I. Lief.

Der Verfasser des Werkes, von dem erst etwa der dritte Theil erschienen ist, beabsichtigt nach einem ausgegebenen Prospect, hauptsächlich den Bedürfnissen Derer zu genügen, die sich auf Prüfungen aus der Physik vorbereiten wollen; er denkt sich dasselbe aber auch als kurzes Handbuch zum Nachschlagen, als Mittel zur Repetition und als Leitfaden zu Vorlesungen. „Ausführlichkeit oder gar Vollständigkeit der Tabellen ist nicht beabsichtigt, sondern nur Auswahl des Wichtigsten und zuerst Nöthigen." Die erste Lieferung enthält: Allgemeines über Körper und Kräfte, allgemeine Mechanik und Schwere, physikalische Mechanik, Wärmelehre (erster Theil).

Nach dem Titel könnte man eine Sammlung von Formeln und Zahlenwerthen erwarten; so trocken hat der Verfasser den Inhalt nicht geben wollen, er hat noch den Zusammenhang der Resultate kurz, aber vollkommen genügend dargestellt. Ob das Werk zur Vorbereitung für Prüfungen ausreicht, wird wohl bezweifelt werden dürfen; mit dem Satze, dass z. B. „künftige Lehrer nicht oder nur selten und stets in zweiter Linie bei der Prüfung nach den Mitteln und Wegen der Forschung gefragt werden", wird nicht Jedermann einverstanden sein. Als Nachschlagebuch dagegen in allen obengenannten Fällen, für Studirende, für Candidaten und Lehrer, scheint es seinem Zwecke vollkommen zu entsprechen; doch ist zu bedauern, dass, wie oben angeführt, Vollständigkeit der Tabellen nicht beabsichtigt ist; es würde dadurch sicher sehr an Brauchbarkeit gewinnen. Bei einzelnen Zahlenangaben, z. B. über specifische Wärme, Ausdehnung durch Wärme u. s. w., wäre es von Interesse, die Autorität zu erfahren, die Originalzahlen nebst Angabe des Namens des Autors. Das in Beziehung auf Brauchbarkeit für den Lehrer und Studirenden der Physik bei Weitem in erster Linie stehende Werk von Mousson (dem nur leider ein Register fehlt) ist hierin Muster und scheint auch von dem Verfasser benützt zu sein. Warum dann nicht noch die Namen beisetzen, die neben den Zahlen stehen? Vielleicht würde ein Bogen mehr nöthig geworden sein, aber die Zahl der Abnehmer wäre gewiss eine grössere.

Im Einzelnen lässt sich nur wenig aussetzen, die Definitionen und Erklärungen sind scharf und erschöpfend. Nur in § 26 ist von einem nach dem Erdmittelpunkte gerichteten senkrechten Zuge die Rede (was senkrecht zur Erdoberfläche ist, geht nicht durch den Erdmittelpunkt, vergl. § 70); in § 62 wird gesagt, alle Körper seien gleich schwer, was die Anmerkung indirect verneint; in § 67 ist die kühne Behauptung aufgestellt, die Bestimmung einer Mittelkraft sei nur durch eine in vielen Fällen gar nicht ausführbare Rechnung möglich! und in etlichen Fällen ist der Text für die Figur zu mager, so dass die letzte unverständlich

bleibt, so Fig. 81 und die Figuren 103 bis 107. Endlich fehlt in § 248 die Angabe, dass die Gewichtszahlen für Paris gelten.

Ob die verhältnissmässig ausführliche Behandlung der Mechanik (selbst Wasserräder unter „physikalischer Mechanik") nach dem Titel gerechtfertigt ist, möchte sich auch bezweifeln lassen; doch sind freilich die Bedürfnisse für verschiedene Zwecke verschieden.

Wenn das Register ein möglichst vollständiges wird, so haben wir sicher ein für jeden Physik Studirenden willkommenes und brauchbares Buch vor uns.

Zech.

Das Ellipsoid, elementar bearbeitet von Aug. Jenny. (Die Ellipse. Das Ellipsoid im Allgemeinen. Rotationsellipsoide. Das dreiaxige Ellipsoid. Schiefe Schnitte. Ellipsoid und Cylinder.) Preis 1 Mk. Basel, Schweighauser. 1877.

Das Schriftchen hat, wie der Titel besagt, den Zweck, die Betrachtung des Ellipsoids — selbstverständlich nur, soweit es sich um dessen Inhalt, wie um die stereometrisch einfach bestimmten Abschnitte handelt — auf elementarem Wege durchzuführen. Der Gedanke selbst ist nicht ohne Geschick durchgeführt und dürfte auch nicht ohne Interesse sein, soweit die Zeit für eine Ausdehnung des planimetrischen und des stereometrischen Unterrichts ausreicht, zumal im Vorgange zu den Berechnungen der Ellipsoidenabschnitte die der Ellipsenabschnitte ausführlich besprochen werden.

Bei Hereinziehung dieses Problems in das Gebiet des elementaren Unterrichts dürfte aber doch eine kürzer gefasste Behandlung Platz greifen, insbesondere da, wo es sich um die zur Anwendung gelangenden Proportionen handelt; auch hinsichtlich der schiefen Schnitte bei Ellipse und Ellipsoid könnte nicht ohne Vortheil für die Vereinfachung das Dreieck, beziehungsweise der Kegel hereingezogen werden.

Im Uebrigen kann das Schriftchen bei dem an und für sich billigen Preise und den verhältnissmässig recht anschaulichen Figurentafeln allen Denen empfohlen werden, welche sich für elementare Behandlung derartiger Probleme irgendwie interessiren.

Kaiserslautern. Hugel.

Bibliographie

vom 1. März bis 30. April 1878.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1878, Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften. 1877, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1878. 75 Bd., I. Abth., 5. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk.

——, 76. Bd., I. Abth., 2. Heft. Ebendas. 3 Mk.

Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1880. Herausgegeben vom Reichskanzleramte unter Redaction von Tietjen. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Neue Folge. 12. Bd., Jahrg. 1875. Herausgeg. v. Osnaghi. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Schering, E., Carl Fr. Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr. Festrede. Göttingen, Dieterich. 1 Mk. 50 Pf.

Bessel, F. W., Recensionen, herausgegeben von R. Engelmann. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Reine Mathematik.

Dedekind, R., Ueber den Zusammenhang der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. Göttingen, Dieterich. 2 Mk.

Schering, E., Analytische Theorie der Determinanten. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Seewald, E., Einfache Berechnung elliptischer Bögen. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Graf, H., Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 1 Mk. 50 Pf.

Lieber, H. und v. Lühmann, Geometrische Constructionsaufgaben. 4. Aufl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Simon, M., Die Kegelschnitte, behandelt f. d. Repetition in d. Gymnasial-*prima*. 1. Abth.: Die Parabel. Berlin, Calvary & Comp. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Publication des königl. preussischen geodätischen Instituts: Das rheinische Dreiecksnetz. 2. Heft: Die Richtungsbeobachtungen. Berlin, Schlesier. 15 Mk.

Listing, J., Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Göttingen, Dieterich. 1 Mk.

Heis, E., *Atlas coelestis eclipticus. Octo continens tabulas ad delineandum lumen zodiacale.* Cöln, Du Mont-Schauberg. 6 Mk.

Vogel, H., Der Sternhaufen χ Persei, beobachtet am achtzölligen Refractor der Leipziger Sternwarte in d. Jahren 1867—1870. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.

Auwers, A., Bericht über die Beobachtung des Venusdurchganges vom 8. December 1874 in Luxor. Berlin, Dümmler. 13 Mk.

Boltzmann, L., Ueber die Beziehung zwischen dem 2. Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, resp. den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

Physik und Meteorologie.

Maxwell, C., Theorie der Wärme, übers. v. F. Neesen. 2. Lief. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 20 Pf.

Beetz, W. v., Grundzüge der Elektricitätslehre. 10 Vorlesungen. Stuttgart, Meyer & Zeller. 3 Mk. 60 Pf.

Exner, F. und Goldschmiedt, Ueber den Einfluss der Temperatur auf das galvanische Leitungsvermögen der Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Troost, B., Nachweis der Unzulänglichkeit der Kirchhoff'schen Erklärung der dunklen Frauenhofer'schen Linien im Sonnenspectrum. Leipzig, Georgi. 1 Mk. 25 Pf.

Witte, E., Ueber Meeresströmungen. Pless i. O.-S., Krummer. 2 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1877.
Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 261.
2. Ein Theorem über die conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen. Hoppe. Grun. Archiv LIX, 59.

Vergl. Cartographie.

Analytische Geometrie der Ebene.

3. Méthode de transformation fondée sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. Haton de la Goupillière. Compt. rend. LXXXII, 552. — Journ. mathém. Sér. 3, II, 241.
4. Sur un point de géométrie infinitésimale. P. Serret. Compt. rend. LXXXII, 67.
5. Sur une propriété des lignes algébriques planes. N. corresp. math. III, 194.
6. Propriétés d'une spirale. Freson. N. corresp. math. III, 87.
7. Propriétés de la chainette. Freson. N. corresp. math. III, 278.
8. Theorie der Kardioide. Zahradnik. Grun. Archiv LIX, 337.
9. Note sur la cardioïde. Brocard. N. corresp. math. III, 408.
10. Trouver le lieu du point de concours de deux tangentes rectangulaires à la cardioïde. Brocard. N. corresp. math. III, 58, 231. — Schoentjes ibid. 61. — Neuberg ibid. 123. — Lambiotte ibid. 62.
11. On the equation of the nodal plane cubic. Walker. Quart. Journ. math. XIV, 242.
12. On plane cubics with a double and a single focus. Jeffery. Quart. Journ. math. XIV, 359.
13. Lieu géométrique qui donne une courbe algébrique du troisième degré. Freson. N. corresp. math. III, 386.
14. Zur Theorie der Cissoide. Zahradnik. Grun. Archiv LIX, 335.
15. Pol und Polare des Dreiecks. Greiner. Grun. Archiv LIX, 351.
16. Six segments en involution sur les côtés d'un triangle. Van Aubel. N. corresp. math. III, 221.

Vergl. Brachistochrone. Brennpunkt. Determinante in geometrischer Anwendung 60, 61, 62. Ellipse. Function 106. Hyperbel. Kegelschnitt. Kreis. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

17. Ueber Complexe und Congruenzen. Voss. Mathem. Annal. IX, 55.
18. Ueber Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen in ähnlich-veränderlichen Systemen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 369.
19. The homographic transformation of angles. Taylor. Quart. Journ. math. XIV, 25.
20. Sur les courbes gauches du quatrième ordre. P. Serret. Compt. rend. LXXXII, 322, 370.
21. Sur les cubiques gauches. Appell. Compt. rend. LXXXII, 70.

22. On cubics of the third class with triple foci. Jeffery. Quart. Journ. math. XIV, 127.
23. Propriété des angles de trois couples de génératrices principales d'un cône du second degré. Freson. N. corresp. math. III, 421.
24. Sur les 8 plans tangents communs à 3 sphères. Freson. N. corresp. math. III, 427.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 58, 59. Ellipsoid. Kegelschnitte. Kugel. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

25. Mémoire sur le problème des trois corps. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, II, 345.
26. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes. Tisserand. Compt. rend. LXXXII, 442.
27. Explication des irregularités observées dans le mouvement d'Uranus fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant. Adams. Journ. mathém. Sér. 3, II, 5, 69.
28. Precession and nutation. Greenhill. Quart. Journ. math. XIV, 167.
29. Approximation in the lunar theory. P. Frost. Quart. Journ. math. XIV, 179.
30. Mémoire sur le mouvement de rotation de la terre. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, II, 33, 161.
31. Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in ihren verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 341.

Vergl. Elliptische Transcendenten 103. Hydrodynamik 167.

B.

Barometrische Höhenmessung.

Vergl. Geodäsie.

Bernoulli'sche Zahlen.

32. Sur la généralisation de deux théorèmes dus à Mrs. Hermite et Catalan. E. Lucas. N. corresp. math. III, 69.
33. Sur une formule de Scherk. Le Paige. N. corresp. math. III, 159.

Bestimmte Integrale.

34. Ueber die partielle Summation. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 400.
35. Ueber die Fundamentalwerthe des allgemeinen hypergeometrischen Integrals. Radicke. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 87.
36. Ueber einige bestimmte Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 129, 195.
37. Ueber einige bestimmte Integrale. Kostka. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 258.
38. Ueber einige bestimmte Integrale. Grun. Archiv LIX, 218.

Vergl. Cylinderfunctionen. Elliptische Transcendenten. Kugelfunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

Binomialcoefficienten.

39. Somme des carrés des coefficients de $(x+y)^{2m}$ pris avec des signes alternés. Freson. N. corresp. math. III, 86.
40. Deux relations entre des coefficients du développement des binomes. Freson. N. corresp. math. III, 361, 362.

Brachistochrone.

41. Rapport sur un mémoire de Mr. Haton de la Goupillière ayant pour titre: Problème inverse des brachistochrones. Bouquet. Compt. rend. LXXXII, 143.
42. On some unnoticed cases of free deduced from familiar cases of brachistochronous motion and conversely. Townsend. Quart. Journ. math. XIV, 85.

Brennpunkte.

43. Sur les foyers d'une courbe plane. Gibert & Niewenglowski. Compt. rend. LXXXII, 913.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 12. Analytische Geometrie des Raumes 22.

C.

Cartographie.

44. Nouveau système de cartes marines pour la navigation par arcs de grand cercle. Hilleret. Compt. rend. LXXXII, 1095.

Combinatorik.

45. Théorie du solitaire. Reiss. N. corresp. math. III, 234, 263, 289.
46. On the knight's path. A. H. Frost. Quart. Journ. math. XIV, 123.
47. A simple method of tracing paths of a knight over the squares of 5, 6, 7, 8 and their extension to higher squares. A. H. Frost. Quart. Journ. math. XIV, 354.

Complanation.

48. Sur certaines aires sphériques. Ghysens. N. corresp. math. III, 81. — Catalan ibid. 241.
49. Sur l'aire de l'ellipsoide. Ghysens. N. corresp. math. III, 40.

Cylinderfunctionen.

50. Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function. Lommel. Mathem. Annal. IX, 425.
51. Ueber die Convergenz der Entwickelung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen $\overset{a}{J}(\beta_1 x)$, $\overset{a}{J}(\beta_2 x)$, $\overset{a}{J}(\beta_3 x)$, ..., wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = 0$ vorstellen. Schläfli. Mathem. Annal. X, 137.

D.

Determinanten.

52. Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. Gordan & Noether. Mathem. Annal. X, 547.
53. Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. Günther. Grun. Archiv LIX, 130.
54. Zur Theorie der Unterdeterminanten. Hoza. Grun. Archiv LIX, 387.
55. Ueber Unterdeterminanten einer adjungirten Determinante. Hoza. Grun. Archiv LIX, 401.
56. Sur la multiplication des déterminants. Le Paige. N. corresp. math. III, 141, 275. — Jamet ibid. 247.
57. Ueber das Multiplicationstheorem zweier Determinanten n^{ten} Grades. Hoza. Grun. Archiv LIX, 403.

Vergl. Bestimmte Integrale 37. Differentialquotient 83. Gleichungen 151. Kettenbrüche 199.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

58. Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar. Krey. Mathem. Annal. X, 221. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 40.]
59. Relation entre les distances réciproques de n points situés dans l'espace. Even. N. corresp. math. III, 91.
60. Beziehungen eines Dreiecks zu einer Geraden. Hain. Grun. Archiv LIX, 87.
61. Ueber eine Classe irrationaler Symmetriepunkte des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LIX, 415.
62. Allgemeine Beziehungen der Symmetriepunkte eines Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LIX, 420.

Vergl. Kreis 200.

Differentialgleichungen.

63. A memoir on differential equations. Cayley. Quart. Journ. math. XIV, 292.
64. Geometric meaning of differential equations. Cunningham. Quart. Journ. math. XIV, 226.
65. Extrait d'un mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques. Fuchs. Journ. mathém. Ser. 3, II, 158.
66. Sur les équations linéaires du second ordre dont les intégrales sont algébriques. C. Jordan. Compt. rend. LXXXII, 605.
67. *Sur les* équations linéaires du second ordre. P. Pepin. Compt. rend. LXXXII, *1323.*

68. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Fuchs. Compt. rend. LXXXII, 1494.
69. Sur la manière dont Le Besgue a traité l'équation $y''+\frac{m}{x}y'+xy=0$. Le Paige. N. corresp. math. III, 20.
70. Intégrer l'équation $(3-x)y''-(9-4x)y'+(6-3x)y=0$. Catalan. N. corresp. math. III, 93.
71. Sur l'équation $y''=x(xy'-ny)$. Le Paige. N. corresp. math. III, 317. — Mantel ibid. 322.
72. Sur quelques équations différentielles du second ordre. Brocard. N. corresp. math. III, 139.
73. Ueber lineare Differentialgleichungen. S. Spitzer. Grun. Archiv LIX, 334.
74. On linear differential equations of the third order. Cockle. Quart. Journ. math. XIV, 340. [Vergl. Bd. XI, Nr. 258.]
75. On tests of singularity. Cockle. Quart. Journ. math. XIV, 146. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 256.]
76. Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. A. Mayer. Mathem. Annal. IX, 347.
77. Nachträge zu meinen Abhandlungen über die Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 100. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 257, 258.]
78. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Lie. Math. Annal. IX, 245.
79. Sur la première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. J. Bertrand. Compt. rend. LXXXII, 641.
80. Elimination d'une variable entre deux équations différentielles partielles. Jamet. N. corresp. math. III, 364.

Differentialquotient.

81. Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten. Harnack. Mathem. Annal. IX, 371.
82. Sur la formule $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(1-x^2)^{n-1/2}]$. Hermite. Mathem. Annal. X, 287.
83. Theorem relating to the differentiation of a symmetrical determinant. Glaisher. Quart. Journ. math. XIV, 245.

Differenzengleichung.

84. On the general equation of differences of the second order. Cayley. Quart. Journ. math. XIV, 23.
85. Sur une équation aux différences finies. Le Paige. N. corresp. math. III, 45.

E.

Elektrodynamik.

86. Sur une nouvelle loi fondamentale de l'électrodynamique. Clausius. Compt. rend. LXXXII, 49, 546.
87. Extension du principe de Carnot à la théorie des phénomènes électriques. Équations différentielles générales de l'équilibre et du mouvement d'un système électrique réversible quelconque. Lippmann. Compt. rend. LXXXII, 1425.
88. Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche. Neumann. Mathem. Annal. X, 569.
89. Sur la charge que prend le disque de l'électrophore. Douliot. Compt. rend. LXXXII, 1262.
90. Zur Messung der elektromotorischen Kräfte von Stromquellen. Külp. Grun. Archiv LIX, 103.
91. Ueber das Verhältniss der Stromstärken einer Kette zu einem einzigen Elemente. Külp. Grun. Archiv LIX, 106.
92. Ueber das Verhältniss eines kleinplattigen Elements zu einer Kette von grossplattigen Elementen. Külp. Grun. Archiv LIX, 108.
93. Ueber die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Metalle. Külp. Grun. Archiv LIX, 109.
94. Zur Theorie des Maximums der Stromstärke. Külp. Grun. Archiv LIX, 111.

144. Zur Biographie Tycho Brahe's. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 150.
145. Sur l'orthographe de Huygens. Van Tricht. N. corresp. math. III, 306.
146. Un commentateur du Marquis de l'Hospital. Laisant. N. corresp. math. III, 312.
147. Aufruf zur Errichtung eines Standbildes für Carl Friedrich Gauss. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 203.
148. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. H. Weber. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 71. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 94.]

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 9. Analytische Geometrie des Raumes 19. Astronomie 27. Kugelfunctionen. Mechanik 220, 229. Zahlentheorie 356, 357, 358.

Gleichungen.

149. Ueber den Fundamentalsatz der Algebra. Gordan. Mathem. Ann. X, 572.
150. On coresolvents. Cockle. Quart. Journ. math. XIV, 63. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 78.]
151. Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Naegelsbach. Grun. Archiv LIX, 147.
152. Détermination par le principe de correspondance analytique de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. Saltel. Compt. rend. LXXXII, 63, 324.
153. Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. Lalanne. Compt. rend. LXXXII, 1487. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 376.]
154. Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades. Koenig. Mathem. Annal. IX, 530.
155. Équation, dont les racines sont en progression arithmétique. Realis. N. corresp. math. III, 362.
156. L'équation $f(x)=0$ possédant les deux racines entières $x=a$, $x=b$, on demande le quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$. Freson. N. corresp. math. III, 121.
157. Sur l'équation $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1=0$. Catalan. N. corresp. math. III, 83, 84, 85.
158. Nouvelle solution de l'équation générale du quatrième degré. Weichold. Compt. rend. LXXXII, 1093.
159. Sur l'équation $(x+a)(x+a+b)(x+a+2b)(x+a+3b)=c$. Realis. N. corresp. math. III, 90.
160. Ueber cubische Gleichungen. Liebrecht. Grun. Archiv LIX, 217.
161. Résolution d'un système de n équations à n inconnues, dont une est du second degré, tandis que les autres sont linéaires. P. Mansion. N. corresp. math. III, 376.

H.

Homogene Functionen.

162. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. F. Klein. Mathem. Annal. IX, 183.
163. Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen. Wedekind. Mathem. Annal. IX, 209.
164. On certain algebraic formulae. Day. Quart. Journ. math. XIV, 184.

Vergl. Invariantentheorie.

Hydrodynamik.

165. Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique. Resal. Compt. rend. LXXXII, 698. — Journ. mathém. Sér. 3, II, 342.
166. Versuch einer mathematischen Darstellung der Flüssigkeitswellen. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 133.
167. Gestalt eines um einen Centralkörper rotirenden homogenen Flüssigkeitsringes. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 311.
168. Ueber das Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit, welche gegen einen festen Punkt hin angezogen wird. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 332.
169. Note concernant les tuyaux de conduite. Boileau. Compt. rend. LXXXII, 601.

Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes ayant un produit constant. Chasles. Compt. rend. LXXXII, 1399.

Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditions de produit constant de deux segments variables. Généralisation de quelques théorèmes exprimés en rayons vecteurs. Chasles. Compt. rend. LXXXII, 1463.

Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. Harnack. Math. Annal. X, 189.

Sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes. E. Lucas. N. corresp. math. III, 1. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 70.]

De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques. E. Lucas. N. corresp. math. III, 225, 257. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 71.]

Sur une série de courbes analogues aux développées. Halphen. Journ. mathém. Sér. 3, II, 87.

Du nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes d'un système avec une courbe algébrique. Fouret. Compt. rend LXXXII, 1328.

Du contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique. Fouret. Compt. rend. LXXXII, 1497.

Zur Construction eines äquianharmonischen Systems. Schroeter. Mathem. Annal. X, 420.

Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Curven. Schur. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 220.

Ueber den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen. F. August. Grun. Archiv LIX, 1. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 287.]

Étude d'une série des cercles, de droites ou de points, se déduisant les uns des autres. De Longchamp. N. corresp. math. III, 306, 340.

Identité de la transformation linéaire avec la transformation projective. P. Mansion. N. corresp. math. III, 14.

Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Curven. Krey. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 396.

Ueber lineare Constructionen von ebenen Curven dritter Ordnung. Harnack. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 38.

Démonstration géométrique d'une relation due à Mr. Laguerre et ayant rapport à deux courbes tangentes entre elles. Mannheim. Compt. rend. LXXXII, 554.

Position limite d'une série de points du plan. Brocard. N. corresp. math. III, 269.

Engendrement d'un plan. Modard. N. corresp. math. III, 168.

Ligne de poursuite de 3 chiens placés aux sommets d'un triangle équilatéral. Brocard. N. corresp. math. III, 280.

Propriété d'une hélice. Dewulf. N. corresp. math. III, 88.

Six segments en involution sur les trois côtés d'un triangle. Van Aubel. N. corresp. math. III, 390.

Application de la méthode des équipollences à la démonstration d'un théorème sur le triangle. Van Aubel. N. corresp. math. III, 250.

Vergl. Abbildung. Determinanten in geometrischer Anwendung. Elliptische Transcendenten 102. Gleichungen 152. Singularitäten. Würfe.

Geschichte der Mathematik.

Die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles. Schiaparelli (übersetzt von Horn). Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft 101.

Ueber den Himmelsglobus des Archimedes. Hultsch. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 106.

Ueber die Lebenszeit des Zenodorus. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 173.

Gräko-indische Studien. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 1.

Pentagone d'Albrecht Dürer. Van Aubel. N. corresp. math. III, 386.

Zur Geschichte der cubischen Gleichungen. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 133.

Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Treutlein. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementh. 1.

196. Théorèmes sur les coniques. Van Aubel. N. corresp. math. III, 211.
197. Question sur les doubles systèmes de coniques orthogonales. Breton. N. corresp. math. III, 270.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

198. Beweis des Euler'schen Bildungsgesetzes für die Näherungswerthe von Kettenbrüchen. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 402.
199. Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 31.

Kreis.

200. Ueber den Feuerbach'schen Kreis. Hain. Grun. Archiv LIX, 323.
201. Beiträge zur Lösung einiger bekannten geometrischen Aufgaben. Mendthal. Grun. Archiv LIX, 39.
202. Propriété des tangentes à une circonférence dont le centre est le centre des moyennes distances de points donnés. Freson. N. corresp. math. III, 55.
203. Trouver une circonférence qui rencontre cinq droites données, parallèles, et non situées dans un même plan. Van Aubel. N. corresp. math. III, 49.
204. Trouver, géométriquement, l'enveloppe des droites qui donnent des cordes égales dans deux cercles donnés. Laisant. N. corresp. math. III, 356.
205. Gegeben zwei Kreise, dem einen soll ein Dreieck so umschrieben werden, dass es dem andern eingeschrieben ist. Liebrecht. Grun. Archiv LIX, 445.
206. Sur trois circonférences tangentes au même point. Jamet. N. corresp. math. III, 253.
207. Démontrer que les sommets de trois triangles dont les bases passent chacune par un point d'une de trois circonférences et par leur centre radical sont situés sur une même ligne droite. Dubois. N. corresp. math. III, 395. — Van Aubel ibid 425.
208. Somme des puissances de trois cercles. Dubois. N. corresp. math. III, 394.
209. Sur les cercles tangents à trois cercles donnés. Dubois. N. corresp. math. III, 381.
Vergl. Hyperbel 176, 177. Kegelschnitte 194. Parabel 278, 279.

Krümmung.

210. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. Lipschitz. Compt. rend. LXXXII, 160, 218.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Ellipsoid. Maxima und Minima. Oberflächen 262.

Kugel.

211. Sphére sur laquelle se trouvent huit points situés sur les faces d'un octaèdre. Freson. N. corresp. math. III, 89. — E. Lucas ibid 210.
212. On the shadows of plane curves on spheres. Jeffery. Quart. Journ. math. XIV, 53.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 24. Complanation 48. Elliptische Transcendenten 101.

Kugelfunctionen.

213. Sur quelques théorèmes publiés par Mr. Laurent. Heine. Journ. mathém. Sér. 3, II, 155. — Darboux ibid. 240. — Laurent ibid. 420. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 159.]

M.

Magnetismus.

214. Sur la constitution intérieure des aimants. Jamin. Compt. rend. LXXXII, 19.
215. Solution analytique du problème de la distribution dans un aimant. Jamin. Compt. rend. LXXXII, 783.
216. Sur la théorie du contact d'épreuve. Bouty. Compt. rend. LXXXII, 836.
217. Sur la distribution du magnétisme dans les barreaux cylindriques. Bouty. Compt. rend. LXXXII, 1050.

Mannigfaltigkeiten.

218. Sur l'étendue à n dimensions. Catalan. N. corresp. math. III, 114.

Maxima und Minima.

219. Déterminer le maximum et le minimum de la corde commune à une ellipse et à son cercle de courbure. Fleureau. N. corresp. math. III, 392.
lächen 256.

Mechanik.

220. Explication d'un passage de la mécanique analytique de Lagrange relatif à la composition des moments en statique. Breton (de Champ). Journ. mathém. Sér. 3, II, 175. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 163.]
221. Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un mémoire de Mr. Betti. Lemmi. Journ. mathém. Sér. 3, II, 233. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 242.]
222. Solution of Euler's equations of motion by elliptic fonctions. Greenhill. Quart. Journ. math. XIV, 265.
223. Solution of the equations of motion of a rigid body moveable about a fixed point under the action of noforces. Greenhill. Quart. Journ. math. XIV, 182.
224. Bewegung eines schweren Punktes auf Rotationsflächen mit vertikaler Axe. Th. Bertram. Grun. Archiv LIX, 193.
225. On the solution of a problem connected with the displacement by twist motion of a rigid body in free space. Townsend. Quart. Journ. math. XIV, 126.
226. The theory of screws, a study in the dynamics of a rigid body. Ball. Math. Annal. IX, 541.
227. On compound strains. Niven. Quart. Journ. math. XIV, 196.
228. Quaternion investigations on strains and fluid motion. Hicks. Quart. Journ. math. XIV, 271.
229. Démonstration du tautochronisme de la cycloïde d'après Huygens. P. Mansion. N. corresp. math. III, 77.
230. Sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, II, 165.
231. Recherches sur le balancier compensateur de Mr. Winnerl. Caspari. Compt. rend. LXXXII, 894.
232. Sur les chemises de vapeur des cylindres des machines. Resal. Compt. rend. LXXXII, 537. — Ledieu ibid. 599.
233. Sur la limite inférieure que l'on doit attribuer à l'admission dans une machine à vapeur. Resal. Compt. rend. LXXXII, 647.
234. Sur la production du mouvement rectiligne exact au moyen de tiges articulées. Kempe. N. corresp. math. III, 129, 177.
235. Sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis. Léauté. Compt. rend. LXXXII, 507.

Vergl. Astronomie. Brachistochrone. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Pendel. Schwerpunkt.

Molecularphysik.

236. Sur la constitution atomique des corps. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXII, 1223.
237. Sur l'existence réelle d'une matière formée d'atomes isolés, comparables à des points matériels. Berthelot. Compt. rend. LXXXII, 1129, 1226.
238. Ueber Arwed Walter's Untersuchungen über Molecularmechanik. Korteweg. Zeitschr. Math. Phys. XXII, hist. Abth. 93.
239. Ueber das Mariotte'sche Gesetz. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 336.
240. Ueber das Elasticitätspotential und einen dasselbe betreffenden Satz. Gosiewski. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 267. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 179.]
241. Ableitung des elastischen Stosses zweier Atome aus mechanischen Principien. Lübeck. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 126.

N.

Nautik.

242. Examen des nouvelles méthodes proposées pour la recherche de la position du navire à la mer. Ledieu. Compt. rend. LXXXII, 1414.
243. Transformation de l'astronomie nautique à la suite des progrès de la chronométrie. Villarceau. Compt. rend. LXXXII, 531, 580.
244. Solution géométrique du problème de la détermination du lieu le plus probable du navire au moyen d'un nombre quelconque de droites de hauteur plus grand que 2. Bertot. C[illegible]XII, 682.
245. Sur la conduite des chronomètres [illegible]nd. LXXXII, 679.

R.

Reihen.

300. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Darboux. Journ. mathém. Sér. 3, II, 291.
301. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Darboux. Compt. rend. LXXXII, 365, 404.
302. Weitere Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformen. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. X, 431.
303. Ueber infinitäre Gleichheiten. Du Bois-Reymond. Math. Annal. X, 576.
304. On Sylvester's paper „Development of an idea of Eisenstein". Glaisher. Quart. Journ. math. XIV, 79.
305. Calcul de $1 + \sin(2p+1)u$ en fonction de $x = \sin u$. Cayley. N. corresp. math. III, 243. — Catalan ibid. 245.
306. Sur le développement de $\cos mx$ et $\sin mx$ suivant les puissances de $\sin x$. Villarceau. Compt. rend. LXXXII, 1469.
307. Sur un produit de deux séries infinies. Catalan. N. corresp math. III, 117.
308. Sur la série $x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots$. Catalan. N. corresp. math. III, 418.
309. Sur quelques développements en série. Catalan. N. corresp. math. III, 19, 295. — P. Mansion ibid. 197.
310. Sur la série harmonique. De Longchamps. N. corresp. math. III, 145.
311. Algebraical theorem. Cayley. Quart. Journ. math. XIV, 53.
312. Sur un développement de $(1+x)^{2n}$. Freson. N. corresp. math. III, 220.
313. Sommes de deux séries finies. Laisant. N. corresp. math. III, 169.
314. Sur la somme de la série finie $-1^n + 3^n - 5^n + 7^n - \ldots + (4x-1)^n$. Brocard. N. corresp. math. III, 279.
315. Produit de deux sommes de puissances égal à une somme pareille. Gelin. N. corresp. math. III, 276.
316. Sur une équation dans laquelle se trouvent d'un côté des puissances de $\sin x$ et de $\cos x$, de l'autre côté de $\sin \frac{x}{2}$ et de $\cos \frac{x}{2}$. Freson. N. corresp. math. III, 251.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Binomialcoefficienten. Cylinderfunctionen 51. Differentialgleichungen 71. Elliptische Transcendenten 100. Taylor's Reihe. Unendlich. Zinszinsrechnung.

S.

Schwerpunkt.

317. Centre de gravité d'un arc de cercle. Laisant. N. corresp. math. III, 347. Catalan ibid. 348.
318. Höhe des Schwerpunktes eines Pyramidenstutzes, dessen Dichtigkeit von der unteren bis zur oberen Fläche sich progressiv verändert. Thieme. LIX, 101. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 400.]

Vergl. Ellipse 95.

Singularitäten.

319. Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. Noether. Mathem. Annal. IX, 166.
320. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. F. Klein. Mathem. Annal. X, 199.
321. Note sur les singularités des courbes planes. Zeuthen. Mathem. Annal. X, 210.
322. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et sur les questions analogues dans l'espace. Halphen. Journ. mathém. Sér. 3, II, 257, 371.
323. Revision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. Zeuthen. Mathem. Annal. X, 446.
324. Sur une classe de points singuliers de surfaces. Zeuthen. Mathem. Annal. IX, 321.

Stereometrie.

325. Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes. Dostor. Grun. Archiv LIX, 50.
326. *Construire* sur un cylindre de révolution la génératrice qui passe par un point *A* pris sur la surface. Brocard. N. corresp. math. III, 125. — De *Tilly* ibid. 126.

327. Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie. v. Frank. Grun. Archiv LIX, 76.
Vergl. Tetraeder.

T.

Taylor's Reihe.

328. Sur la démonstration du théorème de Taylor. Mister. N. corresp. math. III, 73, 161. — Niewenglowski ibid. 118.

Tetraeder.

329. Dans tout tétraèdre tronqué à bases parallèles les droites qui joignent le milieu d'une arête latérale au point de concours des diagonales de la face opposée se coupent en un même point. Brocard. N. corresp. math. III, 52. — Chenu ibid. 53.

Trigonometrie.

330. Sur une certaine relation entre les fonctions trigonométriques des trois angles d'un triangle rectiligne. Niewenglowski. N. corresp. math. III, 25.
331. Relations entre les fonctions trigonométriques des angles d'un triangle rectiligne. Gelin. N. corresp. math. III, 145. — Freson ibid. 171.
332. Propriété du triangle. Brocard. N. corresp. math. III, 65, 106, 187.
333. Théorèmes sur le quadrilatère inscriptible. Modart. N. corresp. math. III, 283.
334. Lorsque dans un triangle sphérique un angle est égal à la somme des deux autres on a $\left(\sin\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{b}{2}\right)^2=\left(\sin\frac{c}{2}\right)^2$. Freson. N. corresp. math. III, 358.
Vergl. Geschichte der Mathematik 141. Reihen.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

335. Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Pringsheim. Mathem. Annal. IX, 445.
336. Ueber die Entwickelung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen. Koenigsberger. Mathem. Annal. IX, 487.
337. Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. F. Klein. Mathem. Annal. X, 365.

Unendlich.

338. x étant l'infiniment petit principal la quantité $x-\frac{4}{15}\sin x+\frac{1}{15}tg\,x-\frac{8}{5}tg\frac{x}{2}$ est du septième ordre. Freson. N. corresp. math. III, 249.
Vergl. Reihen 303.

V.

Variationsrechnung.

339. Untersuchung der höheren Variationen einfacher Integrale. G. Erdmann. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 324.
340. On Jacobi's reduction of the second variation. Horner. Quart. Journ. math. XIV, 218.

W.

Wärmelehre.

341. Vibrations calorifiques d'un solide homogène à température uniforme. F. Lucas. Compt. rend. LXXXII, 311, 406.
342. Rapport sur un mémoire de Mr. Félix Lucas intitulé: Vibrations calorifiques des solides homogènes. Resal. Compt. rend. LXXXII, 1484.
343. Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps et sur le coefficient des dilatations. De Saint-Venant. Compt. Rend. LXXXII, 33.
344. Sur l'étude des moteurs thermiques et sur quelques points de la théorie de la chaleur en général. Hirn. Compt. rend. LXXXII, 52.
345. Application de la théorie mécanique de la chaleur à l'étude des liquides volatils. Pictet. Compt. rend. LXXXII, 260.

346. Des écarts dans les lois relatives aux gaz. Mendéläeff. Compt. rend. LXXXII, 412.
347. Sur la détermination du rapport des deux chaleurs spécifiques dans les gaz parfaits dont les molécules seraient mono-atomiques. Villarceau. Compt. rend. LXXXII, 1127, 1175.

Würfe.

348. Ueber die v. Staudt'schen Würfe. R. Sturm. Mathem. Annal. IX, 333.
349. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe. E. Schroeder. Mathem. Annal. X, 289.

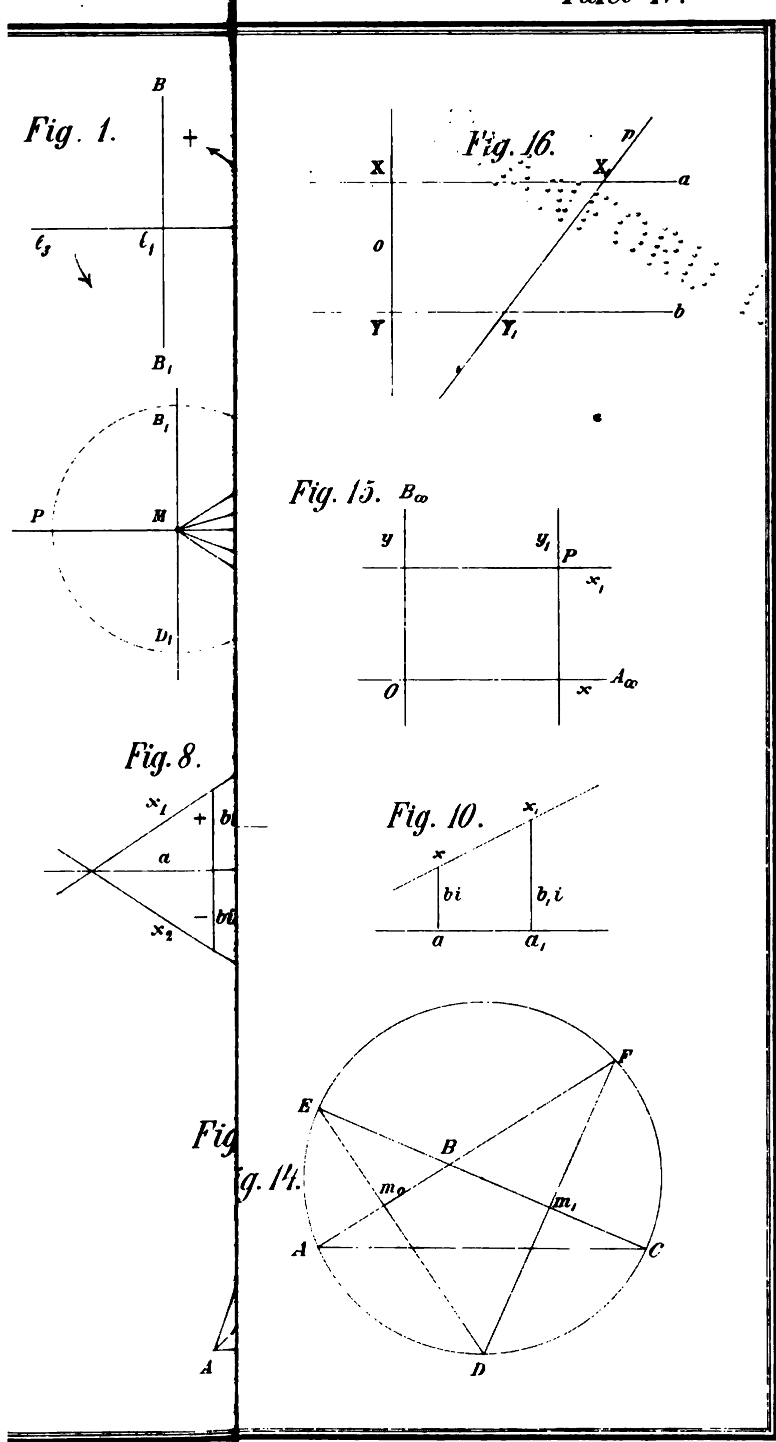
Z.

Zahlentheorie.

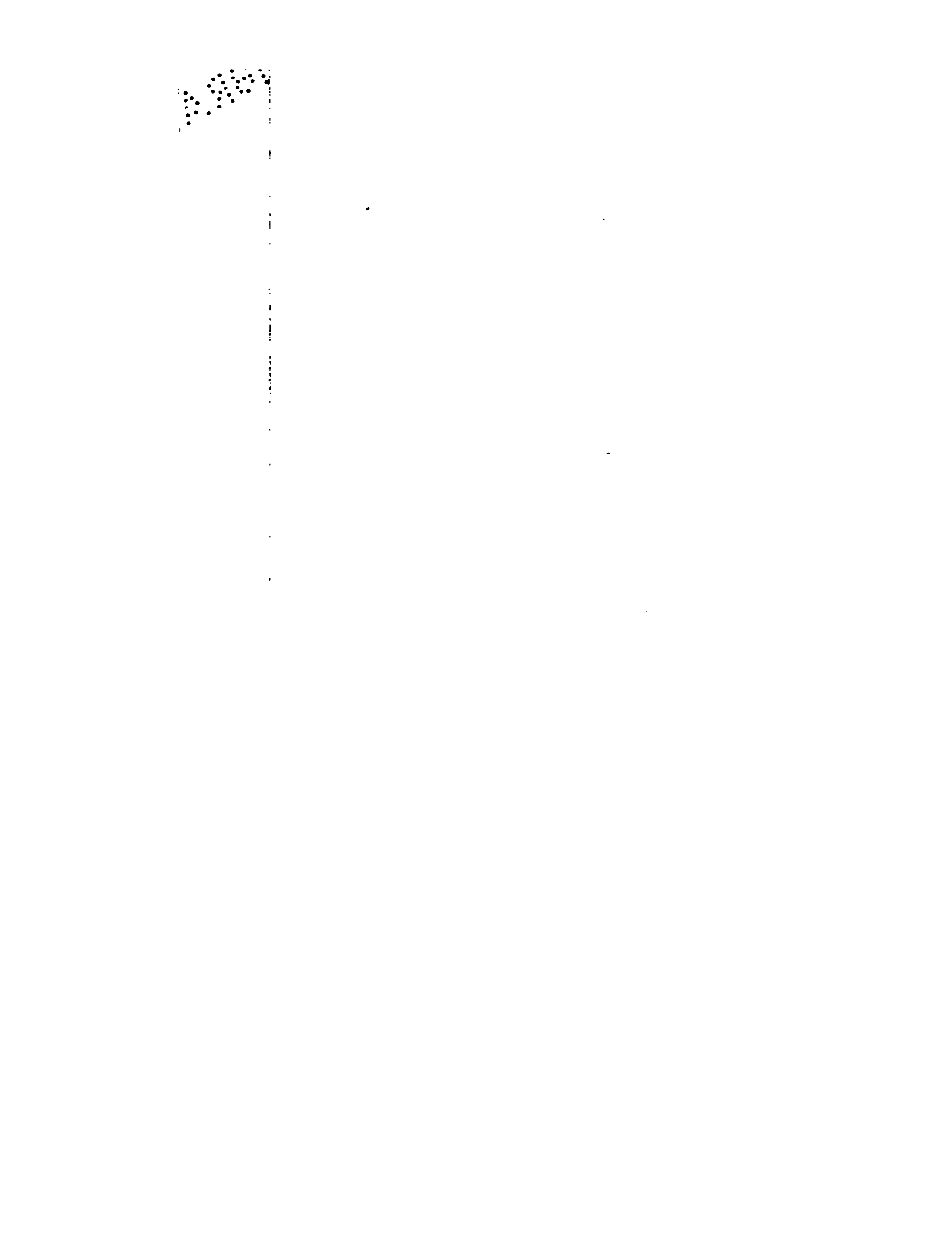
350. Sur l'application des séries récurrentes à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers. E. Lucas. Compt. rend. LXXXII, 165.
351. Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le calcul intégral. E. Lucas. Compt. rend. LXXXII, 1303.
352. Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. E. Lucas. N. corresp. math. III, 369, 401.
353. D représentant le plus grand commun diviseur, m le plus petit multiple de deux nombre, on trouve $D\{m(a,b),c\}=m\{D(a,c),D(b,c)\}$. Freson. N. corresp. math. III, 222.
354. Ueber die Theilbarkeit der dekadischen Zahlen. Hann. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 54.
355. Nombres de deux chiffres renversés ayant la même valeur dans différents systèmes. Van Aubel. N. corresp. math. III, 55.
356. Sur un théorème de Stiefel. E. Lucas. N. corresp. math. III, 47. (Vergl. Bd. XXII, Nr. 257.)
357. Sur le théorème de Nicomaque. Gelin. N. corresp. math. III, 144.
358. Propositions analogues à celle de Nicomaque. Réalis. N. corresp. math. II, 22.
359. Anzahl der Lösungen für die allgemeinste Gleichung ersten Grades mit vier Unbekannten. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 234.
360. Impossibilité de quelques équations dans lesquelles on trouve la somme des puissances de nombres consécutifs égale à la puissance d'un autre nombre. E. Lucas. N. corresp. math. III, 247. — Gelin ibid. 388.
361. Trouver les valeurs entières de n pour lesquelles $1^5+2^5+\ldots+n^5$ soit un carré. Brocard. N. corresp. math. III, 119.
362. Démonstration de quelques théorèmes et solution d'un problème de E. Lucas. Brocard. N. corresp. math. III, 166. — E. Lucas ibid. 248.
363. Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4x+1$ susceptibles d'être décomposés en trois carrés entiers et inégaux. Proth. N. corresp. math. III, 411.
364. Résolution de l'équation indéterminée $y^2-ax^2=bx$ en nombres entiers. Günther. Journ. mathém. Sér. 3, II, 331. — P. Mansion ibid. 341.
365. Étude sur la théorie des résidus cubiques. P. Pepin. Journ. mathém. Sér. 3, II, 313.
366. Sur l'équation $x^3+17=y^2$. Rey. N. corresp. math. III, 25. — Lemière ibid. 49.
367. Sur l'équation $x^3+(2a+1)(x-1)=y^2$. Brocard. N. corresp. math. III, 23. Catalan ibid. 24.
368. Sur l'équation $x^3-x=100y$. Gelin. N. corresp. math. III, 121.
369. Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7+y^7+z^7=0$. Genocchi. Compt. rend. LXXXII, 910.
370. Impossibilité de l'équation $x^7+y^7+z^7=0$. P. Pepin. Compt. rend. LXXXII, 676, 743.

Zinseszinsrechnung.

371. Ueber einige bisher noch nicht allgemein gelöste Probleme der Zinseszins- und Rentenrechnung. Simony. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 190.



Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.



Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber eine Stelle des Pappus.

Von

J. L. Heiberg.

Hierzu Taf. V, Fig. 1—5.

In der schönen neuen Ausgabe der Collectiones des Pappus von Herrn Hultsch ist mir eine Stelle aufgefallen, die, wie mir scheint, vom gelehrten Herausgeber gänzlich missverstanden ist. Es ist die lückenhafte und sehr verdorbene Stelle I, S. 302. Zu deren Erläuterung möge Folgendes dienen.

Pappus nennt S. 272 als Exempel einer fehlerhaften Anwendung der Kegelschnitte zur Lösung von elementären Problemen: *ἡ ἐν τῷ περὶ τῆς ἕλικος ὑπὸ Ἀρχιμήδους λαμβανομένη στερεὰ νεῦσις ἐπὶ κύκλον; στερεά* ist die Lesart der Handschriften und darf nicht in *στερεοῦ* mit Hultsch corrigirt werden; *στερεὰ νεῦσις* ist eine Inclination, die durch Kegelschnitte gefunden wird, wie ja Pappus selbst S. 270 die *προβλήματα στερεά* definirt: *ὅσα δὲ λύεται προβλήματα παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ καὶ πλειόνων, στερεὰ ταῦτα κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς, ἀναγκαῖον.*

Auf diese *στερεὰ νεῦσις* des Archimedes kommt Pappus nach einem langen Excurs über Apollonios endlich S. 298 zurück. Hultsch sagt dort in einer Note S. 299, dass im ganzen Buche Archimedes' *περὶ ἑλίκων* Alles *per plana*, Nichts *per solida*, wie Pappus andeutet, bewiesen wird. Er glaubt daher annehmen zu müssen, dass Pappus eine interpolirte Ausgabe des A. vor sich hatte. Dies ist an und für sich sehr unwahrscheinlich; das einzig Richtige deutet aber Hultsch selbst an: *Denique tertium restat, quod in cogitationem inducamus: fieri potuisse ut hic scriptor in Archimedis per plana demonstratione occultam latere solidorum problematum rationem iudicaret, quae quidem quaestio his paucis dissolvi nequit.*

Dass Pappus den 18. Satz im Buche Archimedes' περὶ ἑλίκων meint, erhellt deutlich aus S. 272: μηδενὶ γὰρ προςχρώμενον στερεῷ δυνατὸν εὑρεῖν τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον θεώρημα, λέγω δὴ τὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ κύκλου ἴσην ἀποδεῖξαι τῇ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένῃ εὐθείᾳ τῇ ἐκ τῆς γενέσεως ἕως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος, und ist auch von Hultsch angenommen worden. Der 18. Satz bei Archimedes S. 235 flgg., ed. Torelli (Oxon. 1792 fol.) lautet: αἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχά (so die Handschriften) τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. Der Beweis wird indirect geführt und stützt sich (S. 236, 30 flgg.) auf *prop.* 7 und (S. 237, 15 flgg.) auf *prop.* 8. Beide Sätze führen auf quadratische Gleichungen, wie schon Nizze in seiner trefflichen Uebersetzung S. 122 und 124 bewiesen hat. Es kann kaum zweifelhaft sein, dass Pappus unter seiner στερεὰ νεύσις πρὸς τὸν κύκλον die zweite (*prop.* 8) verstand. Der achte Satz (S. 224 flg.) geht darauf hinaus, in einem gegebenen Zirkel ACD (Fig. 1) eine Linie aus dem Centrum (KJ) zur Tangente LX im Endpunkte der gegebenen Linie AC so zu legen, dass $BE:CJ$ ein gegebenes Verhältniss hat. Im Beweise (S. 224 am Ende) postulirt Archimedes, es sei möglich, im Zirkel XML zwischen der Peripherie und der gegebenen Linie LX eine der CM gleiche Linie JN so zu legen, dass sie hinlänglich verlängert den Punkt K treffe (νεύουσαν ἐπὶ τὸ K, S. 225, 1). Die Lösung dieser νεύσις, auf der also wirklich der 18. Satz, wie er behauptet, beruht, wollte, glaube ich, Pappus geben S. 298: τῆς ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ ἑλίκων βιβλίῳ λαμβανομένης νεύσεως τὴν ἀνάλυσίν σοι κατέταξα, ἵνα τὸ βιβλίον διερχόμενος μὴ διαπορῇς (weil A. selbst die Lösung dieses Problems nicht mittheilt, sondern nur die Möglichkeit postulirt). λαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὴν οἱ ὑπογεγραμμένοι τόποι καὶ πρὸς ἄλλα πολλὰ τῶν στερεῶν προβλημάτων χρήσιμοι. Er führt demnächst folgende zwei Hilfssätze an und beweist sie (man vergl. die Erläuterungen bei Hultsch):

1. Wenn eine Linie AB und ein Punkt C gegeben ist, und aus C eine Linie DC nach AB gezogen und in D eine Perpendiculaire DE aufgerichtet wird, dann wird der Punkt E auf einer Hyperbel liegen, wenn das Verhältniss $CD:DE$ gegeben ist. (Fig. 2.)

2. Wenn eine Linie AB gegeben ist und auf sie die Perpendiculaire CD hinabgefällt wird, dann wird der Punkt D auf einer Parabel liegen, wenn $AC \times CB$ dem Producte der CD und einer gegebenen Linie gleich ist. (Fig. 3.)

Wie Pappus diese beiden Sätze zur Lösung des Archimedischen Problems angewendet hat, kann mit ziemlicher Sicherheit aus dem ver-

dorbenen Texte gerathen werden. Die Figur bei Hultsch S. 303 ist unrichtig und rührt von ihm selbst her (S. 301: *figuram nostra coniectura delinearimus*). Der Anfang S. 300 ist heillos corrupt, aber auch weniger bedeutend. Das Problem lautet: *θέσει ὄντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ καὶ θέσει ἐν αὐτῷ εὐθείας τῆς ΒΓ καὶ δοθέντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Α, θεῖναι μεταξὺ τῆς ΒΓ εὐθείας καὶ τῆς ΒΖΓ* (ich lese *ΒΕΓ*) *περιφερείας ἴσην τῇ τεθείσῃ νεύουσαν πρὸς τὸ Γ* (ich lese *πρὸς τὸ Α*). Dass dies eben das von Archimedes in *περὶ ἑλίκ.* *prop.* 8 angedeutete Problem ist, fällt in die Augen.

Ich gebe jetzt die Beweisführung des Pappus aus diesem Gesichtspunkte wiederhergestellt (Fig. 4):

γεγονέτω γὰρ, καὶ κείσθω ἡ (die Hds. *τῇ*) *ΕΔ* (so die besten Hds.) *ἴση* (nämlich der gegebenen Linie) (vielleicht wäre zu lesen *κείσθω αὐτῇ ἡ*) *καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει τὴν ΒΓ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Α προςβέβληται ἡ ΑΔ καὶ ἴση αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἡ ἀπὸ τοῦ [ῦ Ζ, τὸ Ζ ἄρα]* (so supplire ich die Lücke, wesentlich nach Hultsch) *πρὸς ὑπερβολῇ* (nach dem ersten Hilfssatz; denn das Verhältniss $ΑΔ:ΔΖ$ ist gegeben $=1$). [*Καὶ*] *ἐκεὶ* (*καὶ* fehlt in den Handschriften) *ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΓΔ* (ɔ: $ΒΔ \times ΔΓ$) *τῷ ὑπὸ ΑΔΕ* (so richtig Hultsch, *ΑΔΓ* die Hds.) (nach Euclid III, 35), *τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΖΔΕ* (denn $ΖΔ = ΑΔ$ nach der Construction), *καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ* (nach der Constr.), *τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΔΖ. τὸ Ζ ἄρα πρὸς παραβολῇ* (so Hultsch, *ὑπερβολή* die Hds.) *δοθέν ἄρα τὸ Ζ* (durch den Schneidepunkt der Parabel mit der Hyperbel). Das Folgende ist nicht mit Sicherheit wiederherzustellen, geht aber nicht den Beweis an.

Die Analysis ist also ziemlich ins Reine gebracht; die Synthesis, die von Pappus übergangen ist, möchte etwa die folgende sein (Fig. 5): Es sei die gegebene Linie x. Man ziehe $\alpha\eta \perp \beta\gamma$ und mache $\eta\varkappa = \alpha\eta$; mit $\alpha\varkappa$ als Diameter zeichne man eine gleichseitige Hyperbel. Die Linie $\beta\gamma$ sei halbirt in ϱ und $\varrho\lambda$ sei $= \frac{\frac{1}{4}\beta\gamma^2}{x}$; durch β, λ und γ lege man eine Parabel mit der Axe in $\lambda\varrho$ und dem Scheitelpunkt in λ. Man hat dann

$$\frac{\beta\varrho^2}{\zeta\mu^2} = \frac{\lambda\varrho}{\lambda\varrho - \zeta\delta}$$ (*Apollon. con. I*, 20; *Archimedes quadr. parab. prop.* 3 *p.* 19) ɔ: $\zeta\mu^2 . \lambda\varrho = \beta\varrho^2 . \lambda\varrho - \beta\varrho^2 . \zeta\delta$; ɔ:

$$\beta\varrho^2 . \zeta\delta = \lambda\varrho . (\beta\varrho^2 - \zeta\mu^2) = \lambda\varrho\,(\beta\varrho + \zeta\mu)(\beta\varrho - \zeta\mu) = \lambda\varrho . \gamma\delta . \beta\delta$$
$$= \frac{\frac{1}{4}\beta\gamma^2}{x} . \gamma\delta . \beta\delta = \frac{\beta\varrho^2 . \gamma\delta . \beta\delta}{x}$$ ɔ: $\zeta\delta . x = \gamma\delta . \beta\delta$.

Weiter, weil in der gleichseitigen Hyperbel der Parameter (p) dem Diameter gleich ist, ist $\sigma\zeta^2 = \sigma\varkappa . \sigma\alpha$ (denn nach Apollonius *con. I*,

21 ist $\frac{\sigma\zeta^2}{\sigma\varkappa\,.\,\sigma\alpha} = \frac{p}{\varkappa\alpha}\Big) = \sigma\varkappa^2 + \sigma\varkappa\,.\,\varkappa\alpha$ (Euclid. II, 3) $= \sigma\varkappa^2 + 2\sigma\varkappa\,.\,\varkappa\eta$ $= \eta\delta^2$.

Es ist aber $\alpha\delta^2 = \eta\delta^2 + \alpha\eta^2 = \eta\delta^2 + \varkappa\eta^2$ und $\zeta\delta^2 = \sigma\eta^2 = \sigma\varkappa^2 + 2\sigma\varkappa\,.\,\varkappa\eta + \varkappa\eta^2$ $\supset$: $\alpha\delta = \zeta\delta$. Es wird also $x\,.\,\alpha\delta = \gamma\delta\,.\,\beta\delta$; aber $\gamma\delta\,.\,\beta\delta = \delta\varepsilon\,.\,\alpha\delta$ (Euclid. I, 35) $\supset$: $x = \delta\varepsilon$, was zu beweisen war.

Ueber eine Maximumaufgabe.

Von

Ad. Lorsch,

stud. math.

Hierzu Taf. V, Fig. 6.

Regiomontan erwähnt in einem Briefe an den Magister Christian Roder (s. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XIX, Literaturztg. S. 5[illegible]) folgende Aufgabe. In einer Geraden ist ein Punkt aufzufinden, von dem aus eine in einer gewissen Entfernung befindliche, zu der ersten Geraden senkrechte zweite Gerade am grössten erscheint. Diese Aufgabe, die mittelst Differentialrechnung sehr leicht gelöst werden kann — sie ist eine Aufgabe über Maximum —, findet durch folgende Betrachtung auf geometrischem Wege ihre Lösung.

Die erste Gerade sei CD, AB die andere Gerade; es ist also mit anderen Worten in CD ein Punkt X zu finden, dass Winkel AXB ein Maximum ist. Denken wir uns den Punkt X gefunden und legen wir durch A, B, X einen Kreis, so sind nur zwei Fälle möglich: 1. der Kreis schneidet CD ausser in X auch noch in Y, oder 2. er berührt die Gerade in X.

Der erste Fall ist unmöglich; denn abgesehen davon, dass $\angle AYB = \angle AXB$ ist, ist jeder Winkel, den ein Punkt auf XY mit A und B bildet, grösser als $\angle AXB$, was der Voraussetzung widerspricht. Es [illegible] also nur der zweite Fall übrig, der alsdann durch eine sehr einfache Construction X uns finden lässt. Ziehen wir nämlich den Kreis, der durch A, B geht und CD berührt, so giebt dieser Berührungspunkt den gesuchten Punkt X. Durch eine Betrachtung auf der Figur sieht man sogleich, dass $\angle AXB$ wirklich der grösste Winkel ist, indem dieser Winkel auf $arc\,AB$ steht, während die anderen Punkte Winkel liefern, welche $arc\,AB$ minus einem Bogen, der von der Lage des Punktes abhängig ist, zum Mass haben.

Recensionen.

Ueber eine specielle Classe Abel'scher Functionen. Von Thomae. Halle 1877.

Die vorliegende, 57 Seiten umfassende Schrift behandelt die Theorie derjenigen Abel'schen Functionen, die aus algebraischen Integralen entspringen, welche als Irrationalität die Kubikwurzel aus einer rationalen Function enthalten. Diese rationale Function ist überdies als gebrochene Function vorausgesetzt, deren Zähler und Nenner von gleichem Grade sind oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie ist als ganze Function vorausgesetzt, welche eine gleiche Anzahl einfacher und doppelter Factoren enthält. Diese Annahme hat zur Folge, dass die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche, welche den Verlauf der Kubikwurzel darstellt, in Paare zerfallen in der Art, dass die Kubikwurzel ihren Werth nicht ändert, wenn man beide Verzweigungspunkte eines solchen Paares umkreist, und dadurch wird die Anlegung der Querschnitte, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln, leichter und übersichtlicher. Andere Fälle der Kubikwurzel können als Grenzfälle aus diesem hergeleitet werden, indem man die Verzweigungspunkte theilweise zusammenfallen lässt.

Die Theorie dieser speciellen Functionen gestattet der allgemeinen gegenüber wesentliche Vereinfachungen und nimmt eine Gestalt an, welche der Theorie der hyperelliptischen Functionen in vielen Stücken ganz analog ist. Fragt man nach dem allgemeinen Grunde, weshalb bei diesen Functionen diese einfacheren Methoden zum Ziele führen, so ist er wohl vorzugsweise darin zu suchen, dass hier wie die Riemann'sche Fläche T verzweigte, also rationale Functionen der Variablen s, z existiren, die nur in je einem Punkte unendlich gross und unendlich klein, im vorliegenden Falle von der dritten Ordnung, werden. Wenn nämlich solche Functionen in hinlänglicher Anzahl vorhanden sind, so lassen sich nach dem Abel'schen Theorem die Periodensysteme alle durch ganzzahlige Vielfache je eines einzelnen Integrals erster Gattung ausdrücken, und wenn solche Integrale in den Thetafunctionen auftreten, so kann man dieselben sofort durch die entsprechenden Bruchtheile der Periodensysteme ersetzen. Hi[illegible] als in der algebraischen Gleichung,

welche zur Bestimmung der sogenannten Abel'schen Functionen im engeren Sinne dient, glauben wir den Grund der Vereinfachungen zu erblicken, welche dieser specielle Fall dem allgemeinen gegenüber zulässt. Denn indem man die der Functionenclasse zu Grunde liegende algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln von vornherein in einer Form annimmt, in der die Abel'schen Functionen sich leicht bestimmen lassen, macht man (wenigstens in dem Falle $p=3$) eine Annahme, zu der genau dieselbe Berechtigung vorliegt, wie dazu, die Function unter dem Wurzelzeichen bei den hyperelliptischen oder den hier behandelten Integralen in ihre linearen Factoren zerlegt anzunehmen.

Sehen wir nun zu, in welcher Weise der Verfasser die Hauptaufgaben der Theorie in Angriff genommen hat. Bezeichnet man mit u_λ die Normalintegrale erster Gattung und setzt

$$v_\lambda = \sum_{1,p}^{\nu} u_\lambda(s_\nu, z_\nu),$$

so sind dadurch die von einander unabhängigen oberen Grenzen (s_ν, z_ν) als $2p$-fach periodische Functionen der p Veränderlichen v_λ bestimmt und es ergeben sich hieraus zwei Aufgaben: erstens diese oberen Grenzen oder symmetrische Functionen derselben durch Thetafunctionen der Variabeln v_λ darzustellen, sodann umgekehrt, gegebene $2p$-fach periodische Thetaquotienten algebraisch durch s_ν, z_ν auszudrücken. Das erste Problem ist das Jacobi'sche Umkehrproblem, das zweite kann man das Riemann'sche nennen. Summen von mehr als p Integralen dieser Art zu betrachten, erweitert principiell die Aufgabe nicht, da mittelst des Abel-schen Theorems jedes System von solchen Summen auf eines mit p gliedrigen Summen zurückgeführt werden kann, in welchem überdies die unteren Grenzen beliebig gegeben sind. Dass Riemann Summen betrachtet, die ein Glied mehr enthalten (Riemann's Werke S. 134), ist durch seine Methode geboten und man kann schliesslich einer der oberen Grenzen einen beliebigen speciellen Werth ertheilen, ohne dass dadurch die Allgemeinheit der betrachteten $2p$-fach periodischen Functionen geschmälert würde. In ihrer Allgemeinheit gefasst, sind freilich die beiden oben angegebenen Probleme nicht wesentlich verschieden, allein es trifft sich nicht immer, dass die einfachsten Fälle der Lösung des Riemann-schen Problems schon zur Lösung des Jacobi'schen Problems ausreichen und es ist daher eine Hauptaufgabe der Theorie, die Lösung des Riemann'schen Problems, dessen vollständige Lösung auf stets höhere und höhere algebraische Gleichungen führen würde, soweit zu fördern, dass die Lösung des Jacobi'schen Problems daraus geschöpft werden kann.

Im Allgemeinen ist der einfachste Fall des Riemann'schen Problems der, in dem sich die Argumente der Thetafunctionen, deren Quotienten algebraisch bestimmt werden sollen, um halbe Periodensysteme

von einander zu unterscheiden. Diese Aufgabe wird durch die Abel'schen Functionen im engeren Sinne gelöst und reicht bei den hyperelliptischen Functionen, aber auch nur bei diesen, zur Lösung des Jacobi'schen Problems aus. Im allgemeinen Falle $p = 3$ z. B. muss man noch solche Thetaquotienten betrachten, deren Argumente sich um Viertel der Perioden unterscheiden, eine Aufgabe, die indessen, wenn die Abel'schen Functionen bekannt sind, durch quadratische Gleichungen lösbar ist.

In besonderen Fällen, wie der, welcher den Gegenstand der vorliegenden Schrift bildet, sind es andere Thetaquotienten, welche die einfachste algebraische Darstellung gestatten, in diesem Falle solche, deren Argumente sich um Systeme von Dritteln der Perioden unterscheiden, wobei freilich nicht alle diese Systeme zulässig sind, sondern nur solche, die gewissen Bedingungen genügen. Während die Anzahl sämmtlicher Systeme von Dritteln der Perioden 3^{2p} beträgt, ist nur für 3^p von ihnen die in Rede stehende einfache Darstellung möglich, welche im zweiten Theile der vorliegenden Schrift behandelt ist.

Auf das Jacobi'sche Problem ist der Verfasser nicht eingegangen; es scheint aber, als ob die durch seine Methoden darstellbaren Functionen zur Lösung desselben ausreichend seien. Wenigstens ergiebt sich für den einen Theil desselben aus den Formeln Nr. 38 eine sehr elegante Lösung. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\varphi(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_p),$$
$$R(z) = (z - k_1)(z - k_2) \ldots (z - k_{p+2}),$$

wenn $k_1, k_2, \ldots k_{p+2}$ die sämmtlichen Verzweigungspunkte sind, so ist

$$\frac{\varphi(z)}{R(z)} - \sum_{1,p+2}^{\nu} \frac{\varphi(k_\nu)}{R'(k_\nu)} \frac{1}{z - k_\nu} = 0$$

eine Gleichung p^{ten} Grades, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_p$ sind. Da nun durch die Formeln Ster. 38 die Verhältnisse der Grössen $\sqrt[3]{\frac{\varphi(k_\nu)}{R'(k_\nu)}}$ mittelst der Thetafunctionen durch die Variabeln v_λ ausgedrückt sind, so sind die Coefficienten dieser Gleichung in der Weise dargestellt, wie es das Jacobi'sche Problem verlangt. Es erübrigt dann noch, zu jedem der $z_1, z_2, \ldots z_p$ den zugehörigen Werth $s_1, s_2, \ldots s_p$ unter den drei möglichen Werthen eindeutig auszuwählen. Es scheint, als ob hierzu aus den in § 20 angedeuteten Formeln die Mittel erhalten werden könnten. Indessen müssten diese, um darüber zu entscheiden, vollständiger entwickelt sein.

Die Untersuchung schreitet ferner zur Theorie der Integrale zweiter Gattung fort. Integrale zweiter Gattung sind solche, welche in einem oder in einigen Punkten unendlich gross in endlicher Ordnung werden, während die Integrale dritter Gattung logarithmisch unendlich werden.

Alle Integrale zweiter Gattung lassen sich mit Zuziehung von solchen der ersten Gattung und von algebraischen Functionen linear durch p specielle unter ihnen, die in beliebig gegebenen Punkten, etwa in Verzweigungspunkten, unendlich werden, darstellen, so dass diese Functionen nicht von einem Parameter in transcendenter Weise abhängen, während ein solcher in den Integralen dritter Gattung nothwendig vorkommt. Im ersten Theile hat der Verfasser die Darstellung dieser Functionen als algebraische Integrale gegeben. Um die Theorie derselben zu erledigen, ist es erforderlich, Summen von p gleichartigen Integralen dieser Art mit unabhängig veränderlichen oberen Grenzen als eindeutige Functionen der entsprechenden Integralsummen erster Gattung durch die logarithmischen Ableitungen der Thetafunctionen darzustellen. Diese Aufgabe ist in den §§ 25 bis 30 gelöst. Die umgekehrte Aufgabe, die Darstellung der logarithmischen Ableitungen der Thetafunctionen durch algebraische Integrale und algebraische Functionen, ist in § 32 angedeutet und mag bei der Durchführung noch erhebliche Schwierigkeiten haben.

Den Schluss der ganzen Arbeit bildet eine interessante Untersuchung, welche die Bestimmung des Werthes von $\vartheta(0, \ldots 0)$ durch die Moduln (die Verzweigungswerthe) zum Zwecke hat, mittelst einer Methode, welche der Verfasser schon früher mit Erfolg auf die hyperelliptischen Functionen angewendet hat. Die Methode ist von Riemann angedeutet und ist die Verallgemeinerung der von Jacobi zu gleichem Zwecke bei den elliptischen Functionen benutzten. Sie beruht auf der Darstellung des Differentials $d\lg\vartheta(0,\ldots 0)$ durch die unabhängigen Veränderlichen $k_1, k_2, \ldots k_{p+2}$, welches in dieser Form die Integration gestattet.

Königsberg, im September 1877. H. Weber.

Handbuch der elektrischen Telegraphie. Unter Mitwirkung mehrerer Fachmänner herausgegeben von Dr. K. E. Zetzsche, Professor der Telegraphie am Polytechnikum zu Dresden. Erster Band: Geschichte der elektrischen Telegraphie. 8°, mit 335 in den Text gedruckten Holzschnitten. 1877. Berlin, Julius Springer. Preis 18 Mark.

Das uns vorliegende Werk, dessen Verfasser längst als Autorität auf dem Gebiete der Telegraphie bekannt ist, zeichnet sich vor allen anderen Lehrbüchern vornehmlich dadurch aus, dass die Anordnung des reichhaltigen Stoffes eine ganz neue ist. Gerade diese Fülle des Stoffes jedoch machte es für den Einzelnen fast unmöglich, das Ganze allein zu bearbeiten. Aus diesem Grunde hat der Herr Verfasser vorgezogen, sein Werk in vier von einander unabhängigen Bänden, deren jeder ein für sich abgeschlossenes Ganzes bildet, erscheinen zu lassen, wobei die Hilfe

bewährter Fachgenossen thätig einzugreifen im Stande ist. Da bis jetzt nur der erste Band, der Geschichte der Telegraphie gewidmet und von Zetzsche selbst bearbeitet, vollständig vorliegt, möge uns gestattet sein, unsere Besprechung auf diesen zu beschränken.

In der im Uebrigen so reichhaltigen Literatur des Telegraphenwesens machte sich bis jetzt immer eine empfindliche Lücke fühlbar, es fehlte eine wahrheitsgetreue, alle Quellen möglichst erschöpfende Darstellung des Entwickelungsganges der Fernschreibekunst. Wohl hat Zetzsche 1874 einen kurzen Abriss einer solchen publicirt, auch finden sich in den Werken von M. M. v. Weber, Kuhn, Schellen, Du Moncel manche bemerkenswerthe historische Daten, allein, abgesehen von der Unvollständigkeit dieser Notizen fehlte es an einer eingehenden Kritik, und die Erfüllung dieser letzteren Forderung ist es gerade, die dem uns vorliegenden Werke einen durchaus originalen Charakter verleiht. Das immense Quellenstudium, welches als Grundlage einer derartigen Arbeit unerlässlich ist, manifestirt sich auf jeder Seite des Buches, umsomehr, als der Herr Verfasser vorgezogen hat, alle Citate entweder in Parenthese oder als Anmerkung dem Texte beizufügen. In Kuhn's Lehrbuch der angewandten Elektricitätslehre sind im Gegentheil alle Quellencitate jedem Abschnitte in Form eines Anhanges beigegeben; behufs rascher Orientirung dürfte freilich die erstere Methode vorzuziehen sein, wenn gleich das Auge des Lesers stellenweise durch sie etwas ermüdet wird. Der Herr Verfasser hat die Geschichte der Telegraphie in zwei Zeiträume getheilt, von denen der erste die Erfindung, der zweite die Ausbildung der Telegraphen umfasst.

Wir lernen zunächst die grösstentheils fruchtlosen Versuche, die Reibungselektricität zum Zeichengeben zu verwenden, kennen; an die wissenschaftlichen Spielereien eines Bayle, Gilbert, O. v. Guerike schlossen sich die schon vollkommeneren Apparate von Reusser, Böckmann, Lesage, Ronalds, Salva; auch des geheimnissvollen „*télégraphe intime*“ von Alexandre, dessen Wesen nie aufgeklärt worden, ist hier Erwähnung gethan. Wie ein bewährter Fachmann schreibt, war man nahe daran, fernere Versuche aufzugeben, als zwei neue grosse Entdeckungen, nämlich Oersted's Beobachtung der Nadelablenkung und diejenige Arago's, welche lehrt, dass vom Strome umflossenes Eisen magnetisch wird, der weiteren Entwickelung der Fernschreibekunst Thor und Thür öffneten. Wenngleich schon Sömmerring's Telegraph auf die zersetzende Kraft des Galvanismus basirt war, so blieb es doch dem schöpferischen Geiste eines Schilling vorbehalten, das Agens richtig anzuwenden. Zwar war es diesem Erfinder nicht vergönnt, die Früchte seines Strebens zu geniessen, allein unter den Händen Cooke's und Wheatstone's erlangte sein Apparat alle Verbesserungen, deren es bedurfte, die Telegraphie einer neuen Entwickelungsperiode entgegenzu-

führen. Vor der Uebertragung des Schilling'schen Telegraphen nach England hatten Gauss und Weber in Göttingen ihren anfänglich durch galvanische, später durch Inductionsströme betriebenen Nadelapparat aufgestellt, worauf dann Steinheil's schöpferische Hand einen für die damalige Zeit vorzüglich construirten Schreibapparat herstellte. Die ausführliche Darstellung der successiven Verbesserungen, welche Wheatstone und Cooke am Nadeltelegraphen anbrachten, die ersten Zeigerapparate dieser Erfinder und endlich die sehr interessanten Daten der Erfindung des Morse'schen Schreibapparates schliessen den ersten Zeitraum.

Die Ausbildung nun der Telegraphie historisch und kritisch darzustellen, muss als eine sehr schwierige Aufgabe bezeichnet werden; die häufigen, mehr oder weniger begründeten Prioritätsansprüche, die Entwürfe von Apparaten, die nie in die Praxis Eingang gefunden haben, zu sichten und kritisch zu beleuchten, erfordert ungleich mehr Aufwand an Arbeitskraft, als die Darstellung des ersten Zeitraumes. Der erste Abschnitt des zweiten Zeitraumes behandelt die Telegraphenapparate. Nach einer kurzen Besprechung der verbesserten Systeme von Nadeltelegraphen widmet der Herr Verfasser einen grösseren Raum der Beschreibung der Zeigertelegraphen. Wir begegnen hier einigen sehr bemerkenswerthen Daten, namentlich verschiedenen, bisher noch nicht allgemein bekannten Anordnungen der Mechanismen, so z. B. die Vorrichtung zum Geheimsprechen an den Zeigern von Fardely und Siemens. In Bezug auf den Kramer'schen Apparat überrascht uns der Umstand, dass derselbe hier, wie in den ersten Auflagen von Schellen's Lehrbuch als mit Relais (Pendel) und Localbatterie arbeitend dargestellt ist, während doch bei seiner späteren Anwendung zum Eisenbahndienste das Relais in Wegfall kam.

Unmittelbar auf die Besprechung der Zeigerapparate folgt diejenige der Typendrucker; es hat dies wohl seinen Grund darin, dass einige Apparate dieser Art sich direct aus ersteren entwickelten (System von Siemens u. A.). Wie bekannt, vermochten nur wenige dieser Instrumente sich eine dauernde Verwendung in der Praxis zu sichern; zu diesen gehören unseres Wissens die Typentelegraphen von Hughes und von Phelps, der erstere in Europa, der letztere in den Vereinigten Staaten sehr verbreitet. Die Besprechung der neuesten Formen behält der Herr Verfasser dem dritten Bande seines Werkes vor.

Unter den „Drucktelegraphen für vereinbarte Schrift" findet sich auch der 1873 in Wien ausgestellte „Fernschreiber" von G. Jaite; der Umstand, dass die Beschreibung dieses sinnreichen Apparates, der seinem Wesen nach eigentlich in die neueste Zeit gehört, schon hier Platz gefunden hat, scheint darauf hinzudeuten, es sei derselbe nirgends definitiv adoptirt.

Mit besonderer Vorliebe ist die Entwickelung des Morse'schen Schreibapparates behandelt; wir finden hier zum ersten Male in chronologischer Ordnung die mannigfachen Abänderungen, welche namentlich Siemens & Halske im Laufe der Zeit diesem Instrumente gegeben haben und welche theils auf erhöhte Präcision des Ganges, theils auf möglichsten Schutz der feineren Theile des Mechanismus zielten. Auch der von vielen Lehrbüchern gänzlich ignorirte Stiftschreiber von M. Hipp, bei welchem der Schreibstift in sinnreicher Weise mit den Organen des das Papierband bewegenden Uhrwerkes verbunden ist, hat hier ein Plätzchen gefunden. Es hat dies um so mehr Berechtigung, als Hipp's Apparat, wenn auch längst von unseren Staatslinien durch den Farbschreiber verdrängt, bis vor Kurzem auf den Eisenbahnlinien der Westschweiz in Anwendung war.

Es folgt nun ein Abschnitt: „die Telegraphenleitung", derselbe ist jedoch etwas kurz gehalten; es bietet indessen die Besprechung der unterirdischen Linien insofern grosses Interesse, als die Umstände eingehender behandelt werden, welche zum baldigen Versagen der Ende der vierziger Jahre gelegten Guttaperchadrähte führten. Gegenwärtig functioniren bekanntlich in Deutschland Erdkabel von bedeutender Länge ganz vorzüglich.

Die dritte und letzte Abtheilung des Werkes, „das Telegraphiren" betitelt, dürfte namentlich in den späteren Capiteln das Interesse des Fachmannes ganz besonders auf sich ziehen.

Nach einer kurzen Einleitung, die Besprechung der telegraphischen Nebenapparate enthaltend (auffallenderweise sind den gedrängten Beschreibungen der Relais keine Figuren beigegeben), lernen wir die automatischen Sender kennen, welche übrigens der Herr Verfasser in einer Schrift: „Die Entwickelung der automatischen Telegraphie", Berlin 1875, eingehender behandelt hat. Die Theorie der Translation ist uns schon aus des Herrn Verfassers Aufsätzen im *Journal télégraphique* 1876 bekannt; die verschiedenen Methoden sind in bestimmte Classen, je nach der Art ihrer Wirkung, getheilt.

Mit besonderer Vorliebe ist das letzte Capitel des Werkes, welches die Doppeltelegraphie umfasst, behandelt. Nach einer kurzen Uebersicht der älteren Versuche, welche namentlich die absatzweise mehrfache Telegraphie bezweckten (die Beschreibung des hierher gehörigen vierfachen Apparates von B. Meyer wird dem dritten Bande vorbehalten), ist zunächst das Gegensprechen, hierauf das Doppelsprechen und schliesslich die Verbindung beider behandelt. Ohne die Verdienste Gintl's zu schmälern, sind auch diejenigen Petřina's um die logische Erklärung der Vorgänge beim gleichzeitigen Sprechen gehörig betont. Die älteren Einschaltungen von Gintl, Frischen, Siemens, Stark, Edlund, Maron u. A. sind uns schon aus des Herrn Verfassers Schrift: „Die

Copirtelegraphen, Drucktelegraphen und die Doppeltelegraphie", Leipzig 1865, bekannt, ebenso die neueren Einschaltungen von Vaes, Stearns, Preece, Winter durch seine Kritik im *Journal télégraphique* 1874, über welche sich (mit Unrecht) Du Moncel so sehr ereiferte. Es heisst ja lediglich einer Forderung der Gerechtigkeit und der geschichtlichen Wahrheit genügt, wenn dargethan wird, dass sich die meisten neueren Gegensprechmethoden nur in unwesentlichen Details von den älteren unterscheiden. Der Herr Verfasser bemerkt auch ganz ausdrücklich, dass namentlich Stearns sich insofern grosse Verdienste um das Gegensprechen erworben habe, als durch seine Ausdauer die Bemühungen um die Durchführung der Doppeltelegraphie so vielseitig wieder aufgenommen worden seien.

Im Gegensatz zur ersten Hälfte des Bandes sind die letzten Capitel verhältnissmässig kurz gehalten. Es mag dies bei der grossen Fülle des Stoffes wohl in der Absicht geschehen sein, um den Umfang des Buches nicht gar zu bedeutend werden zu lassen. Ueberdies müssen ja gerade diese Partien im dritten Bande eingehend abgehandelt werden.

Nicht wenig zum Verständniss des Werkes tragen die vielen trefflich ausgeführten Holzschnitte bei, die Ausstattung ist eine des Inhalts durchaus würdige. Möge uns gestattet sein, das Buch Allen, die sich mit dem Studium der Telegraphie beschäftigen, auf's Wärmste zu empfehlen.

Zürich, 14. December 1877. Dr. A. Tobler.

Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici, esposizione elementare della teoria di Gauss e delle sue applicazioni, dell' ingegnere Galileo Ferraris, Membro della facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali della R. Università di Torino, Incaricato dell' insegnamento della fisica tecnologica nel R. Museo Industriale italiano. Con 68 *incisioni. Torino, Ermanno Loescher,* 1877. 201 *p. Prezzo L.* 5.

Wie das früher besprochene Werk von Matthiessen in seinem ersten Hauptttheile, so stellt sich auch das ebengenannte die Aufgabe, die Theorie von Gauss zu elementarisiren. Dass demnach beide Werke in der Darlegung der allgemeinen Theorie nach Inhalt und Methode im Wesentlichen übereinstimmen, ist wohl zu erwarten; allein in der Ausarbeitung der Details gehen sie ziemlich weit auseinander. Dieses ist theilweise bedingt durch die Anwendungen, die von der allgemeinen Theorie gemacht werden sollen, die, wie schon der Titel des Buches von Ferraris zeigt, bei diesem auf eine Theorie der dioptrischen Instrumente gerichtet sind. Doch sind diese Anwendungen nicht eigentlichster Zweck des Verfassers; er sagt sehr richtig in der Vorrede, dass die trefflichen elementaren Darstellungen der Gauss'schen Theorie, die wir besitzen, viel mehr Ein-

gang gefunden hätten, würden sie sich nicht von Anwendungen auf optische Instrumente meist sehr fern gehalten haben. Das Buch soll also vor allem Andern beitragen zur Einführung der genannten Theorie in die elementaren Lehrcurse der Physik und der praktischen Geometrie und hiernach rechtfertigt sich auch die Wahl der geometrischen Methode, die der Darstellung des Gegenstandes zu Grunde liegt.

Von diesem Gesichtspunkte aus erklären sich einige Beschränkungen, die der Verfasser glaubte sich auferlegen zu müssen, um die Schwierigkeiten nicht über Gebühr zu vergrössern. So vermissen wir die Erwähnung der Listing'schen Symptosen, der Töpler'schen Hauptebenen und Knotenpunkte, die Anwendungen auf Spiegelinstrumente etc., und zwar ungern, da wir überzeugt sind, dass bei der Klarheit und Einfachheit, die den Darstellungen des Verfassers eigen, auch ein Leser von solchen Vorkenntnissen, wie sie das Buch voraussetzt, die Schwierigkeiten nicht gefühlt haben würde.

In der That gelingt es dem Verfasser durch wohlüberlegte Anordnung des Stoffes, mit den elementarsten geometrischen Sätzen auszukommen und doch die Betrachtungen allgemeiner zu halten, als dies in Darstellungen möglich ist, die sich zu lange bei den Betrachtungen conjugirter Axenpunkte und deren Strahlen aufhalten.

So, um diesbezüglich Einiges hervorzuheben, beginnt die Betrachtung über den Fall einer brechenden Fläche mit dem Nachweis des Satzes, dass die Ordinaten des einfallenden und gebrochenen Strahles im Krümmungsmittelpunkte sich verkehrt verhalten wie die Brechungsindices der aneinander grenzenden Medien, wenn man nur Strahlen betrachtet, die unendlich nahe der Axe verlaufen. Mit Hilfe dieses Satzes wird dann gezeigt, dass Strahlen, die aus einem Punkte auslaufen, nach der Brechung wieder in einem Punkte zusammentreffen. Daran knüpfen sich unmittelbar die Beziehungen zwischen Abscissen und Ordinaten beliebig gelegener conjugirter Punkte und zwischen den Winkeln zweier conjugirter Strahlenpaare in denselben. Hiermit sind dann die Eigenschaften conjugirter Ebenen normal zur Axe in voller Allgemeinheit gegeben und die Einführung der Brennebenen als specielle Fälle solcher conjugirter Ebenen unterliegt keiner weiteren Schwierigkeit. Mit der Lösung der Aufgaben: zu einem Strahle den gebrochenen und zu einem Punkte den conjugirten zu finden, schliesst das erste Capitel, dessen Hauptergebnisse in vier Theoremen und in vier Gleichungen übersichtlich zusammengefasst werden (Gleichungen I—IV).

Die aufgestellten Theoreme und Gleichungen werden dann im zweiten Capitel allgemein für eine beliebige Zahl brechender Medien nachgewiesen, die Hauptebenen und Knotenpunkte eingeführt und die Aufgaben über conjugirte Punkte und Strahlen gelöst. Die Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte wird [illegible] die Combination zweier Sy-

steme, deren Haupt- und Brennpunkte gegeben sind, und zwar durch Construction und Rechnung nach zwei verschiedenen Methoden, sowie durch experimentelle Hilfsmittel. Endlich folgt eine ausführliche Exposition des Ausnahmefalles, in welchem die Brennweiten unendlich gross werden, also eines teleskopischen Systems. Hervorheben wollen wir noch den sehr einfachen Beweis für den bekannten Satz vom Verhältniss der beiden Brennweiten auf S. 29 und 30, dem der Satz vom Verhältniss der Neigungswinkel zweier conjugirter Strahlenpaare zu Grunde liegt.

Der zweite Theil unseres Buches, doppelt so stark (135 S.), als der erste, beschäftigt sich mit Anwendungen auf das Auge, auf Linsen und Combinationen von zwei Linsen (Ocular von Ramsden und Campani), die sehr ausführlich discutirt werden, und auf dioptrische Instrumente. Diese theilt der Verfasser in zwei Gruppen, in einfache und zusammengesetzte, und definirt erstere als solche, deren Effect gleichwerthig ist dem einer einzigen Linse von geringer Dicke, die letzteren als solche Instrumente, bei denen dies nicht der Fall ist. Die einfachen Instrumente zerfallen dann weiter in solche mit reellen Bildern und in solche, welche virtuelle Bilder zu erzeugen bestimmt sind (einfache Mikroskope und Brillengläser).

An einem System, bestehend aus Objectiv und Ocular, werden die den zusammengesetzten Instrumenten (Mikroskop und Fernrohr) gemeinsamen Betrachtungen näher ausgeführt und zwar sowohl für den Fall eines convergenten, wie für den eines divergenten Oculars. So werden abgeleitet die Formeln für die Vergrösserung, das Verfahren, um den Augenpunkt zu finden, der Radius des Ocularkreises bestimmt und Ausdrücke abgeleitet für die Helligkeit der Bildpunkte. Hieran schliesst sich eine Definition des Gesichtsfeldes, die etwas von der gewöhnlichen abweicht. Der Verfasser versteht unter Gesichtsfeld die Oeffnung eines Kegels, der seine Spitze im ersten Hauptpunkte des Objectivs hat und jenen Theil des Objectraumes begrenzt, dessen Punkte mit gleicher Helligkeit gesehen werden. Sie entspricht in der That besser den Verhältnissen an wirklich gut ausgeführten Instrumenten, als die gebräuchliche Art, das Gesichtsfeld zu bestimmen durch jenen Kegel, der alle gleichzeitig durch das Instrument sichtbaren Raumpunkte enthält. Auf Grund dieser neuen Definition werden Ausdrücke für die Grösse des Gesichtsfeldes aufgestellt für Instrumente, bei denen der Augenpunkt ausserhalb desselben gelegen ist, und für solche mit innerem Augenpunkt. Den specielleren Ausführungen für Mikroskope und Fernrohre sind noch die Beschreibungen experimenteller Methoden zur Bestimmung der Vergrösserung beigefügt.

Wir brauchen kaum hinzuzufügen, dass sich auch in diesem zweiten Theile die Darstellung des Verfassers als eine vorzüglich klare, einfache und übersichtliche bewährt und so sind wir überzeugt, dass sich das

Buch einen grossen Leserkreis erwerben und eine Lücke in der Literatur der elementaren Dioptrik in trefflichster Weise ausfüllen wird. Wenn wir zum Schluss doch noch Etwas aussetzen, so bezieht sich dieses auf die Ausführung einiger Figuren, die oft die beigesetzten Buchstaben kaum erkennen lässt.

Prag, im November 1877. F. Lippich.

Die Statik der Gewölbe, mit Rücksicht auf ihre Anwendung, von O. Ortmann. Halle, Commissionsverlag von G. Knapp. 123 S.

Dass die bisherigen Theorien der Gewölbe in hohem Grade verbesserungsbedürftig sind, darin wird mit dem Verfasser vorstehenden Werkchens gewiss Jedermann übereinstimmen; dass jedoch die von ihm gelieferte neue Theorie die älteren Theorien zu verdrängen geeignet ist, müssen wir trotz mancher uns entgegengetretener guter Gedanken entschieden in Abrede stellen.

Von einigen untergeordneten Punkten, wie der theoretisch richtigen Auffassung der Belastung eines aus losen Steinen bestehenden Gewölbes in § 1, der weniger begründeten Ansicht in Bezug auf die Belastung übermauerter Gewölbe in § 17 u. s. w., kann hier abgesehen werden. Der Schwerpunkt der ganzen Untersuchungen liegt in den §§ 3 und 4, welche zur Bestimmung des Scheiteldruckes führen. Der Verfasser kommt hier zu dem merkwürdigen Resultat, dass der Horizontalschub im stabilen Gewölbe immer ein Maximum sei. Er findet ferner, dass auch bei unsymmetrischer Form und Belastung in der Scheitelfuge niemals eine Transversalkraft entstehen könne. Leider sind die Entwicklungen, aus welchen solche Schlüsse gezogen werden, keine mathematischen Beweise, sie fallen in eine Kategorie mit manchen anderen Raisonnements, durch welche die Theorie der Gewölbe reformirt werden sollte, die aber Niemand überzeugt haben.

Glaubt der Verfasser wirklich, dass jede auf einer Seite des Scheitels aufgebrachte Belastung nur den Verticaldruck im diesseitigen Kämpfer erhöht, den Verticaldruck im jenseitigen aber ganz unberührt lässt? Denn so ergiebt es sich, wenn man unter der Voraussetzung, dass die Transversalkraft im Scheitel gleich Null sei, die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ für eine Gewölbehälfte aufstellt. Ebenso unwahrscheinlich werden die Verhältnisse der Kämpferdrucklinie und der Kämpferdruckumhüllungslinien. Betrachtet man nun gar den Einfluss einer Einzellast, so zeigt sich, dass die Last sich gar nicht auf beide Widerlager vertheilt: so lange sie vor dem Scheitel liegt, gleichgiltig an welcher Stelle, reagirt nur das diesseitige Widerlager; im Augenblicke aber, wo die Last den Scheitel passirt, springt die ganze der Last gleiche Reaction von diesseits nach jenseits über.

Auch die Ausführungen der §§ 23 und 29, in welchen der Verfasser sich darüber verbreitet, inwieweit das wirkliche Gewölbe mit dem früher vorausgesetzten Körpersystem übereinstimmt, halten wir keineswegs für überall zutreffend. Der Verfasser selbst giebt zu, dass ein in den Fugen durch Cement gebundenes und sonst angemessen behandeltes Gewölbe nicht nach seiner Theorie beurtheilt werden kann. Für ein nur auf Druck und Schub beanspruchtes Gewölbe lässt sich aber der zwischen Cementverband und Mörtelverband etablirte Unterschied schwerlich aufrecht erhalten.

In Bezug auf das Aeussere des Buches ist zu bemerken, dass weder ein Inhaltsverzeichniss, noch Capitelüberschriften die Orientirung erleichtern, ja sogar die Jahreszahl des Erscheinens fehlt. Trotz Allem müssen wir anerkennen, dass viel Fleiss und Liebe auf das Werkchen verwendet worden ist. Wir würden uns freuen, wenn es dem Verfasser gelingen sollte, aus dem vorgeführten Guten im Verein mit neuen Gedanken ein einheitliches Ganzes zu schaffen.

Stuttgart. WEYRAUCH.

Von den Elementen und Gundgebilden der synthetischen Geometrie. Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Raumanschauung, von K. RUDEL, Rector der königl. Gewerbeschule in Bamberg. Bamberg 1877.

Vorliegendes Schriftchen, 24 Seiten lang, hat den Zweck, den Nachweis zu liefern, dass unsere Anschauungsform nicht die einzige, die höchste und letzte sein wird, dass die Möglichkeit der Anschauungsformen unbegrenzt, ja dass die Erscheinungswelt höchst wahrscheinlich weit über den Kreis unserer Anschauungsform hinausgeht; es geht davon aus, dass unser Raumbegriff lediglich eine durch unsere Existenz als Raumtheile bedingte Anschauungsform ist. — Die beiden Theile, in welche es zerfällt, haben die Ueberschrift: „Betrachtungen vom Standpunkte gewöhnlicher Raumanschauung aus" (S. 5—12) und „Betrachtungen vom Standpunkte einer höheren Form der Raumanschauung aus" (S. 15—26). Der erste Theil bespricht in durchaus bekannter Art die Grundgebilde der synthetischen Geometrie; er theilt sie in Grundgebilde der ersten Stufe (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel), der zweiten Stufe (die Ebene, als Inbegriff aller Punkte und Strahlen, und das Strahlenbündel) und der dritten Stufe (der Raum). Demgemäss unterscheidet der zweite Theil Wesen der zweiten und dritten Stufe, d. h. solche, die als Theile einer Ebene und solche, die als Theile des Raumes existiren; zu den letzteren gehören wir Menschen. Fortschreitend wird nun ein *Grundgebilde der* vierten Stufe, das All, angenommen, in welchem die

Wesen der vierten Stufe sich befinden. Das Mittel, einzelne Formen der Anschauungsweise dieser Wesen zu finden, sind Analogieschlüsse. So wenig Wesen der zweiten Stufe, für welche nur die Geometrie der Ebene vorhanden ist, eine Vorstellung von sich kreuzenden Geraden gewinnen können, so wenig können wir die den Wesen der vierten Stufe angehörende Vorstellung von sich kreuzenden Ebenen, zu denen der Verfasser durch Analogie gelangt, uns verschaffen. — Wie die Geometrie der Wesen der zweiten Stufe aber nur ein Theil unserer Geometrie ist, so muss diese nur ein Theil derjenigen der Wesen der vierten Stufe sein. Auch diese müssen irgend zwei Punkte des Alls durch irgend eine Gerade verbinden können. Nimmt man diese beiden Punkte aber auf zwei sich kreuzenden Ebenen und denkt sich durch die verbindende Gerade eine dritte Ebene gelegt, welche die beiden ersten in zwei Geraden schneidet, so müssen diese selbst sich schneiden; also hätten die sich kreuzenden Ebenen einen Punkt gemeinsam. Der Begriff solcher Ebenen ist also unmöglich, er widerspricht unseren geometrischen Vorstellungen, die einen Theil der geometrischen Vorstellungen der Wesen der vierten Stufe bilden müssen. Da aber aus dem Begriffe sich kreuzender Ebenen die übrigen Formen der Anschauungsweise der Wesen der vierten Stufe gefolgert werden, so fallen diese mit jenem.

Daher ist der Versuch nicht gelungen, den Kreis unserer Anschauungsform zu erweitern und uns einen Einblick in eine über denselben hinausgehende Erscheinungswelt zu verschaffen.

MILINOWSKI.

Das Problem der magischen Systeme von Dr. THEOD. HUGEL, Rector der Gewerbeschule zu Neustadt a. d. H. Verlag von A. H. Gottschick-Witter's Buchhandlung, Neustadt a. d. H. 1876. 4⁰. 48 S.

Werden p^n Zahlen in Gruppen von je p Zahlen geordnet, so dass durch jeweilige Addition der Glieder einer Gruppe stets die gleiche Summe erscheint, so nennt der Verfasser diese Anordnung ein magisches System n^{ter} Ordnung. Diese Definition wird dadurch, dass das System zweiter Ordnung in den gewöhnlichen magischen Quadraten erkannt wird, noch näher erläutert; doch wird dadurch nur um so deutlicher, dass etwas Wesentliches in ihr fehlt, nämlich die Anzahl der Gruppen, in welcher jede einzelne Zahl nur vorkommen darf und vorkommen muss. Allerdings helfen §§ 2, 25 und 37 diesem Mangel ab, indem sie die Bedingungsgleichungen kennen lehren, unter deren Voraussetzung ein magisches Quadrat, ein magischer Würfel, ein magisches System höherer Ordnung vorhanden ist; doch wäre eine genauere Anfangsdefinition immerhin wünschenswerth gewesen. Ein weiterer Wunsch, dessen Erfüllung Herr Hugel uns gleich allen seinen Vorgängern auf dem Gebiete

zahlentheoretisch-combinatorischen Untersuchungen schuldig bleibt, ist folgender: wir erfahren nirgends, wie viele magische Anordnungen der p^n Elemente möglich sind, beziehungsweise ob man sich theoretisch darüber Gewissheit verschaffen kann, dass man wirklich alle möglichen Anordnungen gebildet hat. In der Hervorhebung dieser Lücke soll keine Bemängelung der interessanten uns vorliegenden Schrift vorhanden sein; wir beabsichtigen vielmehr nur in erster Linie den Verfasser derselben auf das soeben ausgesprochene muthmasslich recht schwierige, seiner Aufmerksamkeit nicht unwürdige Problem hinzuweisen. Seine durch jahrelange Beschäftigung mit dem Gegenstande erworbene Gewandtheit dürfte ihn gerade besonders befähigen, auch diese Aufgabe zu erledigen, ohne welche die Untersuchung nicht abgeschlossen ist, so wenig als es genügt, irgend eine Gleichung — sei sie bestimmt oder unbestimmt — auflösen zu können, ohne den Beweis zu liefern, dass man alle Wurzeln angegeben hat. Die beschränktere Aufgabe, irgendwelche magische Systeme zu bilden, löst dagegen Herr Hugel durch Abzweigung einer grossen Anzahl von Unterfällen, bei deren jedem das eigentliche magische System durch feldweise Addition von n anderen an sich nicht magischen Systemen, gebildet durch die sogenannten Componenten des Systems, hervorgebracht wird. Es ist das dem Gedanken nach eine ähnliche Methode, wie sie Sauveur 1710 der Pariser Akademie mittheilte. Herr Hugel hat sie in selbstständiger Weise nacherfunden und durch Anwendung der Namen und Zeichen der modernen Combinatorik, vor Allem also der Determinanten, dem heutigen Gedankengange näher zu bringen gewusst.

Cantor.

Principii elementari sulle probabilità eposti da G. B. Marsano, professore di matematiche nella R. Università e nel R. Istituto tecnico di Genova. Genova, Tipografia del R. Istituto Sordo-muti 1876. 153 S.

Wenn irgend ein Capitel der Mathematik vorzugsweise dazu geeignet ist, dem Selbststudium des Anfängers überlassen zu bleiben, so ist es dasjenige, welches die elementaren Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält. Einestheils sind die in diesem Capitel zu behandelnden Aufgaben von einem ziemlich allgemein fesselnden Interesse, da es wohl Wenige giebt, welche Ungewisses nicht in Spannung erhält, in um so grösserer, wenn an das Ereigniss überdies ein unmittelbarer Vermögensvortheil oder Nachtheil, Gewinn oder Verlust sich knüpft. Anderntheils sind die Grenzen des ohne höhere Kenntnisse Erreichbaren hier ziemlich weit gesteckt und die Entwickelung des binomischen Satzes genügt, um bereits ziemlich verwickelt aussehende Fragen zu beantworten. Von diesem elementaren Standpunkte aus hat Herr Marsano den Gegenstand

zu behandeln gewusst. Es sind die in allen ähnlichen Schriften wiederkehrenden Aufgaben, denen wir hier begegnen. Zahlenlotto, Kartenspiel, Würfel, Urnen mit verschiedenfarbigen Kugeln bieten das äusserliche Gewand für die combinatorischen Zusammenstellungen, von denen zuerst einige bestimmte Beispiele durchgesprochen werden, worauf in einer zweiten, mit S. 51 beginnenden Abtheilung die allgemeineren Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt werden, jeder wieder an Beispielen geprüft und beleuchtet. Von Einzelheiten wäre etwa hervorzuheben, dass auf S. 25 die Wahrscheinlichkeit, mit 12 ternenmässig besetzten Nummern im Zahlenlotto mindestens eine Terne zu gewinnen, zu 0,015929 berechnet ist gegenüber von dem falschen Ergebnisse $\frac{1}{35,4}$, welches in einem sonst mit Recht geschätzten Elementarwerke aus unrichtigen Voraussetzungen abgeleitet worden ist. Der Styl des Verfassers ist aussergewöhnlich klar, vielleicht etwas zu breit; allein wir können darin nicht gerade einen tadelnswerthen Fehler finden, vorausgesetzt, dass der Leser, nur auf das Büchlein angewiesen, sich mit den Anfangsgründen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt machen will. Was allerdings ein etwa vorhandener Lehrer noch mündlich hinzusetzen will, ohne weit über die stofflichen Grenzen der Schrift hinauszugreifen, ist uns unerfindlich.

Cantor.

Leitfaden der Elementarmathematik von Dr. Liebe und v. Lühmann. III. Thl.: Trigonometrie, Stereometrie, sphär. Trigonometrie. Mit 2 Figurentafeln. Berlin, Simion. 1877. Preis 1 Mk. 25 Pf.

Wie aus früheren, seiner Zeit sehr gut recensirten Veröffentlichungen der Herren Verfasser (Planimetrie, trigon. Aufgaben, geometr. Constructionsaufgaben) ersichtlich, lassen es sich dieselben angelegen sein, nach und nach sämmtliche Gebiete der elementaren Mathematik Schülern und Lehrern in einer Weise vorzuführen, welche so ganz geeignet ist, Erstere anzuregen, bei Letzteren Accomodation an diese Lehrmethode zu erzielen. Ganz dasselbe gilt von dem hier vorliegenden III. Theile des Leitfadens der Elementarmathematik. In richtigem Stufengange und ohne die praktische Seite ausser Acht zu lassen, wird zunächst die ebene Trigonometrie behandelt und dem Satze von vier aufeinanderfolgenden Stücken eines Dreiecks, den Gauss'schen Formeln und deren Folgerungen, wie auch ausser den Hauptfällen für die Dreiecksberechnungen der Auflösung derjenigen Dreiecksaufgaben, welche sich nicht unmittelbar auf diese vier Hauptfälle zurückführen lassen, die erforderliche Aufmerksamkeit geschenkt. Dass übrigens die vielfach beliebte Bezeichnung $\sin\alpha^2$ statt $\sin^2\alpha$ nicht immer unzweifelhaft richtig ist, mag der S. 19 Z. 4 v. u. angeführte Werth $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$ bes[illegible] Gl. 9) hätte auch den Werth

$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, resp. $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und damit Gl. 10) die reciproken Werthe mit enthalten können. Doch sind das nur nebensächliche Bemerkungen, welche der im Ganzen recht guten Anlage keinen Eintrag machen. Dass endlich S. 9 Z. 3 v. u. $\sin(\alpha+\beta)$ statt $\sin(\alpha-\beta)$ steht, ist ersichtlich als Druckfehler zu nehmen.

Im zweiten Abschnitt wird in gedrängter Kürze, aber ohne Nachtheil für den Unterricht das Pensum der Stereometrie behandelt, da die mannichfaltigen und gut ausgewählten Uebungssätze das ersetzen, was sich in anderen Lehrbüchern als besondere Lehrsätze erwähnt und bewiesen findet, während es hier dem Schüler überlassen ist, auf Grund des Vorangegangenen die Richtigkeit derselben nachzuweisen. Durch ihre Einfachheit zeichnen sich die Beweise für den Euler'schen Lehrsatz (§ 38), für das Prismatoid (§ 50) — das noch in vielen Lehrbüchern trotz seiner umfassenden Bedeutung ignorirt wird —, wie für die Guldin'sche Regel (§ 81) aus. § 6 Z. 3 v. u. ist CFD statt CAF zu lesen.

Der dritte Abschnitt enthält die wichtigsten Sätze der sphärischen Trigonometrie, einschliesslich der Neper'schen Regel (§ 4), der Gauss-schen Gleichungen, der Neper'schen Analogien und der L'Huilier-schen Formel. Den Schluss bildet die Anwendung der Lehrsätze auf die Berechnung der schiefwinkligen sph. Dreiecke und der Radien der einem solchen um- und einbeschriebenen Kreise. Eine grössere Ausdehnung der Aufgaben in diesem Sinne würde gewiss allseits willkommen geheissen.

Vorstehendes Lehrbuch kann somit gleich den früheren Lehr- und Uebungsbüchern der Herren Verfasser mit Recht bestens für den Unterricht empfohlen werden.

Kaiserslautern. HUGEL.

Berichtigung.

S. 16 Z. 23 statt: S. 150 lies: S. 152.
S. 16 Z. 26 die Worte: „*Parte prima. Della teoria Algebraica delle Curve*" fallen weg.

Bibliographie

vom 1. Mai bis 30. Juni 1878.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 11. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1877, II. Ebendas. 1 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturwissensch. Classe. 38. Bd. Wien, Gerold. 52 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1877. I. Abth., 5., 6. u. 7. Heft. Wien, Gerold. 13 Mk. 40 Pf.

—, II. Abth., 7. Heft. Ebendas. 3 Mk.

—, III. Abth., 6. u. 7. Heft. Ebendas. 4 Mk.

—, Register zu Bd. 65—75. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Astronomisches Jahrbuch für 1880, mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (172) für 1878. Herausgegeben von F. Förster und Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1877, herausgegeben von Lamont. München, Franz. 1 Mk.

Jahresbericht der badischen meteorologischen Centralstation Carlsruhe. Nr. 9 für das Jahr 1877. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 50 Pf.

Kleines nautisches Jahrbuch für 1879. Bremerhafen, v. Vangerow. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von Schönfeld und Winnecke. 13. Jahrg. 1878, Heft 1. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v. Ohrtmann, Müller u. Wangerin. 8. Bd. Jahrg. 1876, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fortschritte der Physik. 29. Bd. Jahr 1873, redigirt von Schwalbe. 2. Theil. Berlin, G. Re[illegible] 13 Mk. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Ciamician, G., Ueber die Spectren der chemischen Elemente und ihrer Verbindungen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

Exner, K., Ueber die Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen und Verwandtes. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Lippich, F., Ueber Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Pfaundler, L., Ueber die Anwendung des Doppler'schen Princips auf die fortschreitende Bewegung leuchtender Gasmolecule. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

——, Ueber die geringste absolute Zahl von Schallimpulsen, welche zur Hervorbringung eines Tones nöthig ist. (Ak.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Schwackhöfer, F., Ueber einen neuen Apparat zur directen volumetrischen Bestimmung der Luftfeuchtigkeit. (Ak.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Streintz, H. u. F., Die elektrischen Nachströme transversal magnetisirter Eisenstäbe. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8. Aufl., bearbeitet von L. Pfaundler. 2. Bd., 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Melde, F., Bildliche Darstellungen für den Vortrag der Experimentalphysik. 1. Abth.: Strahlenbündel und Reflexion des Lichts. Cassel, Fischer. 20 Mk.

Dühring, E., Neue Grundsätze zur rationellen Physik und Chemie. Leipzig, Fues. 3 Mk.

Dorner, H., Leitfaden d. Physik. 2. Aufl. Hamburg, Meissner. 1 Mk. 20 Pf.

Reis, P., Lehrbuch der Physik. 4. Aufl. Leipzig, Quandt & Händel. 7 Mk. 80 Pf.

Schwaab, W., Die Hageltheorien älterer und neuerer Zeit. Cassel, Hühn. 8 Mk.

Hann, J., Die Temperatur von Wien nach hundertjährigen Beobachtungen. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Weyprecht, C., Nordlichtbeobachtungen der k. k. arktischen Expedition 1872—1874. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 40 Pf.

Nordmann, M., Ueber das Abel'sche Integral erster Gattung und die ihm entsprechenden Abbildungsprobleme. Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 20 Pf.

Graf, J., Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Bern, Huber & Comp. 1 Mk. 80 Pf.

Krause, R., Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connex zweiter Ordnung und erster Classe entspricht. Jena, Deistung. 60 Pf.

Weyr, E., Bestimmung der Flächen, deren beliebige Theile aus zwei festen durch gewisse Kegel projicirt werden. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Handel, O., Das räumliche Analogon eines Steiner'schen Problems der Ebene. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 14 Mk. 10 Pf.

Jüdt, C., Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. 2. Aufl. Ansbach, Seybold. 80 Pf.

Güntner, G., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Realschulen. 2. Aufl. Wien, Gräser. 3 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Jolly, Ph. v., Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. (Akad.) München, Franz. 60 Pf.

Harder, P., Ueber die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen. Hamburg, Meissner. 4 Mk.

Schell, A., Das Stand-Aneroidbarometer (System Arzberger-Starke). (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

Albrecht, M. und S. Vierow, Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hilfswissenschaften f. d. königl. preussischen Navigationsschulen. 5. Aufl. Berlin, v. Decker. 16 Mk. 50 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd.: Höhere Geodäsie. Stuttgart, Metzler. 10 Mk.

Gauss, G., Die Theilung der Grundstücke insbesondere bei rechtwinkligen Coordinaten. Berlin, v. Decker. 5 Mk.

Selbt, W., Präcisionsnivellement der Elbe. Berlin, Schlesier. 10 Mk.

Weyprecht, C., Astronomische und geodätische Bestimmungen der k. k. arktischen Expedition 1872—1874. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Zelbr, K., Ueber die Bahn des Planeten (162) Laurentia. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Weber, W., Elektrodynamische Massbestimmungen insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

LIPS

PFAI

SCH'

STRI

MÜL

MEL

DÜH

DOS
REII

SCH

HAN

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Von Dr. C. NEUMANN. Leipzig, Teubner. 1877. 368 S. 8°.

Die vorliegenden Untersuchungen Neumann's gehören ohne Zweifel zu den bedeutendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Potentialtheorie und reihen sich den klassischen Arbeiten von Green, Gauss und Dirichlet in würdiger Weise an. Sie führen dieser Theorie eine Fülle neuer, interessanter und weitreichender Resultate zu und zeichnen sich ebenso durch eine ungemein klare und durchsichtige Darstellung, als durch Strenge und Eleganz der Beweisführung aus.

Ganz besonders hat es uns gefallen, dass der Verfasser jedem einzelnen Capitel eine Einleitung vorangeschickt hat, welche den Leser in den Stand setzen soll, „sich über Inhalt und Tendenz des ganzen Werkes eine deutliche Vorstellung zu bilden". Als ein weiterer Vorzug des Neumann'schen Werkes, der nicht hoch genug angeschlagen werden kann, sei gleich hier erwähnt, dass der Verfasser überall, wo es nöthig ist, nachdrücklich und wiederholt hervorhebt, welchen Einschränkungen die Giltigkeit der erhaltenen Resultate unterliegt und was in manchen Fällen noch zu wünschen übrig bleibt. Besonders lobend sei auch die äusserst zweckmässige und angemessene Bezeichnung hervorgehoben, die, einmal eingeführt, consequent durch das ganze Werk beibehalten wird. Dies trägt ungemein zur Orientirung des Lesers bei. So wird z. B. eine geschlossene Curve oder Fläche überall mit σ bezeichnet, der Raum innerhalb derselben mit $\mathfrak{J}$, ausserhalb mit $\mathfrak{A}$, die Punkte der Gebiete $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$ resp. mit i, a, die auf σ gelegenen mit σ oder s. Ist von zwei Punkten der Kategorie a oder i die Rede, so wird im ersten Falle der eine mit a, der andere mir α, im zweiten Falle der eine mit i, der andere mit j bezeichnet. Ist von irgend einer in der Ebene, resp. im Raum ausgebreiteten Function F die Rede, so werden ihre Werthe in den Punkten a, σ, i resp. durch F_a, F_σ, F_i bezeichnet. Auch wir wer-

den uns dieser Bezeichnungen im Folgenden bedienen. Besonders erwähnenswerth sind hier noch die auf S. 130 eingeführten Bezeichnungen $\bar{\omega}_s$ und δ_s, sowie die Schreibweise

$$0 \underset{\text{(sic!)}}{<} r \leq r',$$

wo das hinzugefügte *(sic!)* besonders hervorheben soll, dass nicht $\leq$, sondern wirklich $<$ gemeint ist. Auch durch einen passend gewählten Vergleich weiss der Verfasser oft unsere Vorstellungen zu fixiren und dem Vorgetragenen eine ungemeine Anschaulichkeit zu geben, z. B. in der zweiten Note S. 170 oder in der Note S. 303. An der ersten Stelle soll man sich nämlich eine Curve oder Fläche σ in irgend zwei Theile α und β zerlegt denken, von denen jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen mag. Hierzu bemerkt der Verfasser in der Note: „Ist z. B. σ eine Kugelfläche und denken wir uns auf dieser Kugelfläche die Karte unserer Erdoberfläche aufgemalt, so können wir, wenn es uns beliebt, unter α alle mit Wasser bedeckten Gebiete, andererseits unter β den Continent und die Inseln verstehen."

Die Strenge und Eleganz der Neumann'schen Beweisführung zeigt sich besonders, wenn man die älteren Beweise bereits bekannter Sätze mit den von Neumann beigebrachten vergleicht: der Verfasser weiss die Sätze immer auf die Quelle zurückzuführen, aus der sie sich am einachsten und natürlichsten ergeben, wie wir dies in dem nun folgenden Referat über den Inhalt zu constatiren mehrfach Gelegenheit haben werden.

Ueber den Inhalt sei zunächst Folgendes im Allgemeinen bemerkt. Der Verfasser unterscheidet zwei Potentiale, das Newton'sche und das logarithmische. Während der Theorie des ersteren die in der Natur vorhandene Materie zu Grunde liegt, für welche das Newton'sche Gesetz gilt, handelt die Theorie des logarithmischen Potentials bekanntlich von einer fingirten Materie von der Beschaffenheit, dass irgend zwei Massentheilchen derselben sich mit einer Kraft anziehen, die ihrer Entfernung (nicht dem Quadrat der Entfernung) umgekehrt proportional ist. Wenn das Newton'sche Potential zweier Massentheilchen μ, m den Werth $\frac{\mu m}{r}$ besitzt, hat das logarithmische Potential demnach den Werth $\mu m \log \frac{1}{r}$. Bei der Theorie des logarithmischen Potentials beschränkt sich der Verfasser auf die Ebene, d. h. er behandelt nur den Fall, dass jene fingirte Materie auf beliebige Weise in der Ebene, nicht im Raum vertheilt sei. Unter dieser Voraussetzung findet nämlich eine merkwürdige Analogie zwischen beiden Theorien statt, indem den meisten Sätzen der einen Theorie ein analoger der andern entspricht. Der Verfasser behandelt beide Theorien meistens neben einander und beide „mit derselben Sorgfalt".
Die [illegible] S. 3, in welcher die Wichtigkeit der Theorie des logarithmi-

schen Potentials hervorgehoben wird, wird nicht wenig dazu beitragen, dass auch der Leser seinerseits beiden Theorien das gleiche Interesse entgegenbringt. Je zwei in beiden Theorien einander entsprechende Sätze werden vom Verfasser neben einander gestellt, gerade so, wie dies nach Steiner's Vorgang in der neueren Geometrie für die nach dem Princip der Dualität zusammengehörigen Lehrsätze üblich ist. Oft lassen sich übrigens beide Sätze mit Hilfe gewisser, vom Verfasser sehr passend gewählter „Collectivbezeichnungen" in einen Satz verschmelzen. So wird z. B. die Zahl π in der Ebene und die Zahl 2π im Raume mit einem und demselben Buchstaben $\bar{\omega}$ bezeichnet. Dieser Bezeichnung werden auch wir uns im Folgenden bedienen.

Aber nur im Ganzen läuft die Theorie des Newton'schen Potentials, wie der Verfasser sich ausdrückt, der des logarithmischen parallel: nicht jeder Satz der einen Theorie lässt sich unmittelbar auf die andere übertragen, ja einzelne Sätze der einen Theorie verlieren für die andere geradezu ihre Giltigkeit. So zeigt sich z. B. ein charakteristischer Unterschied zwischen dem Newton'schen und dem logarithmischen Potential darin, dass ersteres für unendlich ferne Punkte immer Null wird, das zweite dagegen unendlich gross, wenn nicht die Summe der Massen, die das Potential zusammensetzen, Null ist. Gerade dieser Unterschied ist die Ursache von mancherlei „Discrepanzen" in den beiden Theorien.

Wir fassen nunmehr den Inhalt der einzelnen Capitel näher ins Auge.

Gleich das erste Capitel bereichert die Potentialtheorie mit einer Reihe interessanter allgemeiner Sätze von grosser Tragweite, von denen wir in erster Linie den folgenden hervorheben, der im dritten Capitel für die Theorie der elektrischen Vertheilung wiederholt mit Vortheil verwerthet wird:

Theorem *(C)*.

Denken wir uns einen schalenförmigen Raum $\mathfrak{C}$, der von zwei **beliebigen** geschlossenen Flächen begrenzt ist, und denken wir uns ferner zwei Massensysteme, die **ausserhalb** dieses Raumes $\mathfrak{C}$ gelegen und durch denselben **von einander getrennt** sind, so kann die Gesammtwirkung dieser beiden Systeme **innerhalb** des Raumes $\mathfrak{C}$ nicht überall $= 0$ sein, es sei denn, dass die Wirkungen dieser beiden Systeme daselbst **einzeln** $= 0$ sind.

In den neun ersten Paragraphen werden zunächst die bekannten Sätze über das Newton'sche Potential von Laplace, Green, Gauss aufgestellt, meistens nur historisch, ohne Beweis, indem zugleich jeder dieser Sätze auf das logarithmische Potential übertragen wird. Es verdient hier bemerkt zu [illegible] "asser für den Gauss'schen,

die Constanz des Potentials betreffenden Satz (Allgemeine Lehrsätze etc., Art. 21) einen neuen Beweis giebt, der sich durch seine Einfachheit und Strenge auszeichnet. Derselbe stützt sich auf die bekannte Entwickelung des Potentials $V = V_0 + Fr + Gr^2 + \ldots$, woraus sich der in Rede stehende Satz ohne Weiteres ergiebt, unter Anwendung des vom Verfasser bei dieser Gelegenheit bewiesenen Hilfssatzes:

„Ist die Function $f(r) = A + Br + Cr^2 + \ldots$ innerhalb eines beliebig kleinen Intervalls $r = 0 \ldots r = r'$ constant, so wird sie überall constant sein, so weit die angegebene Entwickelung giltig ist."

Darauf werden eine Reihe neuer, auch für das Folgende wichtiger allgemeiner Sätze über die extremen Werthe des Potentials innerhalb eines Gebiets entwickelt, aus denen jenes Theorem (C'), sowohl für den Raum, als für die Ebene, schliesslich ohne Weiteres resultirt. Was den Beweis jener Sätze über die extremen Werthe des Potentials betrifft, so beruht derselbe lediglich auf dem vom Verfasser zuvor bewiesenen Satze, dass das Potential gegebener Massen in einem ausserhalb dieser Massen befindlichen Punkte weder ein Maximum, noch ein Minimum haben kann, und unterscheidet sich insofern vortheilhaft von dem Beweis, den Gauss im Art. 26 der Allgem. Lehrs. für einen speciellen Fall eines dieser Sätze gegeben hat. Der Gauss'sche Beweis benutzt nämlich diejenige geschlossene Fläche, welche durch die Gleichung $V = Const.$ dargestellt ist, also „eine Fläche, die ebenso unbekannt ist, als das Potential selber". Aehnlich verfährt Dirichlet (S. 134 der vom Referenten herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen über die Potentialtheorie). Neumann bemerkt hierüber in der Vorrede: „Uebrigens können solche unzulänglich determinirte Flächen in doppelter Weise auftreten, indem sie entweder die gegebene Grundlage betreffen, von welcher die Untersuchung ausgeht, oder aber im Laufe der Untersuchung als Hilfsmittel für den weiteren Fortgang derselben in Anwendung kommen. ... Offenbar sind solche ganz nebelhaft vorschwebende Flächen im zweiten Falle nicht minder unbequem, als im ersten. Denn wenn z. B. Gauss a. a. O. auf die Fläche $V = Const.$ einen der Green'schen Sätze in Anwendung bringt, so wird man zu beachten haben, dass diese Sätze nicht ohne Weiteres auf jede beliebige Fläche anwendbar sind und dass also ihre Anwendung auf die Fläche $V = Const.$ nicht gutgeheissen werden darf ohne eine vorhergehende Untersuchung derselben. Ja noch mehr! Ueberall, wo solche unzulänglich definirte Flächen nur als Anfangsglieder der Untersuchung auftreten, kann die in den Resultaten erzeugte Unsicherheit nachträglich durch Hinzufügung geeigneter Determinationen beseitigt werden, was offenbar nicht mehr möglich ist bei den als Operationsmittel eingeführten Flächen. ... Aus diesem Grunde habe ich in dem vorliegenden Werke die Benutzung unbekannter Flächen als eines *Operationsmittels* zu vermeiden und die betreffenden Gauss'schen und

Dirichlet'schen Argumentationen durch andere zu ersetzen versucht, welche von diesem Uebelstande frei sind. Hierdurch glaube ich in den einschlagenden Gebieten eine etwas grössere Sicherheit erreicht zu haben, als es bisher der Fall war."

Aus derselben Quelle, nämlich aus den Sätzen über die Extreme, leitet Neumann noch andere wichtige Sätze auf die einfachste Weise ab. Folgende drei mögen hier mitgetheilt werden, weil sie bei fast allen folgenden Untersuchungen eine grosse Rolle spielen.

Theorem ($A.^{add}$).

Sollen die Massen eines Potentials V **ausserhalb** des Gebietes 𝔄 oder auf seiner Grenze (d. i. auf σ) liegen **und eine gegebene Summe besitzen**, und sollen ferner die V_σ von vorgeschriebenen Werthen f_σ nur durch eine unbestimmte additive Constante differiren, so ist hierdurch V eindeutig bestimmt für alle Punkte von 𝔄.

Es wird an einem einfachen Beispiel nachgewiesen, dass das analoge Theorem für den Raum 𝔍, welches mit ($J.^{add}$) zu bezeichnen wäre, nicht existirt.

Theorem ($J.^{abs}$).

Bezeichnet V das Potential irgendwelcher unbekannten **ausserhalb** des Gebietes 𝔍 oder auf seiner Grenze gelegenen Massen, so wird dieses Potential für alle Punkte **innerhalb** 𝔍 völlig bestimmt, sobald nur seine Werthe auf der Grenze von 𝔍 gegeben sind.

Für den Raum lässt sich der dem letzten analoge Satz für das Gebiet 𝔄 beweisen:

Theorem ($A.^{abs}$).

Bezeichnet V das (Newton'sche) Potential irgendwelcher unbekannten **ausserhalb** des Gebietes 𝔄 oder auf seiner Grenze gelegenen Massen, so wird dieses Potential für alle Punkte **innerhalb** 𝔄 völlig bestimmt sein, sobald nur seine Werthe auf der Grenze von 𝔄 (d. i. auf σ) gegeben sind.

Das letzte Theorem bietet uns ein Beispiel dar, dass nicht jeder Satz der einen Theorie sich unmittelbar auf die andere übertragen lässt. Der Beweis desselben beruht nämlich gerade darauf, dass V für unendlich ferne Punkte Null ist, und ist mithin für das logarithmische Potential nicht mehr anwendbar. Man wird daher zunächst zweifelhaft sein, ob das Theorem ($A.^{abs}$) auch in der Ebene Giltigkeit hat. Im dritten Capitel erhalten wir Aufschluss hierüber.

In den Bezeichnungen der genannten Theoreme durch ($A.^{add}$) u. s. w. manifestirt sich wieder die grosse Meisterschaft des Verfassers, schon

Massen, so besitzt die Summe dieser Massen den Werth $\left(\int V\gamma\, ds\right):\Gamma$, das Integral ausgedehnt über alle Elemente von σ."

Hieraus resultirt ohne Weiteres der Satz:

„Sollen sämmtliche Massen eines Potentials V theils auf, theils innerhalb σ liegen und sind ferner die Werthe von V auf σ gegeben, so wird hierdurch die Summe jener Massen vollständig bestimmt sein, ausser im singulären Fall."

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun das Theorem ($A.^{abs}$) für die Ebene ebenso beweisen, wie im ersten Capitel für den Raum, mit Ausnahme des singulären Falles. Für den singulären Fall ist das Theorem in der That nicht mehr richtig, wie an einem Beispiel gezeigt wird.

Der Verfasser hebt hervor — wir führen dies an, um zu zeigen, wie gründlich und gewissenhaft derselbe zu Werke geht —, dass diese Methode allerdings einem gewissen Bedenken unterliege, indem die Existenz der Function γ nicht durch mathematische Conclusionen verbürgt sei, sondern im Raum nur auf unseren physikalischen Vorstellungen, in der Ebene sogar nur auf der Vorstellung beruhe, dass für das fingirte Fluidum in der Ebene Analoges gelten müsse, wie für das elektrische Fluidum im Raume. Um dieses Bedenken zu heben, giebt der Verfasser am Schlusse des dritten Capitels noch den Gauss'schen Beweis (Allgem. Lehrs. Art. 29—32) des Satzes: „Die Masseneinheit des elektrischen Fluidums lässt sich auf einer geschlossenen Fläche σ stets so ausbreiten, dass ihr Potential σ überall constant ist", indem er dabei bemerkt, dass der Beweis sich offenbar auf das logarithmische Potential ohne Weiteres übertragen lasse.

Das vierte Capitel handelt von den sogenannten Doppelbelegungen. In allen Punkten einer gegebenen Curve oder Fläche σ denke man sich die Normalen auf σ errichtet, und zwar in allen Punkten nach derselben Seite hin; diese Seite möge die positive Seite von σ genannt werden. Auf allen diesen Normalen denke man sich dieselbe unendlich kleine Strecke λ aufgetragen; so entsteht eine neue mit σ parallel laufende Curve, resp. Fläche σ'. Die beiden Curven, resp. Flächen σ und σ' mögen nun stetig mit Masse belegt sein und zwar so, dass die auf zwei correspondirenden Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ (d. h. solchen, die zwischen denselben Normalen liegen) vorhandenen Massen $-\zeta\, d\sigma$ und $\zeta' d\sigma'$ einander entgegengesetzt gleich sind. Das in solcher Weise mit Masse belegte Curven- resp. Flächenpaar nennt der Verfasser — nach Helmholtz' Vorgang — eine Doppelbelegung und das Product $\lambda\zeta=\mu$ das Moment derselben. Für das Potential derselben auf einen beliebigen *Punkt* x ergiebt sich die Gleichung

$$W_x = \int \frac{\mu \cos\theta \, d\sigma}{E^h}.$$

Hier bedeutet E die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von x, θ den Winkel, den die positive, auf dem Elemente $d\sigma$ errichtete Normale mit E bildet, und h ist in der Ebene $=1$, im Raume $=2$. Im ersten Theil des vierten Capitels werden die allgemeinen Eigenschaften der Function W_x für den Fall, dass σ geschlossen ist, aufgestellt. Bezeichnen W_{as} und W_{ai} die Grenzwerthe von W_a und W_i für den Fall, dass die Punkte a, resp. i sich σ nähern, so besitzt die Function W, vorausgesetzt, dass μ stetig ist, folgende vier allgemeine Eigenschaften:

1. die W_s sind auf σ überall stetig;
2. es ist $W_{as} = W_s - \tilde{\omega}\mu_s$;
3. es ist $W_{is} = W_s + \tilde{\omega}\mu_s$;
4. der Differentialquotient von W_x ist überall eine stetige Function.

Helmholtz, dessen betreffende Untersuchungen in einem besondern Paragraphen wortgetreu mitgetheilt werden, hat nur die W_{as} mit den W_{is} verglichen und gefunden, dass $W_{is} - W_{as} = 4\pi\mu_s$ (für den Raum). Neumann geht einen Schritt weiter, indem er — was für die Untersuchungen des folgenden Capitels von der grössten Wichtigkeit ist — auch die Beziehungen der Grenzwerthe W_{as} und W_{is} zu den directen Werthen W_s darlegt. Auch werden die Modificationen angegeben, denen jene Eigenschaften unterliegen für den Fall, dass der Punkt s in einer Kante oder Ecke liegt. Für die genannten vier Eigenschaften giebt Neumann — was gewiss den vollen Beifall des Lesers finden wird — zunächst einen leicht übersehbaren, wenn auch weniger strengen Beweis, und darauf — für die drei ersten Eigenschaften wenigstens — noch einen zweiten Beweis, der an Strenge Nichts zu wünschen übrig lässt. Beim ersten Beweis geht Neumann ähnlich zu Werke, wie Green bei dem Beweis der Laplace'schen Gleichung. Nachdem er nämlich für den speciellen Fall $\mu = 1$ die Gauss'schen Werthe

1) $$W_a = 0, \quad W_i = 2\tilde{\omega}, \quad W_s = \tilde{\omega}$$

entwickelt, sagt er, man könne die Function μ, die ja stetig sein solle, in der unmittelbaren Nähe eines bestimmten Punktes s als constant ansehen. Unter dieser Annahme ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen 1) jene allgemeinen Eigenschaften mit der grössten Leichtigkeit.

Der zweite Theil des vierten Capitels entwickelt noch einige Sätze über das Moment μ einer Doppelbelegung, wenn das Potential W derselben eine bestimmte Bedingung erfüllen soll, z. B.:

„Soll W auf der inneren Seite von σ vorgeschriebene Werthe haben, so ist hierdurch μ vollständig bestimmt.“

Im fünften Capitel setzt der Verfasser seine schon früher (in den Ber. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss. 1870) in ihren Hauptumrissen von ihm mitgetheilte „Methode des arithmetischen Mittels“ ausführlich aus-

einander. Es ist dies eine Methode — die einzige, die wir bis jetzt besitzen —, die zur Lösung der Fundamentalaufgaben der Elektrostatik führt, die folgendermassen lauten:

„**Das äussere Problem.** — Es soll ein Potential auf **äussere** Punkte ermittelt werden, dessen Massen **auf** oder **innerhalb** σ liegen und dessen Werthe auf σ von daselbst vorgeschriebenen Werthen f nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden.

Das innere Problem. — Es soll ein Potential auf **innere** Punkte gefunden werden, dessen Massen **auf** oder **ausserhalb** σ liegen und dessen Werthe auf σ von daselbst vorgeschriebenen Werthen f nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden.“

Auf die Methode selbst und deren Begründung kann hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur Folgendes bemerkt:

I. Die Lösung beruht auf den im vierten Capitel entwickelten Eigenschaften des Potentials einer Doppelbelegung und liefert das gesuchte Potential in Form einer unendlichen Reihe, zunächst als Potential einer Doppelbelegung, dessen Gesammtmasse mithin gleich Null ist; dasselbe wird aber mit Hilfe eines Green'schen Satzes sehr leicht in das Potential einer einfachen Belegung umgewandelt.

II. Die Methode ist nur auf solche geschlossene Flächen, resp. Curven anwendbar, welche überall convex oder, genauer ausgedrückt, zweiten Ranges und keine zweisternigen sind, und setzt ausserdem voraus, dass die vorgeschriebenen Werthe f auf σ überall stetig sind.

Unter einer Fläche zweiten Ranges versteht der Verfasser eine Fläche, die mit einer unendlich langen Geraden, welche Lage man letzterer auch zuertheilen mag, niemals mehr als zwei Stellen gemeinsam hat (wo das Wort „Stelle“ ein Continuum von Punkten bezeichnet, einerlei, ob die Zahl der darin enthaltenen Punkte endlich oder unendlich gross ist), und unter einer zweisternigen Fläche eine solche, welche zwei Punkte von solcher Lage besitzt, dass jede Tangentialebene der Fläche durch einen dieser Punkte geht.

Der Verfasser legt — wie schon von uns erwähnt — mit Recht ein grosses Gewicht darauf, dass man sich des Umfanges der Giltigkeit der Methode und damit dessen, was noch vermisst wird, klar bewusst sei. Er sagt in der Vorrede: „Die Wichtigkeit des vorliegenden Werkes besteht — falls eine solche demselben überhaupt beizumessen ist — vielleicht vorzugsweise in den darin zu Tage tretenden Lücken, resp. in der Anregung, welche durch dasselbe zur Ausfüllung dieser Lücken gegeben sein möchte. So z. B. ist die im 5. Capitel exponirte Methode des arithmetischen Mittels nur auf solche geschlossene Flächen anwendbar, welche überall convex sind. Sollte es in Zukunft gelingen (was ich lange

Jahre vergeblich angestrebt habe), diese höchst unangenehme Einschränkung durch eine geeignete Modification jener Methode, resp. durch die Substitution einer neuen Methode zu beseitigen, so würde dadurch nicht allein ein befriedigender Beweis des Dirichlet'schen Princips, sondern zugleich eine Position gewonnen sein, welche für die ganze Theorie des Potentials von grösster Wichtigkeit wäre."

Aber uns scheint, dass die Wichtigkeit des vorliegenden Werkes doch auch ebenso sehr in den grossen und herrlichen positiven Resultaten besteht, die der Theorie des Potentials daraus erwachsen, zu denen wir in erster Linie des Verfassers Methode des arithmetischen Mittels rechnen, wenn ihre Brauchbarkeit auch nur für eine gewisse Classe von Flächen erwiesen ist.

III. Die Exposition der Methode ist ein Muster einer klaren und durchsichtigen Darstellung schwieriger und verwickelter Untersuchungen, während andererseits die Beweisführung in Bezug auf Strenge Nichts zu wünschen übrig lässt.

Den Schluss des Capitels bildet die Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels und zwar zunächst auf das Problem der elektrischen Induction, indem folgende Aufgaben, unter der Voraussetzung, dass die Oberfläche des zu betrachtenden Conductors zweiten Ranges und keine zweisternige sei, mit Hilfe jener Methode sowohl für den Raum, als für die Ebene ihre vollständige Lösung finden:

1. die natürliche Belegung eines gegebenen Conductors zu ermitteln;
2. es soll die Vertheilung der Elektricitätsmenge Null,
3. der Elektricitätsmenge M auf einem isolirten Conductor berechnet werden, falls von aussen her unveränderliche Kräfte wirken, deren Potential F gegeben ist;
4. es soll die elektrische Vertheilung auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor ermittelt werden, falls auf denselben von aussen her unveränderliche Kräfte einwirken, deren Potential F gegeben ist.

Zur Lösung der drei letzten Probleme nach des Verfassers Methode ist nur die Kenntniss des Potentials F auf der Oberfläche des gegebenen Conductors erforderlich, während die im folgenden Capitel explicirte Beer'sche Methode auch die Kenntniss des F wenigstens in der unmittelbaren Umgebung jener Oberfläche erheischt. In Bezug auf die vierte Aufgabe sei noch folgende Bemerkung gestattet. Ist V das Potential der gesuchten Belegung, so muss dasselbe für alle Punkte σ der Oberfläche des Conductors offenbar der Gleichung $V_\sigma + F_\sigma = 0$ genügen, so dass sich für V die Bedingung ergiebt: $V_\sigma = - F_\sigma$ [wodurch V_a nach Theorem ($A.^{abs}$) und somit auch die Dichtigkeit der sich bildenden elektrischen Schicht allerdings vollständig bestimmt ist]. Die Lösung der vierten Aufgabe kommt also auf das durch Gauss' und Dirichlet's Untersuch-

ungen bekannte Problem zurück: Die Oberfläche eines geschlossenen Raumes soll derart mit Masse belegt werden, dass das Potential der Belegung in jedem Punkte der Oberfläche vorgeschriebene Werthe annimmt. Und darin besteht der grosse Fortschritt, den die Potentialtheorie Neumann verdankt: während Gauss und Dirichlet nur bewiesen haben, dass eine solche Belegung immer möglich sei, und zwar nur eine, hat Neumann zuerst — auch die schon erwähnte Methode Beer's würde die Aufgabe nicht lösen — ihre Dichtigkeit wirklich zu berechnen gelehrt (falls die Oberfläche zweiten Ranges und keine zweisternige ist).

Es folgen weitere Anwendungen der Methode des arithmetischen Mittels, und zwar auf elektrodynamische Aufgaben, unter denen beispielsweise die folgende erwähnt werden möge:

„Auf oder ausserhalb σ sollen irgendwelche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der innern Seite von σ der Bedingung entspricht: $\frac{\partial U}{\partial \nu}=f$, wo ν die innere Normale und die f vorgeschriebene Werthe bezeichnen" —

eine Aufgabe, die sich auch so aussprechen lässt:

„Es soll die Vertheilung des elektrischen Stromes in einem homogenen Conductor bestimmt werden, falls die Einströmungen an der Oberfläche des Conductors allenthalben gegeben sind."

Das sechste Capitel zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil behandelt nach der Beer'schen Methode (Poggendorff's Annalen Bd. 98: Allgemeine Methode zu Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction), die der Verfasser in der Einleitung wörtlich mittheilt, das Problem der elektrischen Induction. Hier besteht das grosse Verdienst des Verfassers darin, dass er, nachdem die Unsicherheit der Beer'schen Argumentation von ihm hervorgehoben, zeigt, dass die von Beer gegebenen Entwickelungen in der That convergent und brauchbar sind für den Fall, dass die Oberfläche des inducirten Körpers zweiten Ranges und keine zweisternige ist. Zum Schluss wird noch nachgewiesen, dass die Beer'sche Methode, auf jene beiden Fundamentalprobleme der Elektrostatik, das äussere und innere Problem, angewandt, keines dieser beiden Probleme wirklich zu lösen vermag, sondern das eine auf das andere reducirt. Der zweite Theil behandelt das Problem der magnetischen Induction nach der Beer'schen Methode. Nachdem der Verfasser auch hier nachgewiesen, dass die Resultate der Beer'schen Methode keinem Zweifel unterliegen, sobald die Oberfläche des inducirten Körpers zweiten Ranges und keine zweisternige ist, geht er noch einen bedeutenden Schritt weiter, indem er auf eine äusserst scharfsinnige Weise zeigt, dass jene Resultate auch für jede beliebige *Fläche gelten*, falls nur eine dem inducirten Körper eigenthümliche *Con-*

stante eine gewisse, durch die Natur der Fläche bedingte Grösse nicht überschreitet.

Auch in diesem Capitel manifestirt sich die dem Verfasser eigene Klarheit und Gründlichkeit.

Das siebente Capitel enthält eine weitere Entwickelung der Theorie der Doppelbelegungen: während das vierte Capitel sich hauptsächlich auf den Fall beschränkte, dass die Curve oder Fläche σ, auf welcher eine Doppelbelegung ausgebreitet sein soll, geschlossen ist, wird nunmehr auch der Fall, dass σ nicht geschlossen ist, einer gründlichen Untersuchung unterzogen. Der Verfasser beschränkt sich hier allerdings auf Betrachtungen in der Ebene, indem er bemerkt, dass die Untersuchungen im Raume im Ganzen in ähnlicher Weise verlaufen würden.

Diese Untersuchungen finden ihre Verwerthung im achten Capitel, welches die Theorie „der kanonischen Potentialfunctionen" behandelt.

1. Der Verfasser stellt die Frage auf, ob die im ersten Capitel aufgestellten Theoreme ($A.^{add}$) und ($J.^{abs}$), bei denen die auf σ vorgeschriebenen Werthe $V_\sigma = f$ stillschweigend als stetig vorausgesetzt sind, auch noch für unstetige f gelten. Zunächst wird bemerkt, dass, wenn in einem Punkte g der Linie σ — der Verfasser beschränkt sich auch hier auf die Ebene — von beiden Seiten verschiedene Werthe f_1 und f_2 zusammenstossen, durch diese Werthe von f die Grenzwerthe von V nur unvollkommen gegeben seien, indem man nicht wisse, ob in g das f_1 oder das f_2, oder vielleicht irgend eine dritte Grösse als Grenzwerth anzusehen sei; die an V gestellten Anforderungen seien daher irgend einer Modification bedürftig. Zu dem Ende werde um jeden einzelnen Differenzpunkt g eine kleine Kreisperipherie $\varkappa + \lambda$ beschrieben, wo $\varkappa$ den auf $\mathfrak{A}$, λ den auf $\mathfrak{J}$ gelegenen Kreisbogen vorstellen soll; der ausserhalb aller dieser Kreisperipherien befindliche Theil von σ werde mit τ bezeichnet. Der Verfasser zeigt nun, dass diejenige Function W_a eindeutig bestimmt sei, welche folgenden drei Bedingungen genügt:

I. Die Function W soll, abgesehen von einer additiven Constanten, das Potential irgendwelcher **ausserhalb** $\mathfrak{A}$, resp. **auf der Grenze** von $\mathfrak{A}$ ausgebreiteter Massen von der Summe **Null** sein.

II. Die Function W soll auf τ die vorgeschriebenen Werthe f besitzen: $W_\tau = f_\tau$, wie weit man die Radien der $\varkappa$ auch verkleinern mag.

III. Sind $f_1 \leq f_2$ die Werthe der f in irgend einem Punkte g, so sollen die Werthe, welche W auf dem zugehörigen Kreisbogen $\varkappa$ besitzt, der Formel entsprechen:

$$f_1 - \varepsilon(\varkappa) \leq W_\varkappa \leq f_2 + \varepsilon(\varkappa),$$

wo $\varepsilon(\varkappa)$ eine positive Grösse vorstellt, welche durch Verkleinerung des Radius von $\varkappa$ beliebig klein gemacht werden kann. Diese Bedingung soll erfüllt sein für jeden der Punkte g.

Diese Function W nennt der Verfasser die den Werthen f entsprechende kanonische Potentialfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$. Liest man in jenen drei Bedingungen statt $\mathfrak{A}$, a, $\varkappa$ resp. überall $\mathfrak{J}$, i, λ, so erhält man die Definition der (gleichfalls eindeutig bestimmten) den Werthen f entsprechenden kanonischen Potentialfunction W oder W_i des Gebietes $\mathfrak{J}$.

2. Es werden die allgemeinen Eigenschaften der kanonischen Potentialfunctionen aufgestellt, von denen die erste eben die ist, dass sie, wenn die f gegeben sind, eindeutig bestimmt sind.

3. Was die wirkliche Berechnung der kanonischen Potentialfunction für vorgeschriebene Grenzwerthe f betrifft, so wird hervorgehoben, dass dieselbe für stetige f offenbar gleichbedeutend sei mit der Lösung des im fünften Capitel behandelten äusseren und inneren Problems. Darauf zeigt der Verfasser aber noch, dass, wenn irgend eine Methode bekannt ist zur Bildung der kanonischen Potentialfunctionen für stetige Grenzwerthe, man dieselben auch für solche Grenzwerthe zu bilden vermag, die mit beliebig vielen Differenzpunkten behaftet sind.

In der Einleitung zum neunten Capitel setzt der Verfasser an einer bestimmten Aufgabe die Murphy'sche Methode auseinander, die Probleme der Elektrostatik für ein System von beliebig vielen Conductoren auf die entsprechenden Probleme zu reduciren, bei denen nur Ein Conductor auftritt, und bemerkt dazu, dass diese Methode auf zwei Sätzen beruhe, welche nur für den Raum, nicht für die Ebene gelten, dass mithin die Murphy'sche Methode auf die Probleme der Ebene nicht anwendbar sei. Darauf theilt der Verfasser eine etwas andere Methode mit, welche ebenso auf die Probleme der Ebene, wie des Raumes anwendbar ist (weshalb er sich auf die Ebene beschränkt), indem er — worauf es hier offenbar nur ankommt — folgende Aufgabe löst:

Es seien α und β zwei geschlossene Curven und auf denselben irgendwelche Grenzwerthe vorgeschrieben: diejenige kanonische Potentialfunction der von α und β begrenzten Fläche zu finden, welche auf α und β jene vorgeschriebenen Werthe besitzt.

Diese Aufgabe wird zunächst für den Fall gelöst, dass jede dieser beiden Curven ganz ausserhalb der andern liegt, und darauf — nach zwei verschiedenen Methoden sogar — auch für den Fall, dass α und β sich schneiden. Es sei über diese Methoden nur bemerkt, dass sie auf der im vorhergehenden Capitel vorgetragenen Theorie der kanonischen Potentialfunctionen beruhen und dass dabei vorausgesetzt wird,

dass irgend eine Methode bekannt sei zur Bildung der kanonischen Potentialfunction einer nur von Einer Curve begrenzten Fläche für beliebig vorgeschriebene Grenzwerthe. Anwendungen auf bestimmte Probleme der Elektrostatik giebt der Verfasser nicht, was auch nicht so sehr wünschenswerth zu sein scheint, nachdem im fünften Capitel mit Hilfe der Methode des arithmetischen Mittels die auf Einen Conductor bezüglichen Probleme ausführlich behandelt sind.

Der „Anhang" enthält eine Reproduction und Erweiterung einiger Untersuchungen von Green und Thomson.

Green (*An Essay etc.*, Art. 5 u. 6) stellt über die auf einer leitenden, zur Erde abgeleiteten Oberfläche σ durch einen im Innern derselben befindlichen Massenpunkt von der Masse Eins inducirte Belegung folgende beiden Sätze auf:

1. Das Potential irgendwelcher ausserhalb, resp. auf σ ausgebreiteter Massen, welches auf σ die Werthe f_σ besitzt, hat in irgend einem innerhalb der Oberfläche befindlichen Punkte i den Werth

$$V_i = -\int d\sigma(\varrho)\, f_\sigma,$$

wo (ϱ) die Dichtigkeit jener Belegung bezeichnet.

2. Der Werth des Potentials jener inducirten Belegung in irgend einem innerhalb der Oberfläche befindlichen Punkte j ist gleich dem Werthe des Potentials der durch einen in j befindlichen Massenpunkt von der Masse Eins auf σ inducirten Belegung in dem Punkte i.

Green bemerkt, dass analoge Sätze für den Fall gelten, dass der inducirende Massenpunkt ausserhalb der Oberfläche liegt.

Die Neumann'schen Erweiterungen dieser Green'schen Untersuchungen bestehen im Wesentlichen in Folgendem: Es wird auch die einem äusseren Punkte α entsprechende Nullbelegung in Betracht gezogen, d. i. diejenige Belegung, welche die Gesammtmasse Null hat und für alle inneren Punkte, abgesehen von einer additiven Constanten, äquipotential ist mit einer in α concentrirten Masse Eins, und in Bezug auf dieselbe gezeigt: 1. wie man ihre Dichtigkeit aus den Dichtigkeiten der dem äusseren Punkte α entsprechenden Green'schen Belegung und der natürlichen Belegung finden kann; 2. dass auch das Potential der Nullbelegung in Bezug auf zwei äussere Punkte a, α symmetrisch ist. Analoge Sätze gelten für die einem innern Punkte entsprechende Nullbelegung. Ferner zeigt der Verfasser, wie sich folgende Aufgaben, unter der Voraussetzung, dass die den Green'schen Belegungen für einen äussern, resp. innern Punkt entsprechenden Dichtigkeiten bekannt seien, lösen lassen:

1. Es soll das Potential V_a irgendwelcher innerhalb oder auf σ ausgebreiteter Massen von der gegebenen Summe M ermitt...

welches auf σ von daselbst vorgeschriebenen Werthen nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheidet.

2. Eine gegebene Masse M soll auf der Curve oder Fläche σ in solcher Weise ausgebreitet werden, dass das Potential dieser Belegung auf σ selber von gewissen daselbst vorgeschriebenen Werthen nur durch eine unbestimmte additive Constante differirt.

Endlich sei hier noch folgender Satz genannt, der insofern ein besonderes Interesse darbietet, als er einer der wenigen Sätze ist, die nur für das Newton'sche Potential im Raum, nicht für das logarithmische Potential in der Ebene gelten: „Die auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen elektrischen Massenpunkt α von der Masse (-1) inducirte Belegung ist ihrer Gesammtmasse nach stets kleiner als 1."

Zum Schluss giebt der Verfasser eine ungemein klare Auseinandersetzung der Thomson'schen Methode der sphärischen Spiegelung und entwickelt die damit zusammenhängenden bekannten Sätze über das Newton'sche Potential im Raume, um dann zu zeigen, wie mit Hilfe jener Methode auch für das logarithmische Potential in der Ebene die analogen Sätze sich aufstellen lassen.

Nach dieser Skizzirung des überaus reichen und interessanten Inhalts führen wir die wenigen Stellen an, die wir entweder etwas anders gewünscht hätten oder denen ein offenbarer Irrthum zu Grunde liegt.

Wir haben im Eingang als einen grossen Vorzug des Neumann-schen Werkes hervorgehoben, dass überall die Voraussetzungen und Einschränkungen genau angegeben werden, denen die aufgestellten Sätze und Formeln unterliegen. Allein wenn wir nicht irren, so hat der Verfasser die Giltigkeit einiger Sätze abhängig gemacht von Voraussetzungen, die in der That nicht erfüllt zu sein brauchen. Auf diesen Punkt sind die folgenden Ausstellungen hauptsächlich zurückzuführen.

S. 79. Der „zweite Beweis" scheint nicht ganz correct zu sein. Derselbe müsste von der letzten Zeile auf S. 79 incl. an etwa so lauten:

Zerlegen wir das elektrische Gesammtpotential V in zwei Theile: $V = W + \Omega$, indem wir unter Ω den von den Belegungen der beiden Grenzflächen des Raumes $\mathfrak{S}$ herrührenden Theil verstehen, so ist nach 8) $W + \Omega$ constant in allen Punkten des schalenförmigen Conductors. Hieraus folgt (nach einem früheren Satze, S. 47), dass W und Ω in jenem Gebiet einzeln constant sind. Ferner ist nach einem Green'schen Satze [(42α), S. 21]:

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial N} d\sigma = -2\tilde{\omega} M,$$

wo N die äussere Normale der Fläche s und M die Summe der Massen jener beiden Belegungen der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ bezeichnet. In dieser Formel ist nun aber die linke Seite $= 0$, weil Ω in allen Theilen des scha-

lenförmigen Conductors constant, mithin $\frac{\partial \Omega}{\partial N}$ daselbst $=0$ ist. Somit folgt $M=0$.

S. 130 Z. 9 links ist $\frac{\tilde{\omega}}{3}$ statt $\frac{2\tilde{\omega}}{3}$ zu lesen.

S. 157. Zweiter Satz. Wir würden bei diesem Satze die Voraussetzung, dass das Potential W einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung für alle Punkte a constant sein soll, dahin einschränken, dass W auf der äussern Seite von σ constant sein soll. Denn hieraus folgt [vergl. 22), S. 38 und 4), S. 157], dass W für alle Punkte a constant und zwar $=0$ ist. Der Anfang des Beweises müsste dann so lauten: Aus der Voraussetzung $W_{as} = Const.$ folgt [vergl. 22), S. 38 und 4), S. 157] $W_{as} = W_a = 0$ u. s. w.

S. 158. Dritter Satz. Es genügt auch hier, vorauszusetzen, dass W auf der innern Seite von σ constant sei. Der Beweis würde dann so anfangen: Aus der Voraussetzung $W_{is} = Const. = K$ folgt [30), S. 41] $W_i = Const. = K$, und daraus $\frac{\partial W_{is}}{\partial \nu} = 0$ u. s. w.

S. 159. Die dem vierten Satz beigefügte Restriction „ausser im singulären Falle" kann wegfallen. Dies ergiebt sich leicht, wenn man bedenkt, dass ja die Gesammtmasse einer Doppelbelegung stets $=0$ ist [vergl. 4), S. 157]. Dem Schlusse des Beweises, von den Worten: „Hieraus aber folgt" an, würden wir dann folgende Fassung geben: „Hieraus aber folgt, dass dieses Potential für sämmtliche Punkte a Null ist [22), S. 38 und 4), S. 157]; und hieraus folgt weiter [mit Rücksicht auf 5)] $\mu - \mu' = Const.$ W. z. b. w."

Hat aber der zweite Satz 5) die von uns vorgeschlagene Fassung bekommen, so können wir im Beweise des vierten Satzes nach dem ersten Punkte einfach so fortfahren: „Hieraus folgt aber [mit Rücksicht auf 5)] $\mu - \mu' = Const.$ W. z. b. w."

Die Restriction S. 117 Z. 21: „abgesehen von dem schon früher erwähnten singulären Falle" ist somit auch hinfällig.

S. 159. Im Beweis des fünften Satzes können die Worte: „Hieraus aber folgt, dass dieses Potential Null ist für sämmtliche Punkte i [Theorem $(J.^{abs})$ S. 105]" in Hinsicht auf die von uns vorgeschlagene Fassung des dritten Satzes wegfallen. Abgesehen hiervon, würden wir an dieser Stelle statt Theorem $(J.^{abs})$ lieber citiren 30), S. 41.

S. 170 Z. 13 ist die Stelle: „oder, was dasselbe, $\tilde{\omega}_s = \tilde{\omega} - \vartheta_s = pos.$" zu streichen; denn $\tilde{\omega}_s$ ist der Definition nach stets positiv, auch wenn einige Elemente $(d\sigma)_s$ negativ wären, σ also nicht zweiten Ranges wäre. In dem folgenden Satze: „Denn nach einer bekannten Formel" u. s. w. muss demnach das Wort „denn" gestrichen werden. In dem darauf folgenden Satze würden wir zwischen „dass" und „für jede

Raume darstellen und weil sie der Zunahme der Fallbeschleunigung nicht Rechnung tragen!

Den allgemeinen Ausdruck für die Bewegung, welche mit constanter Beschleunigung vor sich geht, ein unvollkommenes Naturgesetz zu nennen, weil es Fälle giebt, auf die er nicht passt, das nenne ich denn doch die Begriffe völlig verwirren und eine Wissenschaft, welche gerade durch die Umsicht ihrer Methode und die Sicherheit ihrer Forschungsresultate sich vor anderen den Namen der exacten erworben hat, in heilloser Weise discreditiren.

Bezüglich des übrigen Inhalts muss ich mich auf Erwähnung einiger der hauptsächlichsten und gefährlichsten Verstösse beschränken.

S. 9, § 12 wird definirt: „Elasticität ist die Eigenschaft eines Körpers, dass er bei Einwirkung äusserer Kräfte eine Veränderung in der Lage seiner Theile erfährt, bei nachlassendem Drucke oder Zuge aber seine Gestalt wieder herstellt.“ Nachdem dann erwähnt ist, dass es vollkommen elastische Körper nicht giebt, heisst es weiter: „Die vollkommenste Elasticität zeigen die luftförmigen Körper.“

Diese Körper stellen also am vollkommensten ihre Gestalt wieder her?

Im Sinne der Definition (die nur auf feste Körper passt) sind die Gase und Flüssigkeiten gar nicht elastisch. Wird ihnen aber Elasticität zugeschrieben, insofern sie ihr Volumen wieder herstellen, dann sind sie offenbar beide gleich und zwar vollkommen elastisch.

S. 17, § 18 heisst es: Die Kräfte, welche Bewegung hervorbringen, können momentan oder continuirlich wirken. Als eine momentan wirkende Kraft können wir den Stoss ansehen.

Eine momentan, d. h. eine unendlich kleine Zeit hindurch wirkende Kraft kann einem Körper eine endliche Geschwindigkeit weder verleihen, noch entziehen, was doch beim Stoss geschieht. Die Momentankräfte haben lediglich die Bedeutung von Fictionen, welche man nach der von Galilei gegebenen Anleitung zum Zwecke theoretischer Speculation macht, um sie schliesslich (durch den Uebergang zur Grenze) wieder aufzugeben. Eine reelle Bedeutung kommt ihnen nicht zu; vielmehr ist es von höchster Wichtigkeit, den Schüler zu belehren, dass jede endliche Wirkung nur in endlicher Zeit zu Stande kommt.

S. 30, § 24 versteigt sich der Verfasser zu einer Berechnung des Winddrucks auf schief entgegenstehende Flächen, welche er nach zwei anderen unglücklich gewählten als Beispiel zur Erläuterung der Kräftezerlegung anführt.

Dabei übersieht er, dass mit dem Neigungswinkel (α) der Flügelebene gegen die Axe sich zugleich auch die auf die Flügel treffende *Luftmasse* ändert und in seinem Sinne die betreffende trigonometrische

Function nicht $\cos\alpha \sin\alpha$, sondern $\cos^2\alpha \sin\alpha$ werden muss, welche letztere ihr Maximum nicht bei 45^0 hat.

Da übrigens das Problem selbst noch seiner endgiltigen Lösung entgegenharrt, so ist es mindestens ungeschickt, dasselbe mit falscher Lösung in ein Schulbuch zu setzen.

S. 59, § 39 steht der merkwürdige Satz: „Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass eine momentane Kraft eine gleichförmige Bewegung hervorbringt."

S. 92, § 53 steht die geistreiche Anmerkung: Aräometer „von ἀραιός, leicht, weil man gewöhnlich bei der Bestimmung des specifischen Gewichts nur kleine Massen verwendet".

S. 102, § 61 wird die Ansicht vorgetragen, dass das Gefässbarometer weniger genaue Resultate gebe, als das Heberbarometer, während doch die Normalinstrumente der Physiker und Meteorologen Gefässbarometer sind. Dem Verfasser ist die Fortin'sche Construction wohl ebenso unbekannt, wie die Fehlerquellen des Heberbarometers?

S. 120, § 77 erhalten wir ein Beispiel von der das Werk auszeichnenden Präcision: „Am vollständigsten wird eine Flüssigkeit durch anhaltendes Sieden von den in ihr enthaltenen Gasen befreit. Aehnliches findet beim Frieren statt."

S. 122, § 77. Nach Erwähnung des Versuchs, bei welchem ein Blatt Papier durch den äusseren Luftdruck gegen eine durch Blasen verdünnte Luftschicht gedrückt wird (wobei gelegentlich die beiden Physiker Clement und Desormes in einen einzigen Clement Desormes verschmolzen werden), folgt ein neuer Absatz dieses Inhalts:

„Vielleicht beruht das Fallen des Barometers bei Stürmen auf einem ähnlichen Grunde."

Welche wissenschaftliche, didaktische oder pädagogische Bedeutung hat dieser Satz?

S. 212 lesen wir: „Ein minder hoher Gegenstand kann jedoch einer schief stehenden Gewitterwolke näher sein, als ein höherer."

S. 230: „Lässt man den Strom einer wirksamen Batterie durch einen dünnen Draht gehen, so erhitzt sich derselbe. Diese Erhitzung ist (unter übrigens gleichen Umständen) um so grösser, je kürzer und dünner der Draht ist."

Der zweite Satz ist falsch, ob man unter „Erhitzung" Zunahme der Wärmemenge oder Temperaturerhöhung versteht; der erste bietet ein Beispiel der allenthalben hervortretenden Nachlässigkeit und Unbestimmtheit der Fassung. Ihr gemäss bedarf es einer besondern Batterie, nämlich einer „wirksamen", und eines besondern Drahtes, nämlich eines dünnen, damit letzterer durch den Strom erwärmt werde! Das soll wohl populär sein?

S. 231 wird in einer Anmerkung versprochen, die Abmessung des Leitungswiderstandes in §§ 152 und 153 zu lehren, dieses Versprechen aber nicht gehalten.

S. 245 steht durchschossen der Lehrsatz: „Die Stärke zweier Ströme ist der Tangente des Ablenkungswinkels proportional."

S. 248 steht der durchschossene Satz: „Man erhält daher die grösste Wirkung, wenn der Leitungswiderstand in der Batterie gleich dem Leitungswiderstande im Schliessungsbogen ist."

In dieser Allgemeinheit ausgesprochen ist der Satz falsch, weil er dem Ohm'schen Gesetze widerspricht.

S. 257 meint der Verfasser, dass über die praktische Anwendung des Hughes'schen Drucktelegraphen erst fortgesetzter Gebrauch entscheiden werde. Im Jahre 1878?

S. 281 wird noch immer gelehrt, dass durch 16 Schwingungen in der Secunde ein Ton zu Stande komme.

S. 284 wird als Grundton eines Klanges nicht der tiefste, sondern der stärkste definirt; die übrigen Töne werden Nebentöne genannt.

Auf welche Autorität stützt sich hier der Verfasser? Ich dächte, dass hier Helmholtz massgebend sein sollte und nicht Koppe-Dahl.

S. 321 findet sich der Heliostat erwähnt als Planspiegel, dem durch ein Uhrwerk oder die Hand eine solche Bewegung ertheilt wird, dass er die Strahlen der Sonne immer in der nämlichen Richtung reflectirt.

Der Handheliostat dürfte dieses wohl nie leisten, bei dem automatisch wirkenden ist die Stellung des Spiegels das Interessante und zu Erklärende.

S. 366 ist als Anmerkung zu dem Titel „Polarisation und doppelte Brechung" Folgendes zu lesen: „Wir handeln hiervon nur kurz, da kaum irgend eine Erscheinung im grossen Haushalte der Natur oder im gewöhnlichen bürgerlichen Leben bekannt ist, welche auf der Polarisation oder der doppelten Brechung des Lichtes beruhte."

Es geht wahrhaftig Nichts über diese Gemüthlichkeit „im gewöhnlichen bürgerlichen Leben".

Wir verlangen in Anfangsgründen der Physik keine weitläufige Behandlung der Polarisation und doppelten Brechung, aber ein solches „Weil" weisen wir zurück, weil es unwahr ist. In unser gewöhnliches bürgerliches Leben gehört beispielsweise das Saccharimeter.

S. 379 steht die (durch ihre Präcision ausgezeichnete) durchschossene Erklärung: „Ist der Gegenstand von der Linse sehr weit entfernt, so kommt das Bild nahe an den Brennpunkt zu liegen und ist verkleinert. — Befindet sich dagegen der Gegenstand nahe am Brennpunkte (jedoch

ausserhalb der Brennweite), so fällt das Bild in eine sehr weite Entfernung hinaus und ist vergrössert."

Was ist „nahe", was „sehr weit"?

Der Verfasser scheint die Bedeutung der doppelten Brennweite nicht zu kennen, sonst würde er nicht auch auf S. 398 und 399 vom zusammengesetzten Mikroskop eine unzureichende Erklärung geben, welche ebensowohl auf das astronomische Fernrohr passt. Das unterscheidende Merkmal ist, dass im Mikroskop bereits durch das Objectiv ein vergrössertes Bild gewonnen wird. Dazu ist aber erforderlich, dass der Gegenstand zwischen dem Brennpunkte und dem Grenzpunkte der doppelten Brennweite liege, während es nicht genügt, dass er sich überhaupt ausserhalb der Brennweite befinde.

S. 391 findet man eine originelle Erklärung der deutlichen Sehweite als kleinste Entfernung, in welcher noch deutlich gesehen wird.

S. 392 ist der Scheiner'sche Versuch zur Hälfte beschrieben und schliesst mit den Worten: „man sieht dagegen die Spitze einfach, wenn dieselbe hinreichend vom Auge entfernt wird".

Der Fuchs erreicht die Trauben, wenn er hinreichend hoch springt, und man sieht die Spitze auch wieder doppelt, wenn sie hinreichend entfernt ist.

Ich übergehe die Einleitung zur Wärmelehre §§ 229—235, welche eine Definition von Temperatur giebt, eine Fabel von Fahrenheit erzählt und die Annahme erklärt, „dass die Ausdehnung der Gase dem wahren Gange der Wärme proportional erfolge", weil diese Sachen in vielen anderen Lehrbüchern auch nicht viel besser sind; aber der § 236 kann nicht ungerügt bleiben.

S. 421 wird nämlich durch eine Reihe von Aussprüchen der Glaube erregt, dass Wasser, so lange noch Eis in demselben schwimmt, seine Temperatur nicht erhöhen könne. Man urtheile selbst:

„So wie das Eis die Temperatur von 0° erreicht hat, fängt es an zu schmelzen, und das Thermometer steigt nun nicht mehr, sondern bleibt eine längere Zeit unveränderlich auf 0° stehen, so lange nämlich, bis **aller** Schnee geschmolzen ist." Selbst wenn man Feuer unter das Gefässt macht, „bleibt doch das Thermometer so lange auf 0° stehen, als noch ungeschmolzenes Eis **vorhanden** ist", und vorher: „Da hiernach die Wärme, welche dem **Wasser** während des Schmelzens oder Siedens zugeführt wird, keine Erhöhung der Temperatur bewirkt." Demgemäss kann wohl kein Zweifel sein, dass der Verfasser dem Eis die übernatürliche Wirksamkeit zuschreibt, das Wasser, in welchem es schwimmt, auf 0° zu erhalten!

Ich hätte mich in der That sehr verwundert, wenn in einem Buche von solcher Einleitung nicht hier und da etwas Aberglauben mit untergelaufen wär

S. 429 steht: „weshalb auch zwei Thermometer nur dann in ihren Angaben unmittelbar übereinstimmen können, wenn ihre Siedepunkte bei gleichem Luftdrucke bestimmt worden sind.“

Wenn nicht glücklicherweise andere Leute besser als der Verfasser wüssten, wie Thermometer gemacht werden, könnten demnach in München und Bonn übereinstimmende Thermometer nicht hergestellt werden, da diese Städte das Unglück haben, nie auf gleichen Barometerstand zu kommen!

S. 437 lesen wir: „Die Verdunstung des Wassers, das Wachsthum der Pflanzen, das Wohlsein der Thiere und Menschen hängt weder von der absoluten, noch von der relativen **Feuchtigkeit**, sondern von der **Trockenheit** der Luft ab, wenn wir unter Trockenheit der Luft die Menge der Dämpfe verstehen, welche derselben zur Sättigung noch fehlen.“ Dazu eine Anmerkung: „Auf die Trockenheit der Luft in dem angegebenen Sinne wird sicherlich in der angewandten Meteorologie zu wenig Bedacht genommen.“

Also wohl eine neue Entdeckung des Verfassers, diese Trockenheit! Leider fehlt jedoch auch hier die Anerkennung. Der Recensent verweist den Verfasser auf die demselben noch unbekannten Dalton'schen Gesetze, aus denen er erfahren wird, inwiefern die „Trockenheit“ auf die Verdunstung des Wassers und das damit Zusammenhängende einwirkt.

Die Unkenntniss dieser Gesetze veranlasst noch eine weitere Schwäche auf

S. 439, wo nach einer sehr eingehenden Beschreibung des August-schen Psychrometers das Daniell'sche Hygrometer lediglich mit folgenden Worten abgehandelt wird:

„Die Angaben des Psychrometers können jedoch keine volle Sicherheit gewähren. Dies Letztere gilt auch von dem früher als das Psychrometer erfundenen Hygrometer von Daniell, welches zur Ermittelung des Thaupunktes dient, aber umständlicher im Gebrauche, als das Psychrometer ist, da jeder Beobachtung erst ein besonders anzustellender Versuch vorangehen muss.“

Das fundamentale Instrument Daniell's wird demnach nicht beschrieben, sondern nur erwähnt, um es zu bemäkeln, während doch der Gebrauch des August'schen Psychrometers dadurch bedingt ist, dass die Constante der Formel durch eine Thaupunktsbestimmung ermittelt ist.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass die S. 74 bei dem Namen Keppler (Keplerus) bezüglich der Personalien zur Schau getragene Sorgfalt vereinzelt ist. Denn der Verfasser schreibt Poggendorf statt Poggendorff, Frauenhofer statt Fraunhofer, und lässt Ohm in Erlangen statt in Nürnberg seine Entdeckungen machen. Von Monsieur *Clement Desormes* ist schon oben die Rede gewesen.

Das Angeführte wird genügen zur Begründung des eingangs abgegebenen Urtheils. Wir sind es ebensowohl der von uns vertretenen Wissenschaft, als der studirenden Jugend schuldig, Bücher, wie die 14. Auflage von Koppe's Physik, welche nach Form und Inhalt den Anforderungen der Zeit nicht genügen, aus der Schule zu entfernen. Es dürfte dieses um so leichter gelingen, als an guten, ganz elementar gehaltenen Lehrbüchern der Physik kein Mangel ist. Ich erinnere nur an diejenigen von Jochmann und von Weinhold, welche durch Umfang und Preis keine grösseren Ansprüche an Lehrer und Schüler machen.

G. Recknagel.

Leitfaden der Elementarmathematik von Dr. Lieber und v. Lühmann. II. Thl.: Arithmetik. Berlin, Simion. 1877. Preis 1 Mk. 25 Pf.

Die Anlage dieses Lehrbuches weicht von der meist beliebten so sehr zu ihrem Vortheil ab, dass wir dasselbe neben einem entsprechenden Uebungsbuche Allen empfehlen zu können glauben, welche bei ihren Schülern Liebe zur Sache erzielen und erhalten wollen. Dem wohl vielseits gehegten und sicher auch im mündlichen Theile des Unterrichts Rechnung getragenen Bedürfnisse, Verständniss für die Gesetze der Grundoperationen aus dem einfachen, auf der Zahlenreihe basirenden Schlussvermögen zu erzielen und darauf bauend die übrigen Aufgaben der allgemeinen Arithmetik mit entsprechender Leichtigkeit erledigen zu können, ist hier ohne Zweifel entgegengekommen.

Wenn wir trotzdem noch einige Wünsche haben und diese hier zum Ausdruck bringen, geschieht es nur, um — das Einverständniss des Herrn Verfassers voraussetzend — den hier angebahnten Weg in einer zweiten Auflage noch mehr berücksichtigt zu sehen. Wir meinen hier die grössere Betonung des durch die erste Rechenstufe (Addition und Subtraction) gebildeten Ausdrucks, wie auch der durch sämmtliche drei Rechenstufen sich hindurchziehenden Analogie, ausgedehnt selbst bis zur Gegenüberstellung der Lehrsätze in diesen Stufen. In § 79, der von der Auflösung der Gleichungen im Allgemeinen handelt, hätte auch der Satz Erwähnung finden können, dass die mit der Unbekannten verbundenen Constanten in umgekehrter Folge ihres mehr oder weniger engen Zusammenhanges mit ersterer von dieser nach § 69, 1) getrennt werden. Was die unreinen Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten betrifft, so wäre die reducirte Gleichung nicht ohne Vortheil anzuführen gewesen, zumal ja dieser Fall bei den Gleichungen des dritten und vierten Grades wiederkehrt. Von praktischer Bedeutung erscheint es endlich, solche Gleichungen, bei denen das Quadrat der Unbekannten mit einem nicht quadratischen Factor behaftet ist, durch Multiplication der Gleichung mit einem geeigneten Werthe quadratisch zu machen und so

statt der Unbekannten selbst erst eine einfache Function derselben — wie das ja in vielen Fällen sogar nothwendig ist — zu bestimmen.

Mit grossem Geschick behandelt erscheinen weiter die §§ 91 flgg., welche von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung und den Complexionen handeln.

Inwieweit der die unendlichen Reihen behandelnde Anhang sich dem bis dahin erledigten Pensum anzuschliessen berechtigt ist, haben die Herren Verfasser in der kurzen Einleitung zu diesem Anhange selbst ausgesprochen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass sich dieser Leitfaden, einmal bekannt, ausgedehnter Würdigung zu erfreuen haben wird.

Kaiserslautern. HUGEL.

Bibliographie

vom 1. Juli bis 31. August 1878.

Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. wissensch. Classe. 38. Bd. Wien, Gerold. 30 M

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wi mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1877. I. Abth., 9. u. 10. Heft. W Gerold. 4 Mk. 50

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. KLEIN und A. M 14. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v MANN, MÜLLER u. WANGERIN. 8. Bd. Jahrg. 1876, 2. Heft G. Reimer.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, he von A. METZGER. 27. Jahrg. 2. Heft, Juli-December tingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Rein ematik.

HEINE, E., Handbuch der K onen, Theor 1. Bd., 2. Aufl. Berli

KOENIGSBERGER, L., Vorl Integrale. Leipzig,

MANSION, P., Elemente *Leipzig*, Teubner.

STERN, M. A., Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Göttingen, Dieterisch'sche Buchh. 2 Mk. 40 Pf.

PETERSEN, J., Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Höst & Sohn. 10 Mk.

STUDNIČKA, F. J., Lehrbuch der Algebra. Prag, Grégr & Dattel. 3 Mk.

SCHWAGER, H., Lehrbuch der Arithmetik für Real- und Fortbildungsschulen. 4. Aufl. 1. Thl. 2 Mk.

——, Resultate dazu. Berlin, Janke. 20 Pf.

KNIESS, C., Lehrbuch der Arithmetik, nebst Anhang mit Uebungsbeispielen. 1. Heft. München, Kellerer's Buchh. 1 Mk. 60 Pf.

HABERL, J., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. Wien, Braumüller. 6 Mk.

SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln (wohlfeile Schulausgabe). 6. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Mk.

SCRÖDER, F. H., Elemente der Planimetrie und Stereometrie. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 1 Mk. 50 Pf.

WORPITZKY, J., Elemente der Mathematik. 5. Heft: Stereometrie. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 Mk. 60 Pf.

MÜLLER, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Thl., 1. u. 2. Heft. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

JAHN, W. und. B. STIEHLER, Schule der Geometrie. 6. Heft. Leipzig, Klinkhardt. 20 Pf.

HARMS, Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts, in einer Reihe methodisch geordneter arithmetischer und geometrischer Aufgaben dargestellt. 2. Abth.: Geometrische Aufgaben. 3. Aufl. Oldenburg, Stalling. 1 Mk. 25 Pf.

MÜLLER, J., Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raum. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Mk. 60 Pf.

DETER, C., Differential- und Integralrechnung. Grosslichterfelde, Deter. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

GUT, A., Das Linearzeichnen. 1. Thl.: Das geometrische Zeichnen. Wiesbaden, Limbarth. 2 Mk.

SOMOFF, J., Theoretische Mechanik, aus dem Russischen übersetzt von A. ZIWET. 1. Thl.: Kinematik. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

WEISBACH's, J., Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Thl.: Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen, bearb. von G. HERRMANN. 1. Abth.: Die Zwischenmaschinen. 2. Aufl. 7. u. 8. Lief. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 4 Mk.

JENNY, K., Festigkeitsversuche und die dabei angewandten Apparate. 1. Abth. Wien, Gerold.

GRASHOF, F., Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. 2. Aufl. Berlin, Gärtner. 9 Mk.

HOFMANN, F., Grundriss der mathematischen Geographie. 2. Aufl. Bayreuth, Grau'sche Buchh. 1 Mk. 50 Pf.

Arbeiten, astronomisch-geodätische, im Jahre 1877. Bestimmung der Längendifferenzen zwischen Berlin und Paris, Berlin und Bonn, Bonn und Paris. Berlin, Schlesser. 9 Mk.

SCHAUB, F., Nautische Astronomie. 3. Aufl. Wien, Gerold. 6 Mk.

Physik und Meteorologie.

HANKEL, W. G., Elektrische Untersuchungen. 13. Abhandlg. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

SCHRÖDER, E., Anleitung zum Gebrauch physikalischer Apparate. 2. Aufl. Magdeburg, Kroening's Söhne. 1 Mk.

SCHULZE, R., Die physikalischen Kräfte im Dienste der Gewerbe, der Kunst und Wissenschaft. Frei nach A. GUILLEMIN. 1. Lief. Leipzig, Frohberg. 1 Mk.

KOHLFÜRST, L., Ueber elektrische Distanzsignale für Eisenbahnen. Prag, Dominicus. 1 Mk. 60 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr, nach Platon's eigenen Werken und den Zeugnissen älterer Schriftsteller von Dr. BENEDIKT ROTHLAUF, Lehrer der Mathematik und Physik an der königl. Kreisrealschule in München. München 1878. 74 S.

Nachdem Herausgeber und Uebersetzer Platonischer Werke in vielfachen Anmerkungen über die Bedeutung einzelner mathematisch klingender Stellen sich verbreiteten, nachdem insbesondere zwei Stellen in dem „Staate“ und dem „Menon“ eine ganze Literatur hervorgerufen haben, ohne dass allseitige Einigung über deren Meinung hat erzielt werden können, wählte 1861 C. Blass für seine Doctordissertation die gemeinschaftliche Erörterung aller Stellen, nicht etwa in dem Sinne, dass jede einzelne beurtheilt und commentirt würde, sondern in der Absicht, ihnen allen die Bedeutung ihres Verfassers für die Geschichte der Mathematik zu entnehmen. Was vor 17 Jahren Blass in der Schrift „*De Platone mathematico*“ sich als Ziel setzte, hat nun wieder der Verfasser der uns vorliegenden Monographie sich zur Aufgabe gestellt. Herr Rothlauf ist in einiger Beziehung nicht genügend vorbereitet an die Ausarbeitung des interessanten Gegenstandes gegangen. Die einschlägige Literatur beherrscht er nicht in dem Maasse, wie man es wünschen müsste. Er kennt z. B. die ebengenannte Blass'sche Dissertation, wie es scheint, ebenso wenig, wie eine Abhandlung von Th. Henri Martin, die Platonische Zahl betreffend (*Revue archéologique* 1857), ebenso wenig, wie das vortreffliche Buch Bretschneider's über die voreuklidische Geometrie, ebenso wenig, wie das Programm für 1873 der Studienanstalt Hof von G. Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik III, ebenso wenig, wie die historisch-mathematischen Arbeiten des Referenten. Von allen diesen Schriften ist wenigstens in den Anmerkungen, wie im Texte nirgends die Rede. Nur Hankel hat der Verfasser gründlich studirt und benutzt, und neben Hankel die Werke Plato's selbst. Unsere bisherigen Aeusserungen enthalten das. [illegible] auch das, was zum Lobe der Ab-

handlung gereicht. Herr Rothlauf ist seiner Aufgabe weit unbefangener gegenübergetreten, als wenn er die Gesammtheit der Vorarbeiten gekannt hätte, welche in ähnlicher Richtung vorgenommen worden sind, und dieser Unbefangenheit verdanken wir vielleicht manche richtigere Erklärung. Wir erwähnen beispielsweise die Uebersetzung (S. 29) der berüchtigten Stelle von der vollkommenen Zahl. Sie weicht vollständig von der durch Martin gegebenen Uebersetzung ab und führt zu einer durchaus verschiedenen Zahl. Wir sind versucht, in der R.'schen Uebersetzung den richtigeren Sinn zu erkennen, wenn auch die Schwierigkeit der Frage eine rasche Entscheidung ohne gründliche eigene Untersuchung, zu welcher uns gegenwärtig die Zeit fehlt, nicht zulässt. In der Erklärung eines Satzes stimmen übrigens Martin und R. überein, die dadurch wohl als gesichert erscheinen dürfte. „Die Diagonale eines Quadrates mit der Seite 5", heisst es, „die rational ist wenn 1, irrational wenn 2 abgeht." Die Meinung sei die, dass $2.5^2-1=49$ eine Quadratzahl, $2.5^2-2=48$ keine Quadratzahl ist. Aus dieser Stelle geht aber hervor, dass Plato den Näherungswerth $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$, über welchen wir uns S. 89 der hist.-lit. Abthlg. dieses Bandes ausgesprochen haben, gekannt haben kann, dass jedenfalls zwischen der dort angeführten Proklusstelle und *pag.* 546 des Staates ein Zusammenhang anzunehmen ist. Ob Herr Rothlauf (S. 25) in der Erläuterung einer Stelle des Theaetet *pag.* 147, wo er irrationale Kubikwurzeln erkennen will, ebenso glücklich getroffen hat, ist uns nicht ganz wahrscheinlich, und auch gegen einige andere Erklärungen (S. 51, S. 52 Citat 6, S. 64) ist uns eine Polemik denkbar, auf welche wir uns aber hier nicht einlassen möchten. Wir wollen vielmehr durch diese Aeusserungen nur einestheils zeigen, dass wir die Schrift mehr als nur einmal, oder gar als nur flüchtig durchlesen haben, und anderntheils dass wir die Schwierigkeit mancher behandelten Gegenstände vollauf anerkennen. Im Allgemeinen dürfte der Leser durch die mundgerechten deutschen Uebersetzungen des Verfassers sehr angenehm berührt werden und der ganzen Schrift den doppelten Eindruck entnehmen, dass Plato in der That, auch wenn nicht übermässig viele Erfindungen ihm unmittelbar zugeschrieben werden, eine hohe Rolle in der Geschichte der griechischen Mathematik gespielt hat und dass Herr Rothlauf mit den platonischen Schriften so wohl vertraut ist, dass man ihm nur dafür danken kann, die mühselige Arbeit dieser Zusammenstellung auf sich genommen zu haben, welche den meisten mathematischen Benutzern schon durch den Umstand sympathischer als die von Blass sein wird, dass Letzterer sich allenthalben mit dem Abdrucke des griechischen Textes begnügt und dadurch ebenso, wie durch die lateinische Sprache der ganzen Abhandlung sich mehr an Philologen gewandt zu haben scheint.

Cantor.

Die Zahlzeichen und Zahlensysteme der Griechen und ihre Logistik, von Carl Kieseritzky. Beilage zum Jahresbericht der St. Annen-Schule zu St. Petersburg für 1877. 8°. 43 S.

Wir haben es hier mit einer anspruchslosen Zusammenstellung der landläufigen Kenntnisse von dem Rechnen der Griechen zu thun, wie der Verfasser sie aus den von ihm benutzten Schriften von Pott, Nesselmann und Friedlein entnahm. Eigenes Quellenstudium liegt wohl nicht vor. Wesentliche Irrthümer sind uns mit Ausnahme der Behauptung, Ptolemaeus erst habe das babylonische Sexagesimalsystem bei den Griechen eingeführt, nicht aufgestossen.

Cantor.

Della vita e delle opere di Antonio Urceo detto Codro, studi e ricerche di Carlo Malagola. Bologna 1878. XX, 597 S. 8°.

Es könnte fast sonderbar erscheinen, eine Besprechung dieses Werkes gerade in dieser Zeitschrift vorzunehmen. Der Mathematiker, auch derjenige, welcher nebenbei oder sogar mit Vorliebe geschichtlichen Forschungen sich hingiebt, hat das Recht, von jenem berühmten Philologen der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, der sich nach dem Vorbilde eines armen Dichters aus der Zeit des Kaisers Domitian den Namen Codrus gab, nicht mehr als den Namen zu kennen, wenn ihm nicht auch dieser schon fremd ist. Wir dürften daher den ohnedies ziemlich knapp zugemessenen Raum dieser historisch-literarischen Abtheilung, wir dürften die Nachsicht unserer Leser nicht missbrauchen, selbst wenn wir uns competent fühlten, in der Geschichte des Humanimus, zu deren glänzenden Namen Antonio Urceo gehörte, ein kritisches Wort zu sprechen. Wenn wir trotz dieses uns mannigfach auferlegten Verbotes das Werk des Herrn Malagola dennoch als Ueberschrift eines Referates wählen, so gilt unser Bericht nicht dem ganzen umfangreichen Werke, sondern nur einem, dem 8. Capitel, dessen Ueberschrift unsere Entschuldigung in sich trägt: „Von dem Aufenthalte des Nicolaus Copernicus in Bologna.“ Herr Malagola hat, wie sich manche unserer Leser bei diesen Worten erinnern werden, in einem Familienarchiv in Bologna vor einigen Jahren die Acten der deutschen Nation der dortigen Universität aufgefunden und in denselben den Namen des grossen Thorner Astronomen, eine Entdeckung, welche damals bereits viel von sich reden machte, weil sie dem Streit über die Nationalität, welcher die Familie Koppernigk angehörte, mit einem Schlage ein Ende machte. Herr Malagola hat nun gegenwärtig seine Actenuntersuchungen abgeschlossen, aus welchen folgende Punkte mit Bestimmtheit hervorgehen:

Nicolaus Kopperlingk aus Thorn (das ist die in die Bologneser Acten übergegangene Schreibart des Namens) wurde in Bologna 1496

eingezeichnet, muthmasslich gegen Anfang October, da in diesem Monat das Universitätsjahr seinen Anfang nahm. Genau zwei Jahre später wurde auch Andreas Kopperlingk der deutschen Nation von Bologna eingereiht. Daraus folgt, dass beide Brüder sich in Bologna dem Studium des Kirchenrechts widmeten, da Studirende anderer Wissenschaften der Nation nicht angehören konnten. Den Doctorgrad der Rechte hat zwar Nicolaus erworben, aber nicht in Bologna, wahrscheinlich aus dem Grunde eine andere Hochschule zur Erlangung der akademischen Würde wählend, weil die Kosten in Bologna für seine Verhältnisse unerschwinglich hoch waren. Aus seinem Gehalte als Canonicus von Frauenburg, welchen er frühestens seit 1498 bezog, scheint er auch die Studien seines Bruders Andreas bestritten zu haben, und so begreift es sich, wenn ein Brief des Bernhard Scultetus an Bischof Lucas Watzelrode, den Oheim der beiden Brüder, vom 21. October 1499 die jungen Leute als in grosser Geldnoth befindlich und von Schulden gedrückt „*scolarium more*“ schildert. Wo Nicolaus sich den Doctorhut erwarb, wusste Herr Malagola noch nicht. Er schlägt nur vor, in Rom und in Ferrara weitere Nachforschungen anzustellen, ein Vorschlag, der, wenn wir gut unterrichtet sind, inzwischen zu wichtigen Ergebnissen geführt hat. In Bologna, und zwar unter Antonio Urceo, begann Nicolaus C. seine Studien der griechischen Sprache und es ist gelungen, in hohem Grade wahrscheinlich zu machen, dass er dort mit den Briefen des Theophylaktos Simokattes bekannt wurde, deren Uebersetzung er 1509 herausgab.

Lehrer oder vielmehr Freund des Copernicus war bekanntlich der Astronom Domenico Maria Novara, mit welchem er die Beobachtung vom 9. März 1497 anstellte, die erste, welche überhaupt in den Revolutionen vorkommt. Auch über Novara hat Herr Malagola Neues zu Tage gefördert, insbesondere dessen Tod in der dritten Augustwoche 1504 festgestellt.

Eine letzte Persönlichkeit, von welcher der Mathematiker sich freut, in dem genannten Capitel zu lesen, ist Scipione del Ferro, der Erfinder der Auflösung der kubischen Gleichung. Herr Malagola bringt Actenstücke zum Abdrucke, welche beweisen, dass Scipione del Ferro 1496 zum ersten Male Vorlesungen hielt, dass also Copernicus, wenn er in Bologna überhaupt mathematische Vorlesungen besuchte, doch wohl wahrscheinlicher bei den älteren Lehrern, als bei dem Neuling gehört haben dürfte. Andere Actenstücke beweisen, dass del Ferro 1526 in Venedig war, wo er am 29. October noch verweilte. Ein letztes Actenstück vom 16. November 1526 spricht von dem vor wenigen Tagen erfolgten Tode des del Ferro, welcher also in die erste oder zweite Novemberwoche 1526 zu setzen ist.

CANTOR.

Karl Friedrich Gauss. Zwölf Capitel aus seinem Leben von Ludwig Haenselmann, Stadtarchivar in Braunschweig. Leipzig, bei Duncker & Humblot. 1878.

Die hundertste Wiederkehr des Geburtstages des grossen Astronomen, Mathematikers und Physikers hat mit ihrer Feier das Interesse auch an den kleinsten Ereignissen aus dem Leben und Wirken des Jubilars in erhöhtem Maasse wach gerufen. Der Stadtarchivar von Braunschweig war mehr, als irgend ein Anderer dazu berufen, nach noch unbekannten Einzelheiten zu forschen, welche die Familienverhältnisse von Gauss betreffen; er war auch mehr, als ein Anderer in der Lage, wirklich Neues zu finden, denn wenn der fertige Gelehrte Gauss in seinen Schriften, in seinen Briefwechseln, in dem Gedächtnisse derer, die in Göttingen noch mit ihm verkehren konnten, deutlich lebt, so ist über das Werden von Gauss die lebende Erinnerung durch die Länge der Zeit, die inzwischen verflossen, ausgeschlossen, und Aufzeichnungen waren darüber nur wenige zur allgemeinen Kenntniss gekommen. Herr Haenselmann hat in den Kirchenbüchern u. s. w. von Braunschweig und den umliegenden Ortschaften genaue Suche angestellt und das Ergebniss seiner Untersuchungen in einer Reihe von Zeitungsartikeln im „Braunschweiger Tageblatt" niedergelegt. Es war ein glücklicher Gedanke, diese Artikel in einem Bändchen von 106 schön ausgestatteten Seiten auch dem grösseren Leserkreise zu bieten, welcher mit jener Zeitung nicht bekannt zu sein pflegt. Wie wir schon andeuteten, hat Herr Haenselmann insbesondere über die Familienverhältnisse von Gauss und von den Personen in seiner Heimath, die zu ihm in näherer Beziehung standen, Auskunft gesucht und gefunden. Es bestätigt sich vollkommen die schon von Sartorius von Woltershausen hingeworfene Vermuthung, die mütterliche Familie von G. sei es mehr, als die väterliche gewesen, in welcher die Geisteskraft ihres grössten Sohnes wurzelte. Neues Licht ist auch auf die Zeit der Braunschweiger Gelehrtenthätigkeit geworfen, auf die Zeit, während welcher die *Disquisitiones arithmeticae* zum Drucke gelangten, während welcher die Erwerbung des Doctorgrades in Helmstädt fällt, während welcher die Ceresbahn berechnet wurde. Zum ersten Male dürfte wohl hier bekannt werden, dass der Plan gefasst war, eine Sternwarte in Braunschweig für G. zu errichten, als er die Berufung nach Petersburg ausschlug. Seine Verheirathung mit Johanna Osthoff bildet ein anderes anmuthiges Capitel der Haenselmann'schen Veröffentlichung, welches übrigens früher als die anderen bekannt wurde dadurch, dass es auch in der Zeitschrift „Im neuen Reiche" zum Abdruck gelangte, aus welcher wir selbst den Brief, in dem G. um die Hand der Geliebten anhielt, in einem Artikel der „Allg. Zeitung" benutzen konnten. Endlich gehören auch briefliche Mittheilungen von G. aus Göttingen, an seine Freunde

in der Heimath gerichtet, zu den fesselnden Theilen der wohlgelungenen Schrift, welche wir aufrichtig und warm empfehlen möchten. CANTOR.

Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke. Von VICTOR SCHLEGEL. Leipzig, bei F. A. Brockhaus. 1878. VIII, 82 S.

Der Verfasser beginnt sein Vorwort mit dem Satze: „Die folgenden Blätter sollen keine allseitig erschöpfende Darstellung des Lebens und Wirkens von Hermann Grassmann geben, sondern dasselbe in seinen Hauptzügen verfolgen und alles Dasjenige umfassen, was für die wissenschaftliche Welt von Interesse sein kann.“ Hat Herr Schlegel nun diese Absicht, welche ihn leitete, erfüllt? In mancher Beziehung möchten wir die Frage bejahen, in anderer wieder verneinen. Zu den Hauptzügen des Wirkens eines Gelehrten gehören unbedingt die Grundgedanken seiner Schriften, und diese suchen wir vergeblich in der vor uns liegenden Darstellung. Wir hören wiederholt, dass G. eine ganz neue Lehre geschaffen, dass sie leider noch immer nicht zur allgemeinen Kenntniss gediehen sei, dass aus ihr als Folgerung die wichtigsten Sätze moderner Algebra und Geometrie sich ableiten lassen — aber worin die Lehre eigentlich bestehe, das erfahren wir nicht. Gerade Herr Schlegel wäre aber gewiss der Mann gewesen, der eine Andeutung, und sei es von gedrängtester Kürze, hätte geben müssen, Herr Schlegel, der mehr als jeder Andere in Grassmann's Geist eingedrungen ist und dessen Schriften, man möchte fast sagen, in die Sprache gewohnter Mathematik zu übersetzen wusste. Dieser allgemeinen Bemängelung müssen wir ein ebenso allgemeines Lob gegenüberstellen. Wenn uns auch nicht gesagt wird, was die Ausdehnungslehre sei, so wird uns dafür in so warmer, begeisterter Weise deren Trefflichkeit geschildert, dass gewiss kein Leser dieser Brochure es vernachlässigen wird, sich nachträglich, so genau es immer gelingen will, mit den G.'schen Schriften bekannt zu machen, und auch dieses bewirkt zu haben, ist ein Verdienst eines Biographen. Von Einzelheiten, die uns besonders aufgefallen sind, möchten wir auf die Darstellung der Beziehungen Hermann Hankel's zu G. (S. 53) und auf die des eigenthümlichen Benehmens von Cauchy (S. 38) aufmerksam machen. De Saint-Venant veröffentlichte 1845 in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie eine geometrische Multiplication der Strecken, welche mit der von G. in der Ausdehnungslehre von 1844 vorgetragenen wesentlich identisch war. An der Selbstständigkeit des französischen Gelehrten ist nicht einen Augenblick zu zweifeln. Einen Zweifel hatte auch G. nicht, schickte jedoch zwei Exemplare seines Buches an Cauchy mit der Bitte, eines derselben De Saint-Venant zuzuwenden. Cauchy vergass die Besorgung, wie es scheint, was ihn aber nicht hinderte,

sieben Jahre später *(Comptes rendus XXXVI)* eine Methode der Auflösung algebraischer Gleichungen mit Hilfe der *clefs algébriques* zu veröffentlichen, die mit einzelnen Theilen des G.'schen Buches die entschiedenste Aehnlichkeit besitzt. Genannt war aber G. nicht in Cauchy's Aufsätzen. G. reclamirte bei der Pariser Akademie. Seine Verwahrung wurde einer Commission überwiesen und ein Bericht dieser Commission ist niemals erschienen.

CANTOR.

Kepler als Reformator der Astronomie, von ROBERT BILLWILLER. Neujahrsblatt, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich auf das Jahr 1878. 4°. 24 S. mit einer Figurentafel.

Der Verfasser dieser kleinen Abhandlung, Adjunct der Sternwarte und Vorstand der meteorologischen Centralanstalt in Zürich, den Historikern der exacten Wissenschaften seither namentlich durch die anerkennenden Worte empfohlen, welche Professor Rudolf Wolf ihm in der Vorrede zur Geschichte der Astronomie als seinem Mitarbeiter widmet, hat nunmehr auch ein eigenes geschichtliches Schriftchen veröffentlicht. Ueber Kepler war zwar schon Vieles und Gutes geschrieben. Es giebt eine ganze Kepler-Literatur, unter welcher die Einleitungen und zahlreichen Anmerkungen, mit welchen Frisch die von ihm besorgte Gesammtausgabe von Kepler's Werken bereicherte, eine rühmlichste Stellung einnehmen. Andere Schriften sind volksthümlicher abgefasst und zeigen in deutschem schönen Sprachgewande soviel als möglich ohne Benutzung mathematischer Kunstausdrücke nicht blos, was Kepler zur Reform der Sternkunde geleistet, sondern wie er es geleistet hat. So hat insbesondere Ernst Friedrich Apelt in seinem Buche von 1849: „Johann Kepler's astronomische Weltansicht", seinen Helden als Vereiniger zweier gar verschiedenen Geistesgaben hinzustellen gewusst, als unermüdlichen Rechner, als phantasievollen Propheten der Naturforschung. Es war zu diesem Zwecke nothwendig, alle jene Rechnungen als im Dienste der Idee stehend erkennen zu lassen und den Mathematiker Kepler, so ungeheure Anrechte er auf ewiges Gedächtniss sich erwarb, einen Augenblick über den Physiker Kepler zu vergessen. Herr Billwiller ist mit Glück in Apelt's Fusstapfen getreten, und je weniger das genannte Buch von 1849 gekannt zu sein scheint (auch Referent wurde auf dasselbe erst aufmerksam gemacht, nachdem er die Billwiller'sche Abhandlung längst gelesen hatte), um so weitere Verbreitung verdient das Neujahrsblatt der Züricher Naturforschenden Gesellschaft.

CANTOR.

---

eine Sterblichkeitstafel herzustellen hat, und wenn auch in der äusseren Anordnung der Rechnung Verschiedenheiten möglich sind, so bleibt doch die theoretische Grundlage derselben unabänderlich und eine und dieselbe. Nun hat sich aber in den bisher zur Ausführung gekommenen Fällen regelmässig die Erscheinung dargeboten, dass die aus einer solchen Rechnung hervorgegangenen Werthe der Sterbenswahrscheinlichkeiten (d. h. der Wahrscheinlichkeiten, binnen Jahresfrist zu sterben) für die successiven Lebensalter keineswegs eine besonders regelmässige Reihe bildeten, sondern in ihren Differenzen Sprünge zeigten, die man nicht als in der Natur der Sache begründet anerkennen konnte. So wenn z. B. eine Rechnung ergab, dass (wir nehmen den Fall aus der Wirklichkeit) die Sterbenswahrscheinlichkeit

einer 24jährigen Person = 0,01012,
„ 25 „ = 0,00268,
„ 26 „ = 0,00788

sein soll, musste man gewiss stutzig werden; denn es ist von vornherein gar kein Grund abzusehen, weshalb dem Lebensalter von 25 Jahren eine so sehr viel kleinere Sterblichkeit zukommen sollte, als den beiderseits benachbarten Lebensaltern von 24 und 26 Jahren, während man im Gegentheil alle drei nahe, d. h. bis auf geringe Differenzen, gleich gross hätte erwarten sollen. Man musste offenbar in jedem Falle, wo solche Irregularitäten eintraten, zu der Annahme gelangen, dass die Zahl der Beobachtungen noch nicht gross genug gewesen sei, um das Gesetz der grossen Zahlen zu einer vollen sichtbaren Wirkung kommen zu lassen. Da man es aber nicht immer in seiner Gewalt hat, das Beobachtungsmaterial beliebig zu vergrössern, so entstand daneben noch immer die Frage, ob sich nicht ein Ausgleichungsverfahren angeben lasse, um die auch aus einem geringeren Beobachtungsmaterial hervorgegangenen Werthe der successiven Sterbenswahrscheinlichkeiten in eine annehmlichere und befriedigendere Reihe umzuwandeln, und dieses eben ist das oben bezeichnete Problem, welches bis jetzt eine genügende Lösung nicht gefunden hat.

Die erste Hälfte der vorliegenden Schrift beschäftigt sich mit den beiden Fundamentalaufgaben: Aus einer gegebenen Sterbenswahrscheinlichkeit den wahrscheinlichsten Werth der binnen Jahresfrist Sterbenden und dessen mittleren Fehler — und umgekehrt aus einem gegebenen Beobachtungsmaterial den wahrscheinlichsten Werth der Sterbenswahrscheinlichkeit und dessen mittleren Fehler zu finden. Sie bewegt sich damit auf bekanntem Boden; denn diese Untersuchungen sind bereits anderweit gegeben, sie kommen zuletzt auf Entwickelungen hinaus, welche Laplace in der *Théorie analytique des probabilités* angestellt hat, der nur den Begriff des mittleren Fehlers, welchen erst Gauss aufgestellt hat, *noch nicht* hatte. Der Verfasser reproducirt diese Untersuchungen in einer

durchaus ansprechenden Weise und gebraucht dieselben als Unterlage für die weiter daran zu knüpfenden Folgerungen.

Uebergehend zu dem eigentlichen Zwecke der Schrift, stellt der Verfasser nun zunächst die Forderung auf, dass, wenn von einer Ausgleichung der aus einem gegebenen Beobachtungsmaterial hervorgegangenen und an sich von einander unabhängigen Sterbenswahrscheinlichkeiten die Rede sein soll, dazu vor allen Dingen das Vorhandensein gewisser Bedingungen nöthig werde, die diese Sterbenswahrscheinlichkeiten unter einander verknüpfen. Wo solche Bedingungen fehlen, da sei kein Grund vorhanden, etwa vorkommende Unregelmässigkeiten zu beanstanden und die gefundenen Werthe zu verändern. Diese Forderung erscheint so selbstverständlich, dass wir dabei nicht verweilen wollen. Weiter führt er aus, dass die gedachten Werthe am vollständigsten unter einander verknüpft erscheinen, wenn die Sterbenswahrscheinlichkeit als eine der Form nach bekannte Function des Lebensalters definirt wird, und auf dieser Grundlage liefert er sodann eine Entwickelung, die zur Bestimmung der unbekannten Constanten der gedachten Function schliesslich bei dem bekannten Gleichungensystem der Methode der kleinsten Quadrate anlangt. Dieser Erfolg war offenbar vorauszusehen; denn wer sähe nicht, dass hier unmittelbar eine Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate vorliegt? Gegeben sind gewisse Werthe (hier Sterbenswahrscheinlichkeiten) mit ihren Gewichten (hier mittleren Fehlern), diese Werthe sollen einer gewissen Function mit vorläufig unbekannten Constanten Genüge leisten: das ist doch offenbar nichts Anderes, als eine Aufgabe, welche der Methode der kleinsten Quadrate unterliegt. Diese ganze Entwickelung des Verfassers wäre also im Grunde überflüssig gewesen; sie enthält in der That die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, soweit solche für diesen speciellen Fall in Betracht kommt, implicite in sich. Auffallend ist uns dabei nur gewesen, dass der Verfasser seine Entwickelung höher stellt, als wenn er unmittelbar die Methode der kleinsten Quadrate angewandt hätte. Er erklärt, seine Endgleichungen gefunden zu haben, „ohne von irgend einer Hypothese Gebrauch zu machen, wie das die Methode der kleinsten Quadrate nicht vermeiden kann“. Hier liegt wohl ein Missverständniss znm Grunde. Die Methode der kleinsten Quadrate (in der älteren Darstellung derselben, wie sie Gauss in der *Theoria motus corp. coel.* gegeben hat) beruht allerdings auf der Hypothese, dass, um die Sache kurz auszudrücken, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x der Function $e^{-h^2x^2}$ proportional sei. Nun hat aber der Verfasser selbst bewiesen, dass diese Bedingung im vorliegenden Falle erfüllt ist, also findet hier doch offenbar bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate eine Hypothese nicht mehr statt, die Hypothese ist Wirklichkeit geworden und Alles ist in Ordnung. Das von dem Verfasser nebenher noch angeführte Argument, dass die

Gewichte der zu findenden Wahrscheinlichkeiten noch von den unbekannten Werthen derselben abhängig seien, ist dabei von keinem Belang und findet durch Anwendung der Methode von selbst seine Erledigung.

Wenn nach dem Gesagten für unser in Rede stehendes Problem die Forderung gestellt wird, die Sterbenswahrscheinlichkeit als eine der Form nach bekannte Function des Lebensalters auszudrücken, so muss freilich weiter hinzugefügt werden, dass eine solche Function leider zur Zeit nicht existirt. Alle die zahlreichen bisher unternommenen Versuche, die Sterblichkeit in ihrer Abhängigkeit vom Lebensalter durch eine Function darzustellen, müssen durchaus als gescheitert angesehen werden, und der glückliche Augenblick, welcher den grossen Kepler bei seiner Untersuchung der Marsbeobachtungen auf die Ellipse führte, ist für unsern Fall noch nicht dagewesen. Wohl hat uns die Schrift den Eindruck gemacht, als ob der Verfasser vielleicht eine solche Function *in petto* habe. So lange diese aber nicht bekannt ist, kommen wir in der That nicht weiter und bleiben nur auf die blosse Andeutung des einzuschlagenden Weges beschränkt. Nichtsdestoweniger aber müssen wir der Schrift das grosse Verdienst zusprechen, dass sie zur Klärung der in Rede stehenden Fragen einen wesentlichen Beitrag liefert und deshalb dem künftigen Fortschreiten auf diesem Gebiete erspriessliche Dienste leisten wird.

Hannover. TH. WITTSTEIN.

La teoria delle ombre e del chiaroscuro, ad uso della università, delle scuole d'applicazione per gli Ingegneri, delle accademie militari, degli instituti tecnici, degli Ingegneri, architetti e designatori dell' Ing. Domenico Tessari. Torino 1878. *Fascicolo I.*

Der Verfasser, Professor der Anwendungen der darstellenden Geometrie an dem königl. italienischen Museum der Industrie in Turin, sagt in der Ankündigung, dass Italien schon seit vielen Jahren keine Originalarbeit über die Anwendungen der darstellenden Geometrie hervorgebracht habe und dass es nun für dasselbe Zeit sei, auch in diesen Wissenschaften in den edeln Wettstreit mit den übrigen civilisirtesten Nationen einzutreten. Die Regierung habe in allen Ingenieurschulen des Königreichs einen Lehrstuhl für das bezeichnete Gebiet errichtet; es fehle aber an Lehrbüchern, die auf der Höhe der Zeit ständen, und der Verfasser fühle sich angeregt, nach seinen Kräften diese beklagenswerthe Lücke auszufüllen. So legt er jetzt die erste des auf zwei Lieferungen berechneten Werkes über die Anwendung auf die Beleuchtungslehre vor.

Die darstellende Geometrie, als besonderer Wissenszweig von Monge gleichzeitig mit der polytechnischen Schule (1794) in Paris ins Leben gerufen, ist in ihrer Entwickelung an diese Anstalten geknüpft. Zuerst allein von Frankreich gepflegt, wurde sie seit dem etwas mehr als 50jähri-

gen Bestehen der polytechnischen Schulen in Deutschland auch bei uns gefördert, während Italien erst in neuerer Zeit derartige Schulen und zugleich Arbeiter in der darstellenden Geometrie (Bellavitis) erhielt, England aber ohne solche Anstalten auch dieses Wissensgebiet noch nicht pflegte. Wir können mit Freuden die hochbegabte italienische Nation auf dem Felde dieser Arbeit begrüssen.

Das vorliegende Lehrbuch, soweit es bis jetzt erschienen ist, enthält eine klare Darstellung des behandelten Stoffes mit Berücksichtigung der neueren Forschungen, ohne gerade selbst Neues zuzufügen. Die benutzten Sätze der darstellenden Geometrie sind nochmals auseinandergesetzt, wie es bei einem Docenten begreiflich ist, der nur die Anwendungen dieser Wissenschaft zu lehren hat. Die Darstellung ist etwas breit, was besonders im Gegensatze zu der in deutschen Werken angestrebten Kürze auffällt. Möglichste Kürze wirkt angenehm und erweckend, so lange sie nicht, besonders durch Hereinschachteln zu vielen Stoffes in einen einzigen Satz ein wiederholtes Lesen nothwendig macht und dadurch wieder einen grösseren Zeitaufwand verlangt. Das vorliegende Werk aber könnte durch Kürzung, besonders in der so leicht ermüdend wirkenden Beschreibung der Constructionen, wesentlich gewinnen. Die klare und geordnete Darstellung der verschiedenen Methoden ist dagegen sehr anzuerkennen.

Geben wir nun eine Uebersicht des Inhaltes. Im ersten Capitel werden die allgemeinen Begriffe des Lichtstrahlenbüschels, der beleuchteten und beschatteten Oberflächentheile eines Körpers, des Eigen- und Schlagschattens, der Licht- und Schattengrenze *(separatrice)*, des Schattenkegels und Cylinders, des vollen und Halbschattens u. s. w. gegeben und die Parallelbeleuchtung als die vorzugsweise zu behandelnde bezeichnet. Der erste Theil soll von den Grenzlinien der Beleuchtung, der zweite, noch nicht erschienene, von den Abstufungen der Beleuchtung handeln. Das zweite Capitel handelt von dem Schatten der Punkte auf die Projectionsebenen, auf eine beliebige Ebene, auf ein Polyeder, auf einen Kegel und Cylinder, auf eine Kugel und auf eine beliebige Umdrehungsfläche. Im dritten Capitel über den Schatten von Geraden wird dieser einerseits als der nützliche Theil des Schnittes der durch die Gerade gehenden Schattenebene mit der Oberfläche des beschatteten Körpers, andererseits als der Ort der Schatten aller Punkte der Geraden bezeichnet. Es wird dann der Schatten der Geraden auf die Projectionsebenen, auf eine beliebige Ebene, auf ein Polyeder, eine Treppe, auf eine Kegelfläche, auf eine Kugel, auf eine beliebige Umdrehungsfläche bestimmt und stets eine Tangente des Schattens construirt. Im vierten Capitel über den Schatten von Polygonen und Curven wird zuerst der Schatten eines ebenen Polygons auf die Projectionsebenen bestimmt und ihre Affinität unter einander, sowie die eines jeden

mit der gleichnamigen Projection des Polygons nachgewiesen. Dann wird der Schatten einer Curve und seine Tangente construirt, insbesondere eines Kreises auf die Projectionsebenen unter Bestimmung der Axen der Schattenellipse, der Schatten einer ebenen Curve auf eine Projectionsebene unter Benutzung der Affinität, und zuletzt der Schatten einer cylindrischen Schraubenlinie auf eine zu ihrer Axe senkrechte Ebene, welcher sich als eine verlängerte, oder eine gemeine, oder eine verkürzte Cykloide ergiebt. Im fünften Capitel über den Schatten der Polyeder wird deren Licht- und Schattengrenze ohne Hilfe des Schlagschattens, sondern mittelst der Schnittfiguren mit projicirenden Ebenen von Lichtstrahlen bestimmt. Es werden dann die Schatten auf die Projectionsebenen construirt von einem regelmässigen Dodekaeder, einem Prisma, einer Pyramide und von diesen beiden auf einander, von einer Treppenwand auf eine Treppe, einem Schornstein auf ein Dach und von einer Deckplatte auf einen Cylinder, wobei die Methode der Hilfsebenen durch die Lichtstrahlen, der Profilebenen und der Schattenbestimmung von einer Linie auf eine Linie vermittelst der Schlagschatten beider angewendet sind.

Im sechsten Capitel über den Schatten krummer Flächen im Allgemeinen werden fünf Methoden zu seiner Bestimmung unterschieden: die der schneidenden (durch die Lichtstrahlen gelegten) Hilfsebenen, die der berührenden (durch den leuchtenden Punkt gehenden) Ebenen, die der eingehüllten Flächen (deren Licht- und Schattengrenze die Charakteristik in Punkten der gesuchten Licht- und Schattengrenze schneidet), die der Schlagschatten der Erzeugenden der krummen Fläche (deren Einhüllende die Schlagschattengrenze ist), die auf ihre zum Voraus bekannte Gestalt gegründete (Kegelschnitt bei Flächen zweiter Ordnung). Zur Bestimmung der Tangente der Eigenschattengrenze in einem ihrer Punkte ist dann der Satz Dupin's über die Indicatrix angeführt, in welcher der Lichtstrahl und jene Tangente conjugirte Durchmesser bilden. Zuletzt sind einige Hilfssätze über die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung und ihr mögliches Zerfallen in zwei Kegelschnitte angeführt. Das siebente Capitel über den Schatten von abwickelbaren Flächen behandelt den Schatten eines Cylinders und eines Kegels, voll oder hohl, und unter verschiedenen Annahmen auf die Projectionsebenen und von solchen Körpern auf einander, sowie den Schatten einer Böschung, welche durch eine Fläche von gleichförmiger Neigung gebildet ist. Im achten Capitel über den Schatten der Kugel und des Ellipsoids werden deren Schattengrenzen von bekannter Gestalt auf verschiedene einfache Weisen construirt; es wird der Schatten einer Kugel auf einen Kegel, derjenige in einer kugelförmigen Nische und in einer kugelförmigen, mit einer cylindrischen Oeffnung versehenen Kuppel bestimmt, jedesmal mit Beachtung der ausgezeichneten Punkte. Im neunten Capitel

über den Schatten von Umdrehungsflächen wird die Methode der eingehüllten Flächen angewendet, und zwar die der eingehüllten Kegel, Cylinder und Kugeln auf das Umdrehungsellipsoid, das einschalige Hyperboloid und das Paraboloid. Sodann wird der Schatten einer Fläche mit nur durch Zeichnung gegebenem Meridiane vermittelst der Schlagschatten der Parallelkreise bestimmt. Darauf wird der Satz von Dunesme bewiesen, dass die Grenze des Schlagschattens einer Umdrehungsfläche auf eine zur Umdrehungsaxe senkrechte Ebene zur Evolute hat den Umriss des Schlagschattens eines Conoids, erzeugt von einer Geraden, welche auf der Axe und auf der Eigenschattengrenze der Umdrehungsfläche hingleitet und immer senkrecht auf der Axe bleibt. Sodann wird die Eigenschattengrenze eines Kreisringes durch Verschiebung seiner Meridiane in den Mittelpunkt der Fläche, wo sie eine Kugel mit ihrer Schattengrenze bilden, bestimmt.

Hier endigt der erschienene Theil des Werkes, dessen Fortsetzung man mit Vergnügen entgegensehen darf.

Chr. Wiener.

Mathematische Modelle, ausgeführt im mathem. Institut des königl. Polytechnikums zu München. Abth. I unter Leitung von Prof. Dr. Klein, Abth. II unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Verlag von L. Brill, Darmstadt.

Auf die erste Serie geometrischer Gypsmodelle, welche wir in dieser Zeitschrift, Jahrg. XXII besprochen haben, ist rasch eine zweite Serie gefolgt. Im Zusammenhalt mit neueren Literaturerscheinungen und mit dem Umstande, dass auch im Auslande in neuester Zeit eine Reihe von Modellen, von abwickelbaren Flächen etc. erschienen sind, dürfen wir hieraus schliessen, dass nach einer längeren Periode abstract-geometrischer Betrachtung nun das Bedürfniss nach Veranschaulichung, sowohl in der Forschung, als im Unterricht, stark im Wachsen begriffen ist. Die neue Sammlung beweist wieder durch die Auswahl ihrer Objecte, mit denen sie in sehr verschiedene Gebiete neuerer Forschung eingreift, den wissenschaftlichen Standpunkt des Unternehmens. Ich bespreche zuerst die zweite Abtheilung, welche sich an die frühere Serie anschliesst.

IX. Rotationsfläche von constantem negativem Krümmungsmass, Kegeltypus. Von J. Bacharach.

X. Desgl., Hyperboloidtypus. Von W. Dyck.

Aus der Identität der Geometrie auf einer Fläche constanter Krümmung mit der nichteuklidischen Geometrie fliesst das Interesse an deren Gestalt und den geodätischen Linien derselben. Von Rotationsflächen mit constantem negativem Krümmungsmass giebt es drei Typen, je nachdem die Meridiancurven die Axe im Unendlichen, im Endlichen oder

gar nicht treffen. Der erste Fall war schon in der ersten Serie dargestellt, den zweiten und dritten Fall geben IX und X. Herr Dyck liefert in der Erklärung zugleich eine eingehende Behandlung des eben erwähnten Zusammenhangs für diese beiden Flächen und die hieraus folgende Construction der geodätischen Linien.

VIII. Die geodätischen Linien der Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung. Von A. v. Braunmühl.

Es werden die drei von einander verschiedenen Typen mitgetheilt: das Unduloid, Nodoid und Catenoid, je nachdem die Meridiancurven wellenförmig sind, einen Knotenpunkt besitzen oder, im Grenzfall, Kettenlinien sind (Figuren, die bekanntlich in den Plateau'schen Versuchen auftreten).

XI. Die Bahn eines schweren Punktes auf der Kugeloberfläche. Von L. Schleiermacher. Es ist der Fall einer in sich zurücklaufenden Bahncurve verzeichnet.

Während diese Modelle alle wesentlich auf der Discussion elliptischer Functionen beruhen, wird in den folgenden der ersten Abtheilung das Interesse für das Gestaltliche überwiegend.

VI. Drei Modelle der Kummer'schen Fläche. Von K. Rohn.

Von dieser Fläche vierter Ordnung, mit 16 Knotenpunkten und 16 längs Kegelschnitten berührenden Ebenen, werden hier die drei Fälle mit 16, 8, bez. 4 reellen Knotenpunkten (von denen der erste Fall früher schon durch Klein veröffentlicht worden ist) dargestellt, bez. aus 8, 4 und 2 Theilen bestehend. Die Flächen sind durch vorherige geeignete Construction sämmtlicher Berührungskegelschnitte hergestellt. Das Studium dieser Flächen erlangt jetzt auch vom Standpunkte der *Analysis situs* Wichtigkeit, indem auf ihnen und der Fresnel'schen Wellenfläche die algebraischen Functionen vom Geschlecht 2 zur Darstellung gebracht werden können.

VII. Fläche dritter Ordnung mit vier reellen conischen Knotenpunkten nebst Haupttangentencurven. Von J. Bacharach. Es ist die Fläche, aus welcher Klein die Gestalten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung durch Deformation ableitet (Math. Ann. VI), eine Fläche mit algebraischen Haupttangentencurven, die je drei Spitzen haben.

Ich erwähne noch die Sorgfalt in der Ausführung dieser Modelle. Für die etwaige Fortsetzung sei der Wunsch ausgesprochen, dass die verschiedenen Formen der Knotenpunkte einer Fläche zusammengestellt und in grösserem Massstabe für sich ausgeführt werden mögen.

Erlangen. M. Noether.

Quatre modèles représentant des surfaces développables avec des renseignements sur la construction des modèles et sur les singularités qu'ils représentent; par V. Malthe-Bruun et C. Crone. Avec quelques remarques sur les surfaces développables et sur l'utilité des modèles; par M. le Dr. H. G. Zeuthen. Leipzig, Bernhard Hermann. 1877.

Diese vier Modelle sind einfach aus Carton gefertigt und stellen abwickelbare Flächen, auf die Ebene abgewickelt, vor, die selbst durch eine leichte Verschiebung der Blätter daraus hervorgehen. Die Idee der Construction ist zwar nicht neu: in Salmon's Raumgeometrie (Fiedler's 2. Ausgabe, Theil II S. 624) ist das erste der vorliegenden Modelle beschrieben, das aus zwei gleichen Kreisringen besteht, die congruent aufeinandergelegt, längs des innern Randes zusammengeheftet und nach einem gemeinsamen Radius aufgeschnitten sind. Aber diese Idee ist, auf Herrn Zeuthen's Anregung, durch Zufügung von Durchsetzungen der beiden Blätter, also Doppelcurven, ferner durch singuläre Stellen der Rückkehrkante, besonders Cuspidalpunkte, dann durch Aufzeichnen des Verlaufs der Curven in der Nähe der singulären Stellen, erweitert und handlich ausgeführt. Diese nur schematische Durchführung genügt völlig, um von verwickelten gestaltlichen Verhältnissen, wie sie in den singulären Stellen von abwickelbaren Flächen und von Flächen überhaupt auftreten, eine anschauliche Vorstellung zu geben. Die beigegebenen Erklärungen über die Construction solcher Modelle kommen dem Studium bequem entgegen und auch die Forschung ist, in Anbetracht der nur allmäligen Verallgemeinerung, welche die Theorien der Flächensingularitäten, der Reciprocalfläche, der zweiblättrigen Ebene etc. erfahren haben, für solche einfache Hilfsmittel dankbar.

Erlangen. M. Noether.

Neuere Geometrie für die oberen Classen der Realschulen und Gymnasien. Von Dr. H. L. Rottok, Rector am Realgymnasium in Rendsburg. Schleswig, Julius Bergas. 1877. 62 S. 8°. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Wir können nicht umhin, das Erscheinen eines Lehrbuches von Tendenz und Inhalt, wie das vorliegende, freudig zu begrüssen und dasselbe als eine willkommene Zugabe zu den besten das Interesse der reiferen Schüler besonders erweckenden und den Unterricht in der Geometrie belebenden Lehrmitteln anzuerkennen. Das Bedürfniss unserer Zeit, sowie die durch die Einführung der sogenannten neueren Geometrie erfahrungsmässig im Unterricht erzielten Erfolge haben Veranlassung gegeben zur Abfassung mehrerer solcher elementar-geometrischer Lehrbücher, welche theils in besonderen Abschnitten, wie das Lehrbuch der ebenen Geometrie von Heis und Eschweiler, und der vortreffliche

Leitfaden der ebenen Geometrie von Hub. Müller, theils monographisch, wie die neuere Geometrie von Schmitt, diese Disciplin abgehandelt haben. Zu der letzteren Art gehört auch das vorliegende Lehrbuch. Was dasselbe jedoch vor den übrigen bekannten Lehrbüchern dieser Art besonders auszeichnet, ist die demselben eigenthümliche, auch in dem früher von dem Verfasser herausgegebenen Leitfaden der ebenen Geometrie erprobte Klarheit der Darstellung und der Kürze der Beweisführung. Man findet hier in wohlerwogener Berücksichtigung des durch die übrigen geometrischen Disciplinen immerhin sehr beschränkten Zeitmasses, auf einem Raum von nur 62 Octavseiten eine erstaunliche Fülle des Inhalts. Dennoch reihen sich die Sätze der einzelnen Abschnitte so leicht und fliessend in einem durchaus elementaren Gewande aneinander, dass in Hinsicht auf die Tendenz des Buches den Schülern der Prima eines Gymnasiums keineswegs zuviel, den Realschülern aber immerhin völlig ausreichendes, zur Vorbereitung auf den Unterricht in der analytischen und descriptiven Geometrie überaus fruchtbringender Lehrstoff geboten wird.

Der Inhalt des Buches, in acht Abschnitten vertheilt, ist kurz folgender:

Im ersten Abschnitte werden in elf Sätzen die Eigenschaften der Transversalen ebener Polygone abgehandelt. Die Theilungsverhältnisse beziehen sich theils auf die Durchschnittspunkte einer Geraden mit den Polygonseiten, theils auf Strahlenbüschel, deren Strahlen nach den Ecken und Seiten des Polygons gehen. Am Schlusse des Abschnittes werden in kurzen Zügen und mit eleganter Begründung jene Sätze für die sphärischen Polygone erweitert. Dasselbe geschieht auch jedesmal am Ende der späteren Abschnitte.

Der zweite Abschnitt behandelt die Eigenschaften der collinearen Punktreihen und Strahlenbüschel, sowie die collineare Verwandtschaft der Figuren.

Im dritten Abschnitte wird der Begriff der anharmonischen Verhältnisse von vier Punkten und vier Strahlen erläutert, darauf die sich ergebenden Theoreme auf das Tangentialproblem der Kegelschnitte angewendet.

Der vierte Abschnitt hat die Lehre von den harmonischen Verhältnissen zum Gegenstande. Am Schlusse desselben werden diejenigen Lehrsätze hervorgehoben, welche eine Anwendung auf sphärische Gebilde zulassen und welche nicht.

Der fünfte Abschnitt handelt von den Involutionen (involutorischen Punktreihen und Strahlenbüscheln);

der sechste Abschnitte von den Polen und Polaren am Kreise.

Im siebenten Abschnitte werden, in 26 Sätze eingekleidet, die Eigenschaften der Chordalen oder Potenzlinie von Kreisen entwickelt. Der besonderen Anmuth entsprechend, die uns gerade in diesem Capitel

der neueren Geometrie anheimelt, wird diesem Abschnitt ein verhältnissmässig grösserer Raum zu Theil. Im 22. Satze kommt auch eine Maximalbestimmung vor mittelst Differentialcalculs, welche in einer Gymnasialprima ohne Nachtheil übergangen oder durch eine analytisch-geometrische Betrachtungsweise allenfalls mundgerecht gemacht werden kann.

Im achten und letzten Abschnitte werden die Aehnlichkeitspunkte von Kreispaaren betrachtet.

Wir gestehen gern, dass wir das kleine schätzenswerthe Buch mit vielem Interesse durchgesehen und daraus die Ueberzeugung gewonnen haben, dass sich dasselbe nicht nur als Grundlage für den Unterricht in den oberen Classen der höheren Lehranstalten, sondern auch als ein Hilfsmittel für den Selbstunterricht ausgezeichnet bewähren wird. Wir zweifeln nicht, dass das Buch sich rasch Freunde erwerben wird, und wünschen, dass es dem Verfasser vergönnt sein möge, bald eine neue Auflage seines Buches bearbeiten zu können.

Rostock i. M., 16. October 1877. Prof. L. Matthiessen.

Lehrbuch der Geometrie im Umfange des vollen Gymnasialcursus. Bearbeitet von A. Wohlgemuth. Libau, Zimmermann. 1877.

Vorstehendes Lehrbuch umfasst seinem Titel entsprechend Planimetrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Gegen die Anordnung in den einzelnen angeführten Sparten ist Nichts zu erinnern; was jedoch die Anlage selbst betrifft, so lässt diese insofern zu wünschen übrig, als das Lehrbuch ausser Erklärungen und Lehrsätzen kaum etwas den neueren Lehrbüchern Entsprechendes aufweist, das wie jene den Unterricht in dieser Disciplin über den Vorwurf zu erheben vermöchte, als wäre die Mathematik ein recht trockenes Studium. Wir zweifeln nicht, dass der Herr Verfasser durch mündliche Ergänzungen den geometrischen Unterricht zu beleben wissen wird; ob aber jeder andere Lehrer sich dazu verstehen möchte, unter Zugrundelegung dieses Lehrbuches das Fehlende anpassend zur Vorlage ergänzen zu sollen, oder ob er nicht lieber von vornherein gleich zu einem jener Lehrbücher greift, welche dem Unterricht Leben zu verleihen und Interesse für denselben zu wecken geeignet sind, möchte bei dem jetzigen Stande der Lehrmethode unschwer zu entscheiden sein. Es ist darum zu wünschen, dass nicht jeder Lehrer sich veranlasst fühle, ein Lehrbuch nach seinem Gedankengange zusammenzustellen, wohl aber sich nach einem bewährten Buche umzusehen und diesem sich zu accomodiren. Gelegenheit zu Excursionen wird ihm auch dabei nicht versagt sein.

Kaiserslautern. Hugel. († 3. August 1878.)

Compendium der elektrischen Telegraphie von L. WEIDENBACH, Telegrapheninspector der Köln-Mindener Eisenbahngesellschaft. gr. 8°. 486 S., mit 169 Holzschnitten im Text und 47 Tafeln. Wiesbaden 1877, Verlag von M. Bischkopff. Ladenpreis 15 Mk.

Das vorstehend genannte Werk verdient schon um deswillen eine eingehendere Durchsicht und Beachtung, weil sein Verfasser in mehr als einer Beziehung neue Bahnen wandelt. Als Einleitung (erster Abschnitt) ist eine allgemeine Statistik und Vergleichung der verschiedenen Arten von Telegraphen vorausgeschickt und eine chronologische Uebersicht der auf die Telegraphie Bezug habenden Erfindungen. Die letzte folgt einem bereits 1857 erschienenen Werkchen von Kuppe und bedarf an manchen Stellen der Vervollständigung oder Berichtigung. Der zweite und dritte Abschnitt (S. 21—34) skizziren das Wesentlichste über Elektrolyse und die elektromagnetischen Messapparate. Mit dem vierten und fünften Abschnitte (Abhängigkeit der Stromstärke von dem durchflossenen Leiter, S. 34—71; Stromverzweigungen in linearen Leitern, S. 71—180) beginnt der Verfasser zu zeigen, wie grossen Werth er auf mathematische Untersuchungen bei Beantwortung technischer Fragen aus dem Gebiete der Telegraphie legt. Auf S. 42 und 43 giebt er die Formeln für den Widerstand zweier Leiter von gesetzmässig veränderlichem Widerstand, nämlich zweier Fälle, welche vielfach in galvanischen Elementen vorkommen; hier hätte ich im Interesse Derjenigen, welche das Werk zu ihrer Fortbildung benutzen wollen, die Angabe der Differentialgleichungen gewünscht, von welchen die Rechnung ausgeht, oder doch eine Andeutung über die Herleitung, vielleicht selbst über die Integration dieser Gleichungen. Von den Stromverzweigungen finden sich namentlich die Gruppirung einer grösseren Anzahl von Elementen und die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien sehr eingehend und vielseitig behandelt. Auf S. 66, bei Beantwortung der Frage: „welche Gruppirung der Elemente gestattet, eine verlangte Stromstärke mit der geringsten Anzahl von Elementen zu erreichen?“ hätte noch nachgewiesen werden mögen, dass diese Anzahl N immer der Anzahl m der in einer Gruppe parallel geschalteten Elemente proportional ist, also am allerkleinsten ausfällt, wenn $m = 1$ ist; es wäre dies zu beachten, wenn über die Wahl der im einzelnen Falle zu verwendenden Elemente die Entscheidung zu treffen ist.

Nachdem im sechsten Abschnitte (S. 180—211) die Methoden zur Messung der Widerstände und der elektromotorischen Kraft, im siebenten Abschnitte (S. 211—228) die Vertheilung der Elektricität im Schliessungskreise besprochen und bei letzterer Gelegenheit die Ladungserscheinungen erörtert worden sind, wendet sich der achte Abschnitt (S. 228—290) zur Fehlerbestimmung in oberirdischen Telegraphenleitungen und in Kabeln, welche an vielen Beispielen erläutert wird. Der neunte Abschnitt (Seite

290—322) bringt im Anschluss an die Gesetze des Elektromagnetismus und der Induction Andeutungen über die Construction der Elektromagnete für verschiedene Betriebsverhältnisse. Der letzte (zehnte) Abschnitt (Seite 322—413) enthält einige Angaben über den Bau der Telegraphenlinien und den Gebrauch der üblichsten Telegraphenapparate. Den Schluss bilden kurze Bemerkungen und Erläuterungen zu den zahlreichen Steindrucktafeln, auf denen theils die in der Telegraphie gebräuchlichen Haupt- und Nebenapparate, theils und vorwiegend die Verbindung derselben unter einander in den verschiedenen Stationen und zu den verschiedenen Betriebszwecken dargestellt sind. Die Schaltungsskizzen zeigen vielfach eine sonst nicht gewöhnliche Anordnung, welche durch möglichste Vermeidung von Schnittpunkten zwischen den einzelnen Stromlauflinien eine grössere Deutlichkeit und Durchsichtigkeit bezweckt. Tafel 44 führt eine ganze Reihe von Schaltungen für elektromagnetische Wecker und Klingeln vor; darunter finde ich in Fig. 64 eine mir neue, anscheinend der Fig. 63 nachgebildete, welche indessen insofern mit einem kleinen Uebelstande behaftet ist, als die Linienbatterie, wenn der Taster nach dem Einschalten der Localbatterie noch niedergedrückt gehalten wird, durch letztere einen zweiten Schluss findet, und ebenso natürlich letztere durch die Linienbatterie. Auch verschiedene Gegensprechsysteme werden der Rechnung unterworfen.

Der gedrängte Ueberblick über den Inhalt von Weidenbach's Compendium wird zugleich haben durchfühlen lassen, dass dessen Eigenthümlichkeit vor Allem darin liegt, dass es die aufzuwerfenden Fragen vorwiegend an der Hand der Rechnung zu beantworten sucht. Die meisten Fragen führen aber auf das Ohm'sche und Kirchhoff'sche Gesetz zurück, und deshalb bildet das Compendium zugleich wohl die vollständigste und ergebnissreichste Durchführung dieser Gesetze. Selbstverständlich macht dabei das Compendium nicht nur verhältnissmässig hohe Ansprüche an das mathematische Wissen des Lesers, sondern es setzt bei ihm auch Geschmack an mathematischen Entwickelungen voraus. Wenn demnach allerdings das Studium dieses Werkes eine gewisse Ausdauer und einen gewissen Aufwand von Arbeit und Kraft fordert und deshalb zur Zeit auch wohl von dem Einen oder dem Andern ohne Befriedigung aus der Hand gelegt werden dürfte, so ist doch der vom Verfasser eingeschlagene Weg insofern gewiss der richtige, als auch die Telegraphie, wie die anderen Ingenieurwissenschaften, nur auf mathematischem Boden gut gedeihen kann.

Papier, Satz, Druck und sonstige Ausstattung des Werkes sind zu loben.

Dresden, Anfang Januar 1878. Ed. Zetzsche.

Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen, sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde. Von Dr. CH. AUGUST VOGLER. 4°. VIII, 196 Seiten mit 6 Lichtdrucktafeln und vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Verlag von Ernst & Korn (Gropius'sche Buch- und Kunsthandlung).

In der Gleichung $z = f(x, y)$ liegt sowohl der algebraische Ausdruck für das Ergebniss der Rechnung, welche zwei veränderliche Zahlen in vorgeschriebener Weise mit einander verbindet, als auch für den oftmals nur empirisch bekannten Zusammenhang einer Erscheinung mit zwei anderen ihrer Natur nach dem Wechsel unterworfenen Grössen. Ohne zwischen diesen beiden Bedeutungen selbst zu unterscheiden, kann man nun die Gleichung durch graphische Mittel versinnlichen und die gewonnene Zeichnung, welche zwar punktweise entstand, aber durch Vereinigung der nahen Punkte zu fortlaufenden Zügen die ursprünglich mangelnde Continuität thatsächlich einführte, zur Interpolation auch zwischenliegender Werthe von z benutzen. Das ist der allgemeinste Gedanke der graphischen Tafeln. Er gehört dem Verfasser nicht als ein neuer an. Ein besonderer § 19 (S. 55—63) stellt unter der Ueberschrift: „Historisches" eine ziemlich umfassende Reihe früherer Versuche auf dem gleichen Felde zusammen und gesteht obendrein die muthmassliche Unvollständigkeit dieses Verzeichnisses zu. Nicht wenige andere Schriften, deren Erwähnung in jenem historischen Paragraphen unterblieb, sind in den verschiedenen Anmerkungen zum eigentlichen Texte genannt. Herr Vogler scheint uns trotzdem keiner überflüssigen Mühe sich unterzogen zu haben, als er es unternahm, die Lehre von der Anfertigung und von der Benutzung der graphischen Tafeln in einem zusammenhängenden Buche darzustellen, und die geradezu musterhafte Ausstattung wird gewiss dazu beitragen, dem Werke Freunde zu erwerben. Sein eigentliches Publicum sucht der Verfasser freilich mit Recht unter solchen Berufsclassen, denen eine mitunter nicht sehr bedeutende Annäherung an die gewünschten Ergebnisse genügen darf. Der Eisenbahningenieur bei dem Entwurf einer ersten Trace z. B. wird, wie er mit Aneroid und Tachymeter aufnimmt, auch mit Hilfe graphischer Mittel die Aufnahmen berechnen können. Den Mathematiker interessiren vor Allem die Gedanken, welche bei der Anfertigung jener Tafeln in Anwendung kamen, und Betrachtungen über die Genauigkeitsgrenze, welche die Benutzung der Tafeln zu erreichen gestattet.

Das theoretisch Nächstliegende wäre, $z = f(x, y)$ als Oberfläche zu construiren. Allein die Schwierigkeit der einigermassen genauen Herstellung von Modellen solcher Oberflächen bei nur empirisch gegebenen Punkten derselben verbindet sich hier mit der Unmöglichkeit, bei derartigen Gypsmodellen etwa das zu einem bestimmten Werthepaar von x

und y zugehörige z praktisch in den Zirkel zu fassen und so zu messen. Man hat daher folgende Umformung vorgenommen. Statt x und y gleichzeitig sich verändern zu lassen, hat man die Veränderung zunächst der einen, dann der andern Variabeln zugetheilt. Man hat also etwa y der Reihe nach als Constante c_1, c_2, ... c_n aufgefasst und dann das System der Gleichungen $z=f(x, c_1)$, $z=f(x, c_2)$, ..., $z=f(x, c_n)$ betrachtet. Jede dieser Gleichungen giebt als Bild eine Curve, deren Abscisse x, deren Ordinate z heisst, und der jedesmalige Parameter c (ursprünglich die Variable y) giebt zu erkennen, auf welcher Curve von der ganzen Curvenschaar das z abzumessen ist. Schwierigkeit bereitet nur die im Allgemeinen mühsame Zeichnung aller dieser Curven $z=f(x, c)$. Auch hier kann nun eine Vereinfachung eintreten, deren Gedanke derselbe ist, welchen Gerhard Mercator bei seiner Landkartenzeichnung verwerthete. Statt der Curve $z=f(x, c)$ kann eine gerade Linie $\zeta=a\xi+b$ zur Berechnung oder Messung des ζ und des ihm gleichen z benutzt werden, wenn nur die Ungleichförmigkeit der Veränderung von z, die in dem Functionalzeichen f sich ausdrückte, durch eine ungleichförmige Veränderung von ξ ersetzt wird. Die Curvenschaar wird alsdann zu einer Schaar von Geraden, welche mittelst eines Lineals genau richtig gezeichnet werden können, und nur die Endpunkte der mit 1, 2, 3, ... zu bezeichnenden Abscissen sind nicht äquidistant, sondern für sich aus der Umkehrung der Gleichung $z=f(x, c)$ als $\xi=\varphi(z, c)$ zu berechnen.

Die Genauigkeit der Schichtentafeln — so nennt Herr Vogler seine Zeichnungen — hat der Verfasser in einem ganzen Capitel S. 63—83 behandelt, auf welches nur besonders aufmerksam gemacht sein mag, da es eine ähnliche abgekürzte Andeutung, wie wir sie im Obigen für den Hauptgedanken zu geben versucht haben, nicht zu gestatten scheint.

CANTOR.

Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen von Professor W. UNVERZAGT. Jahresbericht der höheren Bürgerschule zu Wiesbaden über das Schuljahr 1877—78.

Der Verfasser dieses 21 Quartseiten umfassenden Programms hat seine Leser gewöhnt, auf verhältnissmässig kleinem Raume eine wahre Fülle von Gedanken bald entwickelt, bald nur angedeutet zu finden, und diese Erwartung, mit welcher auch wir die neueste seiner Geistesfrüchte zur Hand nahmen, ist nicht getäuscht worden. Gleich den älteren Abhandlungen ist auch die uns vorliegende keineswegs leicht; sie eignet sich nicht zu flüchtigem Durchblättern, aber sie lohnt nach unserem Dafürhalten die Mühe eines Studiums. Herr Unverzagt hat als seine eigentliche Aufgabe darin erfasst: zwei Winkel mit Rücksicht auf die Ebenen, in welchen sie sich befinden, auf die Scheitelpunkte, welche sie besitzen, auf die Drehungsgrössen, der die Anfangsschenkel unterworfen

werden, durch einander zu messen, und als Ergebniss dieser Messung hat sich ihm die Quaternion dargestellt. Er hat aber neben diesem Hauptresultate noch interessante Nebengewinne zu erlangen gewusst. Die Bemerkung, dass zwei nach einander vollzogene Drehungen als Addition solcher Drehungen anzusehen sind, liefert, sofern die Drehung um zwei verschiedene Punkte etwa einer sich drehenden Geraden erfolgt, das erste Beispiel einer nicht commutativen Addition, d. h. es ist $a+b$ in diesem Falle nicht $=b+a$. Ein anderer hübscher Gedanke führt zu einem eigenthümlichen Winkelcoordinatensystem in der Ebene, welches durchaus verschieden ist von dem sogenannten Biangularcoordinatensystem, mit welchem William Walton (*Quart. Journ. mathem. IX*, 47, London 1868) sich beschäftigt hat. Das Unverzagt'sche System besteht nämlich aus zwei festen Winkeln α und β. Von dem zu bestimmenden Punkte M werden Verbindungsgerade nach den Spitzen A und B jener Winkel gezogen, welche mit deren Schenkeln die neuen Winkel α_1 und α_2, beziehungsweise β_1 und β_2 bilden. Die Quotienten $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=x$, $\frac{\beta_1}{\beta_2}=y$ können nun als Coordinaten von M angesehen werden. Wir beschränken uns auf diese geringfügigen Andeutungen, welche nur zum Studium der Abhandlung den Anstoss geben wollen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. September bis 31. October 1878.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus d. J. 1877. Berlin, Dümmler. 14 Mk. 60 Pf.

Physikalische Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus d. J. 1877. Ebendas. 7 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1877. I. Abth., 9. u. 10. Heft. Wien, Gerold. 4 Mk. 50 Pf.

——, Jahrg. 1878. I. Abth., 1. u. 2. Heft. Ebendas. 3 Mk. 40 Pf.

——, Jahrg. 1877. II. Abth., 10. Heft. Ebendas. 3 Mk.

——, Jahrg. 1877. III. Abth., 8.—10. Heft. Ebendas. 4 Mk.

Journal für reine u. angewandte Mathematik, begr. v. CRELLE, herausgeg. v. BORCHARDT. 86. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

DÖRING, W., Nautischer Kalender für 1879. Papenburg, Rohr. 1 Mk.

Journal american of mathematics pure and applied. Ed. by J. Sylvester and E. Story. Vol. I. Nr. 1 and 2. Baltimore. Berlin, Asher & *Comp.* pro compl. (4 Nrn.) 30 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Krause, A., Kant und Helmholtz über den Ursprung der geometrischen Axiome. Lahr, Schauenburg. 3 Mk.

Mayer, E., Die Geschichte des ersten Meridians und der Zählung der geographischen Länge. Wien, Gerold. 40 Pf.

Kempf, P., Untersuchungen über die Ptolemäische Theorie der Mondbewegung. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Günther, S., Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. 4. u. 5. Heft. Halle, Nebert. 1 Mk. 80 Pf.

Reine Mathematik.

Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen; Theorie und Anwendungen. 2. Aufl. 1. Thl. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Sersawy, V., Die Fundamente der Determinantentheorie. Wien, Seidel & S. 1 Mk. 20 Pf.

Buzengeiger, C., Elemente der Differential- und Integralrechnung. Carlsruhe, Bielefeld. 6 Mk.

Spitzer, S., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Wien, Gerold. 9 Mk.

Macher, G., Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_n}=0$. Halle, Nebert. 1 Mk. 50 Pf.

Serret, J., Handbuch der höheren Algebra, deutsch von G. Wertheim. 2. Aufl. 1. Bd. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Tichy, A., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln in graphischer Manier. Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Aschenborn, H., Lehrbuch der Algebra. 3. Aufl. Berlin, v. Decker. 7 Mk.

Kantor, Seligm., I. Ueber den Zusammenhang von n belieb. Geraden in der Ebene. II. Ueber Eigenschaften des Dreiecks und zwei damit in Verbindung stehende Steiner'sche Sätze. III. Ueber eine Verallgemeinerung bekannter Dreieckssätze auf beliebige, einem Kegelschnitte eingeschriebene Vielecke. IV. Ueber das Kreisviereck und Kreisvierseit. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Hess, E., Ueber vier Archimedische Polyeder höherer Art. Cassel, Kay. 60 Pf.

Thaer, A., Ueber die Zerlegbarkeit einer Ebene dritter Ordnung in drei Gerade. Giessen, Ricker. 1 Mk.

Pelz, C., Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiter Ordn. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Röntgen, R., Anfangsgründe der analy[illegible] Geometrie. Jena, Costenoble. [illegible] Mk.

Köstler, H., Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 3. Heft: Die Aehnlichkeit der Figuren. Halle, Nebert. 1 Mk.

Worpitzky, J., Elemente der Mathematik. 5. Heft: Stereometrie. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Unverzagt, W., Der Winkel als Grundlage mathematischer Gleichungen; zugleich ein Beitrag zur Theorie der Quaternionen. Wiesbaden, Kreidel. 1 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Zachariae, G., Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten. Berlin, Oppenheim. 6 Mk. 50 Pf.

Oerter von 539 Sternen der nördlichen Halbkugel für das Jahr 1879. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Sterneck, R. v., Ueber besondere Eigenschaften einiger astronomischen Instrumente. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Neison, E., Der Mond und die Beschaffenheit seiner Oberfläche. Autorisirte deutsche Ausgabe. Braunschweig, Vieweg. 18 Mk.

Wenzel, E., Bestimmung der Bahn des zweiten Cometen vom J. 1874. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Harzer, P., Untersuchungen über Brorsen's Comet von 1842. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.

Becka, G., Ueber die Bahn des Cometen II vom Jahre 1873. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Schaub, F., Nautische Astronomie. 3. Aufl., bearb. v. Gelcich. Wien, Gerold. 6 Mk.

Hofmann, F., Grundriss der mathematischen Geographie. 2. Aufl. Bayreuth, Grau. 1 Mk. 50 Pf.

Kayser, E., Beobachtungen üb. d. Refraction des Seehorizontes u. s. w., angestellt auf dem Observatorium der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Danzig, Anhuth. 2 Mk.

Boltzmann, E., Einige Probleme der Theorie der elastischen Nachwirkung und über eine neue Methode der Schwingungsmessungen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Puschl, C., Grundzüge der aktinischen Wärmetheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Haberditzl, A., Ueber continuirliche akustische Rotationen und deren Beziehung zum Flächenprincip. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Jacquemier, R., Le cinémomètre; nouveau système d'indicateur de vitesse sans l'emploi de la force centrifuge. Nancy, Berger-Levrault. 90 Pf.

Physik und Meteorologie.

Kremers, P., Physikalisch-chemische Untersuchungen. 8. Heft. Wiesbaden, Limbarth. 2 Mk. 50 Pf.

Hess, M., Dynamische Stofflehre. Kosm. Theil. Leipzig, Höhme. 8 Mk.

Wächter, F., Ueber das relative Volumen der Atome. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Gänge, C., Optische Untersuchungen über die Metalle und ihre Verbindungen. Halle, Buchhandlg. d. Waisenh. 1 Mk. 20 Pf.

Lang, V. v., Grösse und Lage der optischen Elasticitätsaxen beim Gypse. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Mach, E., Neue Versuche zur Prüfung der Doppler'schen Theorie der Ton- und Farbenveränderung durch Bewegung. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Dunker, Beobachtungen zur Ermittelung der Wärme des Erdkörpers. Halle, Schmidt. 60 Pf.

Ettingshausen, A. v., Ueber Ampère's elektrodynamische Fundamentalversuche. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Exner, F., Ueber die galvanische Polarisation des Platins im Wasser. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Handmann, R., Bericht über den Egger'schen elektromagnetischen Motor. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

Liznar, J., Ueber die magnetische Declination und Inclination zu Wien. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Streintz, F., Ueber die elektromotorische Kraft von Metallen in den wässerigen Lösungen ihrer Sulfate, Nitrate und Chloride. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Exner, F., Ueber die Elektrolyse des Wassers. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Holtz, W., Ueber die Theorie, Anlage und Prüfung der Blitzableiter. Greifswald, Bamberg. 2 Mk. 50 Pf.

Stefan, J., Ueber die Diffusion von Kohlensäure durch Wasser und Alkohol. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Hann, J., Ueber die Aufgaben der Meteorologie der Gegenwart. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Meteorologische Beobachtungen, angestellt im J. 1876 an 17 deutschen Stationen zweiter Ordnung. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Dorner, H., Grundzüge der Physik. 4. Aufl. Hamburg, Meissner. 2 Mk. 50 Pf.

Differentialgleichungen.

407. Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale algebrico. Casorati. Annali mat. Ser. 2, VII, 197.
408. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Thomé. Crelle LXXXI, 1; LXXXIII, 89. [Vergl. Bd. XX, Nr. 385.]
409. Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Differentiale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Fuchs. Crelle LXXXI, 97. [Vergl. Nr. 65.]
410. Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXX, 149.
411. Integration zweier linearen Differentialgleichungen. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXI, 5.
412. Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 577.
413. Intégrer le système $\frac{dx}{dt}+x.f'(t)-y.\varphi'(t)=0$, $\frac{dy}{dt}+x.\varphi'(t)+y.f'(t)=0$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 76. — Graindorge ibid. 167.
414. The finite integrals of certain partial differential equations which present themselves in physical investigations. Earnshaw. Phil. Mag. LIV, 213.
415. Ueber das Pfaff'sche Problem. Frobenius. Crelle LXXXII, 230.
416. Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Hamburger. Crelle LXXXI, 243.
417. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 471.
418. Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre. Laguerre. N. ann. math. XXXV, 49.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 382. Elliptische Transcendenten 443. Functionen 455.

E.

Elasticität.

419. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. Pochhammer. Crelle LXXXI, 33.
420. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. Pochhammer. Crelle LXXXI, 324.
421. Ueber einen das elastische Gleichgewicht betreffenden Satz. Aron. Crelle LXXXIII, 184.
422. On the theory of an imperfectly homogeneous elastic solid. Niven. Phil. Mag. LIII, 241.
423. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXX, 275.

Elektrodynamik.

424. Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes. Clausius. Crelle LXXXII, 85.
425. Zur Elektrodynamik. Herm. Grassmann. Crelle LXXXIII, 57.
426. Ueber das Grassmann'sche Gesetz der ponderomotorischen Kraft. Clausius. Crelle LXXXIII, 262.
427. On a general theorem respecting electrical influence. Clausius. Phil. Mag. LIV, 454.
428. Zur Theorie der Elektrodynamik. Lippich. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 223.
429. On the formula for the electromotive force of a thermoelement. Avenarius. Phil. Mag. LIII, 156. — Lodge ibid. 349. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 332.]
430. Ableitung des Biot-Savart'schen Gesetzes. Wassmuth. Wien. Akad.-Ber. LXXI, 470.
431. Ueber die stationäre Strömung der Elektricität in einer Platte bei Verwendung geradliniger Elektroden. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 833.
432. On action at a distance in dielectrics. Burbury. Phil. Mag. LIV, 62.
433. Zur Theorie der Wirkung von Cylinderspiralen mit variabler Windungszahl. Wallentin. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 135, 627.

Vergl. Wärmelehre 635, 636.

386. Ueber den Einfluss des Mondes auf die Richtung und Grösse der Schwerkraft auf der Erde. Von Sterneck. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 553.
387. Déduire les levers et les couchers du soleil à Alger de ceux de Paris. Brocard. N. ann. math. XXXV, 512.
Vergl. Geodäsie 461.

Asymptoten.

388. Projection sur le plan des xy des lignes asymptotiques d'un conoïde. Gambey. N. ann. math. XXXV, 503.

Attraction.

389. Attraction agissant en simple fonction de la distance au point attiré et normalement à la surface sur laquelle se trouve ce point. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 41.
390. On the potential of an ellipsoïd at an external point. Clarke. Phil. Mag. LIV, 458.
391. Sur l'attraction des ellipsoides homogènes. Zolotareff. N. ann. math. XXXV, 416.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

392. Sur les nombres de Bernoulli. Hermite. Crelle LXXXI, 93.
393. Ueber eine Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen. Stern. Crelle LXXXI, 290.
394. Sur les nombres de Bernoulli. Worontzoff. N. ann. math. XXXV, 12.
395. Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 497.

Bestimmte Integrale.

396. Ueber einige bestimmte Integrale. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXX, 433; LXXII, 343.
397. Ueber die Ermittelung des Werthes einiger bestimmten Integrale. Hočevar. Wien. Akad.-Ber. LXXIV, 155.
Vergl. Cylinderfunctionen. Elliptische Transcendenten. Gammafunctionen. Kugelfunctionen. Quadratur. Ultraelliptische Transcendenten.

C.

Combinatorik.

398. Sur les permutations rectilignes de 39 lettres égales 3 à 3, quand 2 ou 3 lettres consécutives sont toujours distinctes. Moreau. N. ann. math. XXXV, 90. — Vachette ibid. 114, 145, 193. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 296.]
399. On the number of univalent radicals $C_n H_{2n+1}$. Cayley. Phil. Mag. LIII, 34.

Complanation.

400. Aire d'une partie de la surface d'un paraboloïde elliptique. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 67. — Graindorge ibid. 168.

Cylinderfunctionen.

401. Ueber die Bessel'schen Functionen. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXX, 6; LXXIV, 124; LXXV, 218.
402. Ueber die Functionen $C_n^\nu(x)$. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 891.

D.

Determinanten.

403. Ueber die Determinanten, deren correspondirende Elemente a_{pq} und a_{qp} entgegengesetzt gleich sind. Mertens. Crelle LXXXII, 207.
404. A theorem in continuants. Muir. Phil. Mag. LIII, 137, 360.
Vergl. Differentialgleichungen 418.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

405. Sur la relation de Möbius qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 205.
406. Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 207.
Vergl. Geometrie (höhere) 465.

456. Ein Beitrag zur Theorie der Functionen von drei Veränderlichen. Allé. Wien. Akad.-Ber. LXXXII, 289.
457. Sur la fonction génératrice de Borchardt. Foà de Bruno. Crelle LXXXI, 217.
458. Ueber Borchardt's Function. Kostka. Crelle LXXXII, 212.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Cylinderfunctionen. Elliptische Transcendenten. Formen. Gammafunctionen. Geometrie (höhere) 467, 468. Gleichungen. Kugelfunctionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunctionen.

459. Zur Theorie der Gammafunctionen. Prym. Crelle LXXXII, 165.

Geodäsie.

460. Distanzmesser mit der Basis an dem Instrumente. A. Schell. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 145.
461. On a correction to observed latitudes. Clarke. Phil. Mag. LIV, 302.

Geometrie (descriptive).

462. Freie schiefe Projection. Peschka. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 917.
463. Neue Construction der Perspectivcontouren für Oberflächen zweiter Ordnung. Zipernovszky. Wien. Akad.-Ber. LXXI, 33.
464. Ueber die Construction der Umhüllungsflächen variabler Kugeln. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 7.
Vergl. Kegelschnitte 508, 509. Oberflächen zweiter Ordnung 577.

Geometrie (höhere).

465. Théorie des indices. Faure. N. ann. math. XXXV, 251, 292, 339, 451, 481, 529, 561.
466. I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva. d'Ovidio. Annali mat. Ser. 2, VII, 25. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 72.]
467. Die Grundgebilde der Liniengeometrie. Frombeck. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 475.
468. Bemerkungen zur Coordinatentheorie. Frombeck. Wien. Akad.-Ber. LXXIV, 399.
469. Enveloppe d'une droite dont les deux bouts se meuvent avec une vitesse égale sur deux courbes situées dans le même plan. Tournois. N. ann. math. XXXV, 229.
470. Transformation d'une courbe par rayons vecteurs réciproques. Genty. N. ann. math. XXXV, 558.
471. Génération d'une cubique. Dewulf. N. ann. math. XXXV, 550.
472. Ueber eine geometrische Verwandtschaft in Bezug auf Curven dritter Ordnung und dritter Classe. Zahradník. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 437.
473. Studî analitici sulle curve del quarto ordine. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, VII, 202.
474. Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunkte. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXI, 400.
475. Ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 686; LXXIII, 203.
476. Ueber die projectivische Beziehung zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 654.
477. Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 168.
478. Ueber Punktsysteme auf rationalen Raumcurven vierter Ordnung. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 458.
479. Sur les courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$. Niewenglowski. N. ann. math. XXXV, 126. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 76.]
480. Coordonnées de courbes d'un degré m en fonction d'un paramètre. Hermite. Crelle LXXXII, 343.
481. Zur Geometrie ähnlicher Systeme und einer Fläche dritter Ordnung. Mosshammer. Wien. Akad.-Ber. LXXIV, 131.
482. Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. Caspary. Crelle LXXXI, 148.

Geschichte der Mathematik.

483. L'idée de la cinématique remonte à Carnot si non plus haut. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 92. — Liguine ibid. 499.
484. Commemorazione di Jacopo Steiner. Geiser. Annali mat. Ser. 2, VII, 65.
485. Commemorazione di Bernaba Tortolini. Annali mat. Ser. 2, VII, 63.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 380. Gleichungen 492. Oberflächen 576. Trisection des Winkels 617. Zahlentheorie 645.

Gleichungen.

486. Neuer Beweis für die Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem vierten Grade. Netto. Crelle LXXXIII, 86.
487. Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten. Kostka. Crelle LXXXI, 281.
488. Ueber den Ausdruck, welcher im Falle gleicher Wurzeln an die Stelle der Vandermonde'schen alternirenden Function tritt. Franke. Crelle LXXXIII, 65.
489. Sur la continuité des racines des équations algébriques. Rouquet. N. ann. math. XXXV, 154.
490. Transformations différentes d'une équation du second degré. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 369.
491. Racine d'une équation cubique exprimée en fonction de la différence des deux autres racines. Moreau. N. ann. math. XXXV, 186.
492. Sur une méthode d'approximation de Cordano. Brocard. N. ann. math. XXXV, 328.
493. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques réimprimé des exercices d'analyse et de physique mathématique. Cauchy. N. ann. math. XXXV, 385, 433.
Vergl. Substitutionen.

H.

Hydrodynamik.

494. Zur Abhandlung des Herrn O. E. Meyer über innere Reibung. Boltzmann. Crelle LXXXI, 96. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 117.]
495. Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung. Oberbeck. Crelle LXXXI, 62.
496. On liquid vortex-rings. Trowbridge. Phil. Mag. LIII, 290.

Hyperbel.

497. Hyperbole engendrée au moyen de deux droites parallèles et d'un point. Biard. N. ann. math. XXXV, 282.
498. Propriété des ellipses ayant leur centre sur une hyperbole donnée et touchant les asymptotes de cette hyperbole. Segue. N. ann. math. XXXV, 234. — De Virac ibid. 326.
499. Hyperboles équilatères passant par quatre points situés sur une circonférence. Barbarin. N. ann. math. XXXV, 210.
500. Hyperbole équilatère passant par quatre points donnés d'une circonférence. Griess. N. ann. math. XXXV, 277.
501. Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à une parabole donnée. De Beauséjour. N. ann. math. XXXV, 140. — Moreau ibid. 142.
502. Propriété d'hyperboles équilatères. Wisselink. N. ann. math. XXXV, 274.
Vergl. Kreis 524. Parabel 588, 589.

I.

Integration (unbestimmte).

503. Ueber die unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Functionen. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXX, 17.
504. Intorno ad una classe di integrali esprimibili con soli logaritmi. Piuma. Annali mat. Ser. 2, VII, 18.

Invariantentheorie.

505. Ueber die Discriminante der Jacobi'schen Covariante dreier ternären quadratischen Formen. Igel. Wien. Akad.-Ber. LXXIV, 355; LXXV, 830.
506. Sur les coordonnées pentaédriques. Gambey. N. ann. math. XXXV, 516.
Vergl. Differentialgleichung 409.

N.

Normalen.

253. Les segments des normales en deux points d'une conique, compris entre ces points et un axe de la courbe, sont vus sous le même angle du point de concours des tangentes en ces points. Pellissier. N. ann. math. XXXV, 334.
554. Lieu des points des normales à une ellipse qui terminent des segments égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le point de l'ellipse dont la normale est en discussion. Barthe. N. ann. math. XXXV, 381.
555. Propriétés de 4 normales d'une ellipse. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 474.
556. Lieu des pieds des normales menées d'un point donné à une série d'ellipses. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 170.
557. Lieu géométrique de l'intersection de deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur. Gambey. N. ann. math. XXXV, 144.
558. Bemerkung zu derjenigen Gleichung, von welcher die Bestimmung der Normalen einer Fläche zweiten Grades abhängt. Caspary. Crelle LXXXIII, 72.
559. Die Normalflächen der Flächen zweiter Ordnung längs ebener Schnitte derselben. Koutny. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 851.

O.

Oberflächen.

560. Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen. Reye. Crelle LXXXII, 1.
561. Die reciproken linearen Flächensysteme. G. v. Escherich. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 523.
562. Ueber Minimalflächen. Kiepert. Crelle LXXXI, 337.
563. Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört. Weingarten. Crelle LXXXIII, 1.
564. Ueber die reciproke Verwandtschaft von F^2-Systemen und Φ^2-Geweben und die quadratischen F^2-Systeme achter Stufe. Reye. Crelle LXXXII, 173.
565. Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung. Moshammer. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 143.
566. Correzione alla memoria intitolata: Quand'è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca un pezzo rientrante? Schlaefli. Annali mat. Ser. 2, VII, 193. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 363.]
567. Sulla superficie del quinto ordine dottata d'una curva doppia del quinto ordine. Caporali. Annali mat. Ser. 2, VII, 149.
568. Recherches des surfaces que l'on peut représenter sur un plan. O. Bonnet. Annali mat. Ser. 2, VII, 61.
569. Paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites données. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 514.
570. Propriété de deux surfaces gauches ayant une génératrice commune. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 36.

Vergl. Abbildung. Attraction 389. Complanation. Functionen 456. Geometrie (höhere) 481, 482. Krümmung 530, 531, 532, 533. Thetafunctionen.

Oberflächen zweiter Ordnung.

571. Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades. Reye. Crelle LXXXII, 54.
572. Zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades. Geiser. Crelle LXXXII, 47.
573. Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre. Laguerre. N. ann. math. XXXV, 10.
574. Sur la surface du second ordre dégénérée en deux plans. Bourguet. N. ann. math. XXXV, 333.
575. Sur l'intégration de l'équation d'Euler. Escary. N. ann. math. XXXV, 61. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 346.]
576. Sur un théorème de Jacques Bernoulli. Niewenglowski. N. ann. math. XXXV, 127. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 463.]

603. Sommation d'une série convergente. Barbarin. N. ann. math. XXXV, 135. — Gerono ibid. 180.

604. $\pm 1 = 1 - \frac{2^3 n^2}{1.2} + \frac{2^4 n^2 (n^2-1^2)}{1.2.3.4} - \frac{2^6 n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$ Genese. N. ann. math. XXXV, 189.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Elliptische Transcendenten 444, 445. Kugelfunctionen. Taylor's Reihe. Zinseszinsrechnung.

S.

Schwerpunkt.

605. Détermination du centre de gravité du volume du tronc de prisme droit à base triangulaire. Resal. N. ann. math. XXXV, 289.

606. Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire oblique. Brassinne. N. ann. math. XXXV, 465.

Sphärik.

607. Propriétés des quatre cercles inscrits dans un triangle sphérique. Brocard. N. ann. math. XXXV, 183.

Stereometrie.

608. Déterminer la figure et le volume d'un certain solide commun à deux tétraèdres. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV, 365.

609. Couper une sphère et un cône de même hauteur par un plan parallèle à la base du cône de telle sorte que les sections soient en rapport donné. Wisselink. N. ann. math. XXXV, 371.

Vergl. Maxima und Minima.

Substitutionen.

610. Ueber transitive Gruppen. Netto. Crelle LXXXIII, 43.

T.

Taylor's Reihe.

611. On a generalisation of Taylor's theorem. Sylvester. Phil. Mag. LIV, 136.

Thetafunctionen.

612. Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Goepel'sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln. Borchardt. Crelle LXXXIII, 234.

613. On the double Θ-functions in connexion whith a 16-nodal quartic surface. Cayley. Crelle LXXXIII, 210.

614. Further investigations on the double Θ-functions. Cayley. Crelle LXXXIII, 220.

Trigonometrie.

615. Dans toutes les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes il est permis de substituer aux côtés certaines fonctions des côtés et des angles. Pravaz. N. ann. math. XXXV, 184.

616. Resoudre le triangle dont les trois côtés sont a, b, c, la hauteur sur a étant h et A l'angle opposé à a au moyen de a, A et $m^2 = h^2 + (b-c)^2$. N. ann. math. XXXV, 263.

Trisection des Winkels.

617. De la trisection de l'angle a l'aide du compas sphérique. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 8.

618. On the trisection of an angle of 30°. Bosanquet. Phil. Mag. LIII, 61.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

619. Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. Koenigsberger. Crelle LXXXI, 193.

620. Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. H. Weber. Crelle LXXXII, 131.

Vergl. Formen 451.

V.

Variationsrechnung.

621. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. G. Erdmann. Crelle LXXXII, 21.

W.

Wärmelehre.

622. Ueber das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 427.
623. Bemerkungen über die Wärmeleitung der Gase. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 458.
624. Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichts eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 128, 366; LXXV, 287.
625. Ueber die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molecularbewegung in Gasen bestimmen. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXIV, 503.
626. Ueber einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 62.
627. Ueber eine Modification der herrschenden Gastheorie. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXX, 413.
628. Ueber das Verhalten gesättigter Dämpfe. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXX, 571.
629. Ueber den Einfluss von Druck und Zug auf die thermischen Ausdehnungscoefficienten der Körper und über das bezügliche Verhalten von Wasser und Kautschuk. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 245.
630. Erniedrigung der Temperatur des Dichtigkeitsmaximums des Wassers durch Druck. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXXII, 283.
631. Von der bei Volumveränderungen der Körper entwickelten oder verschluckten Wärme. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 51.
632. Von den das Volumen der Körper bedingenden Kräften. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXXIII, 345.
633. Ueber den inneren Zustand und die latente Wärme der Dämpfe. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 745.
634. On the application of thermodynamics to the study of the variations of potential energy of liquid surfaces. Van der Mensbrugghe. Phil Mag. LIV, 40. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 520.]
635. Ueber eine Folgerung aus der Analogie der Temperatur und der Potentialfunction. Domalip. Wien. Akad.-Ber. LXXI, 236.
636. On the distribution of temperature in the conducting wire of a galvanic current. Streintz. Phil. Mag. LIV, 79.
637. On some effects of dissociation on the physical properties of gases. Hicks. Phil. Mag. LIII, 401; LIV, 80, 174.
638. On the penetration of heat across layers of gas. Stoney. Phil. Mag. LIV, 424.
639. Ueber den Peltier'schen Versuch. A. von Waltenhofen. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 245.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

640. On fallible measures of variable quantities and on the treatment of meteorological observations. Darwin. Phil. Mag. LIV, 1.

Z.

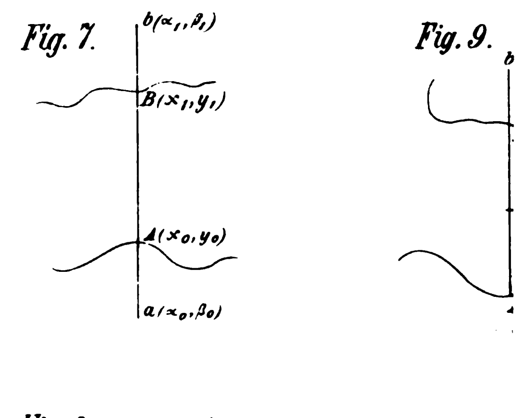
Zahlentheorie.

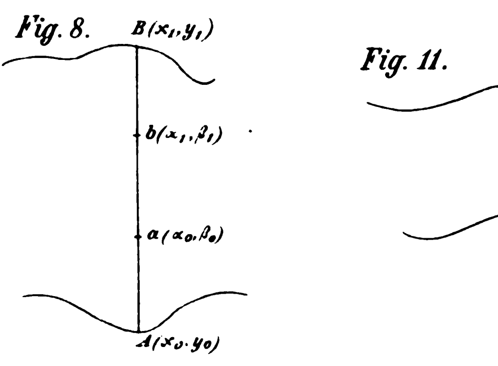
641. On unitation. Walenn. Phil. Mag. LIV, 375. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 531.]
642. Nombre des nombres premiers entre a et $2a$. Brocard. N. ann. math. XXXV, 330. — Lionnet ibid. 473.
643. Fractions décimales périodiques simples à périodes de 1, 2 ou 4 chiffres. Wisselink. N. ann math. XXXV, 373.
644. Neue Methoden zur Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in ganzen Zahlen. Kunerth. Wien. Akad.-Ber. LXXV, 7.

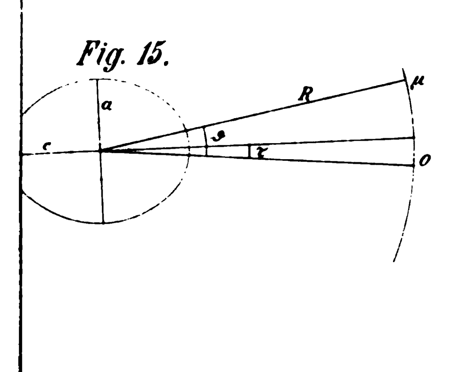
645. Solution d'un problème de Beha-Eddin sur l'analyse indéterminée. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV, 350.
646. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation $x(x+1)(2x+1) = 6y^2$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV. 46.
647. Sur le système des équations $x^2-6y^2=u^2$, $x^2-6y^2=v^2$. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXV. 466.
648. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation $x^y = y^x + 1$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXV. 44.
649. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation $(x-1)^x = x^{x-1} + 1$. Mey. N. ann. math. XXXV, 545.
Vergl. Formen.

Zinseszinsrechnung.

650. Ueber einen Satz aus der Theorie der Leibrenten. Malmsten. Crelle LXXXIII. 245.


Fig. 7.
$b(\alpha_1, \beta_1)$
$B(x_1, y_1)$
$A(x_0, y_0)$
$a(\alpha_0, \beta_0)$
Fig. 9.
b


Fig. 8.
$B(x_1, y_1)$
$b(\alpha_1, \beta_1)$
$a(\alpha_0, \beta_0)$
$A(x_0 \cdot y_0)$
Fig. 11.


Fig. 15.
a
c
R
μ
ϑ
τ
O



